УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА РАН

На правах рукописи

ДИДЕНКО Вячеслав Евгеньевич

ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ В ТЕОРИИ ПОЛЕЙ ВЫСШИХ СПИНОВ

(01.04.02 – теоретическая физика)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. М. А. ВАСИЛЬЕВ

Москва - 2010

Оглавление

Введение

Хотя со времени открытия общей теории относительности и квантовой теории прошло чуть меньше ста лет, на основе этих фундаментальных концепций до сих пор не удается построить единую теорию всех наблюдаемых взаимодействий. Хорошо известно, что теорию гравитации нельзя проквантовать в рамках действия Гильберта-Эйнштейна имеющимися на сегодняшний день средствами. Симметрии теории оказывается недостаточно, чтобы она была конечной. В результате, ее матрица рассеяния оказывается неперенормируемой уже во второй петле (в отсутствие материи).

С открытием суперсимметрии появилась возможность построения совместного взаимодействия гравитации с калибровочными фермионами (супергравитация [1]). Оказалось, что при квантовании суперсимметричных теорий, ультрафиолетовые расходимости появляются, как правило, в более старших порядках теории возмущений, чем в отсутствие суперсимметрии. Таким образом, наличие большого числа симметрий теории может улучшать ее квантовое поведение. Тем не менее, теории супергравитаций также неперенормируемы и, по-видимому, не являются конечными.

Одним из замечательных подходов к проблеме построения квантовой гравитации является теория (супер)струн [2], которую можно интерпретировать как теорию взаимодействующих массивных полей всех спинов и безмассовых полей спина $s = 1$ (фотон) и $s = 2$ (гравитон). В основе ее лежит огромная симметрия, включающая помимо диффеоморфизмов пространства-времени еще и бесконечномерную конформную симметрию на мировом листе. Ожидается, что теория (супер)струн, как квантовая теория, конечна во всех порядках. Несмотря на впечатляющие достижения струнной теории, в ней по–прежнему остается много нерешенных проблем. Таковой является зависимость теории струн от фоновой метрики: наиболее развита теория суперструн в плоском пространстве-времени, но отсутствует в произвольной геометрии.[1] Другая проблема состоит в нахождении правильного вакуума теории, описывающего наблю-

[1]В связи с гипотезой AdS/CFT соответствия и интегрируемости отметим прогресс в теории струн на $AdS_5 \times S^5$, а также возрастающий интерес к независящим от фоновой метрики топологическим струнам.

даемое $d = 4$ пространство-время. Отсутствие процедуры, которая бы фиксировала единственный вакуум, привело к спорной концепции ландшафтов в теории струн. В связи с этим представляется важным изучение альтернативных подходов к проблеме.

Одним из таких направлений является калибровочная теория высших спинов, обобщающая супергравитацию. В отличие от супергравитаций, спектр ее состояний включает бесконечный набор безмассовых полей произвольного спина. Предполагается, что наблюдаемые массивные состояния будут возникать в результате спонтанного нарушения калибровочной симметрии. Свободная теория для бозонных полей в $d = 4$ пространстве Минковского была сформулирована в работе [3]. По мере развития теории стало ясно, что взаимодействие таких полей с гравитацией в плоском пространстве несовместно с калибровочной симметрией [4, 5]. Выход для теорий высших спинов был найден в работах [6, 7], где было показано, что в $d = 4$ взаимодействие высших спинов друг с другом существует, по крайней мере, в первом нетривиальном порядке (кубичная вершина), но не на плоском фоне, а на пространстве с ненулевой космологической постоянной $\Lambda = -\lambda^2$ – пространстве анти де–Ситтера AdS_4. Космологическая постоянная входит во взаимодействие неаналитично, не допуская, таким образом, плоского предела $\lambda \to 0$ без нарушения калибровочных симметрий.

Актуальность изучения калибровочных теорий высших спинов возросла после открытия дуальности между теорией струн в пространствах AdS и теорией Янга-Миллса на их границе [8]. Нетривиальные тесты гипотезы Малдасены проведены в области больших значений постоянной т'Хоофта $\lambda = g^2_{YM}N \to \infty$, где g_{YM} и N есть константа связи и число цветов в граничной теории Янга-Миллса. Данный режим соответствует сильной связи в теории Янга-Миллса и квазиклассическому описанию теории суперструн в супергравитационном пределе. Есть основания считать, что в пределе малой постоянной т'Хоофта теория струн с нулевым натяжением является некоторой нелинейной калибровочной теорией высших спинов дуальной свободной конформной теории на границе [9]. В настоящее время это направление активно исследуется [10, 11].

Дальнейшее развитие теории высших спинов привело к построению полных классических нелинейных уравнений для взаимодействия безмассовых полей произвольного спина в $d = 4$ [12, 13]. Обобщение на случай произвольного d было получено относительно недавно в работе [14], где были найдены нелинейные уравнения для симметричных бозонных полей. Помимо симметрий AdS пространства такая теория имеет бесконечную калибровочную симметрию – симметрию высших спинов – и, таким образом, описывает бесконечный набор безмассовых полей всех спинов. К сожалению, теория высших спинов в таком виде сформулирована только на уровне уравнений движения в пространстве анти-де Ситтера, но до сих пор неизвестно ее полное нелинейное действие.

Заметим, что в отличие от теории (супер)струн, в спектре теории высших спинов нет массивных состояний. Это означает, что симметрии калибровочных теорий высших спинов богаче чем симметрии струнных теорий. Можно предположить, что струнные теории могут оказаться спонтанно нарушенными фазами некоторых калибровочных теорий высших спинов. К сожалению, проверка этой гипотезы еще очень далека от завершения из-за как концептуальных, так и технических сложностей. Во-первых, струнные теории не имеют конформных аномалий только в $d = 26$ (бозонная струна) или $d = 10$ (суперструна). Поэтому, являясь существенно многомерными, они содержат в своем спектре, например, поля смешанного типа симметрии (поле, спин которого характеризуется несколькими квантовыми числами). В тоже время, теория высших спинов в d измерениях известна на настоящий момент только для симметричных бозонных полей. Во-вторых, технически обе теории сформулированы совершенно по–разному. Поля в теории струн возникают в рамках стандартного полевого подхода как первично квантованные возбуждения колебаний струны. Калибровочная теория высших спинов сформулирована в терминах, так называемого, развернутого формализма, в котором нелинейные уравнения поля представляют собой уравнения первого порядка на дифференциальные формы, а вся нелокальность, связанная со взаимодействием, закодирована бесконечным набором вспомогательных полей, которые выражаются через производные от физических полей на уравнениях движения. Достоинством такого подхода является то, что теория записана в координатно-независимой форме[2]. Из недостатков на сегодняшний день стоит отметить отсутствие физического принципа, который бы диктовал вид нелинейных уравнений.

Дальнейшее развитие калибровочной теории высших спинов связано с построением точных решений. Анализ таких решений и методы их поиска может пролить свет на физическую интерпретацию уравнений и позволяет лучше понять их структуру. Кроме того, такое исследование необходимо для выявления механизма спонтанного нарушения симметрии высших спинов.

Альтернативой развития теории калибровочных полей является обобщение на симплектические пространства. Действительно, с открытием $Sp(2M)$ инвариантных обобщенных пространств [15], теория высших спинов получила возможность развиваться в совершенно ином (симплектическом) направлении. В работах [15, 16] было

[2]Напомним, что пертурбативный анализ в плоском пространстве–времени приводит к патологиям.

показано, что бесконечные мультиплеты безмассовых полей высших спинов в четырехмерном плоском пространстве Минковского можно описать в терминах десятимерного пространства-времени $\mathcal{M}_4$ с действительными симметричными биспинорными матричными координатами $X^{\alpha\beta} = X^{\beta\alpha}$, $(\alpha, \beta = 1 \dots 4)$. Скалярное поле $c(X)$ в $\mathcal{M}_4$ описывает все безмассовые поля целого спина в четырехмерном пространстве Минковского с помощью полевых уравнений, найденных в [15]. Аналогично, полуцелые спины описываются спинорным полем $c_\alpha(X)$. Тот факт, что безмассовые поля всех спинов можно изучать в $\mathcal{M}_4$, был указан Фронсдалом в пионерской работе [17], где было также подчеркнуто, что бесконечные наборы этих безмассовых полей образуют представления расширения $4d$ конформной группы $SU(2,2)$ до $Sp(8|R)$. Позже было показано [23], что модели мировой линии частицы, основанные на $sp(8|R)$, порождают безмассовые возбуждения всех спинов. Явная реализация $sp(8)$ симметрии локальными преобразованиями и обобщение предложенных $sp(8)$ инвариантных динамических уравнений на $\mathcal{M}_M$ с произвольным четным M были даны в [15].

Аналогом пространства анти-де Ситтера в симплектических геометриях является групповое многообразие $Sp(M)$. Изучение вакуума и динамики свободных калибровочных полей в этом пространстве является важной задачей в контексте развития общей теории, основанной на симплектических геометриях. Это является одной из целей диссертации.

Поскольку теория высших спинов является обобщением теории Эйнштейна, естественным и физически очень интересным представляется поиск аналогов черных дыр гравитации в теории высших спинов. Изучению малой части этой проблемы посвящена настоящая диссертация. Исследование чернодырных решений является также важным в связи с их удивительными квантовыми свойствами. Как известно из работ Бекенштейна и Хокинга [18, 19], термодинамические характеристики черных дыр включают в себя зависимость, как от постоянной Планка, так и от константы Ньютона, что является одним из немногих физических примеров, где проявляются свойства квантовой гравитации. На сегодняшний день известные квантовые свойства черных дыр порождают больше вопросов чем ответов в виду отсутствия последовательной квантовой теории гравитации. Примерами таких проблем являются парадокс потери информации черной дырой, связанный с, так называемой, теоремой об отсутствии "волос", и проблема микроскопического вывода энтропии Бекенштейна–Хокинга. Исследованию данных вопросов посвящено много работ по теории струн. Из наиболее существенных стоит отметить работу [20], в которой предлагается "микроскопический" вывод энтропии Бекенштейна–Хокинга путем подсчета плотности некоторых струнных состояний для экстремальной черной дыры в $d = 5$, а также работу [21], где выдвигается гипотеза Kerr/CFT соответствия, которая отождествляет генераторы асимптотических симметрий геометрии горизонта $d = 4$ экстремального решения Керра с генераторами симметрий некоторой двумерной конформной теории поля с ненулевым центральным зарядом. Использование формулы Карди [22] приводит к буквальному совпадению энтропии этой теории с энтропией Бекенштейна–Хокинга.

Изучение черных дыр в теории высших спинов позволяет взглянуть под другим углом на вышеперечисленные проблемы. В данной диссертации изучаются только классические свойства черных дыр методами теории высших спинов в $d = 3$ и $d = 4$ измерениях. Но даже на этом уровне развернутый формализм позволяет обнаружить некоторые новые ранее неизвестные свойства черных дыр общей теории относительности, а также найти их обобщения в теории высших спинов. Основная мотивация рассмотрения черных дыр в $d = 3$ заключается в том, что, несмотря на простоту случая трех измерений, изучение БТЗ (Банадос, Тайтельбойм, Занелли) решения [42] в калибровочной теории высших спинов может быть полезным для изучения менее тривиальных решений типа Керра-Шварцшильда, как минимум, в двух отношениях. Во-первых, разрабатывается техника звездочной алгебры для описания физики черных дыр. Это и является одной из целей данной диссертации. Во-вторых, можно ожидать, что, также как четырехмерное пространство Минковского является некоторым срезом плоского десятимерного пространства с матричными координатами [17, 23, 15] $X^{AB} = X^{BA}$ (A, B — четырехмерные майорановские спинорные индексы), обычное решение Керра для черной дыры в четырех измерениях можно интерпретировать как срез БТЗ-подобного решения, связанного с групповым многообразием $Sp(4)$, представляющим собой аналог AdS-геометрии согласно [24, 15, 100, 25]. Если это действительно так, то изучение решений нулевой кривизны типа БТЗ поможет взглянуть на физику обычных черных дыр с более общей точки зрения многомерных обобщенных пространств с матричными координатами.

Бóльшая часть диссертации посвящена физически более интересной ситуации, а именно, $d = 4$ черным дырам. Мотивация изучения четырехмерных черных дыр состоит в том, что даже для этого физически важного случая до сих пор нет инвариантного описания геометрии черной дыры, не аппелирующего к тем или иным координатам. Методы теории высших спинов дают прекрасную возможность получить такое описание. В данной диссертации показано, что четырехмерную черную дыру можно легко описать в терминах одного параметра симметрии AdS_4 (или плоского) пространства-времени без использования координат. Такая формулировка позволяет лучше понять интегрируемые структуры черной дыры, связанные со скрытыми симметриями, а также найти чернодырное решение в нелинейной теории высших спинов.

Уникальность классических черных дыр состоит в том, что будучи точными решениями уравнений Эйнштейна, они удовлетворяют одновременно их линеаризованной части, то есть уравнениям свободного поля спина $s = 2$ (уравнения Паули–Фирца). Этот факт позволяет рассматривать эти решения в теории высших спинов и пытаться искать пертурбативные поправки к нему, связанные со вкладом во взаимодействие всех безмассовых полей. В предлагаемой диссертации это удалось сделать во всех порядках для статической черной дыры в бозонной теории. Таким образом, предлагается точное решение нелинейных уравнений высших спинов, обобщающее статическое решение Шварцшильда в AdS_4.

Резюмируя, основные цели предлагаемой диссертации состоят в следующем.

- Изучить вакуум и динамику свободных безмассовых полей в обобщенном (супер) пространстве анти-де Ситтера $OSp(\mathcal{L}, M)$. Такая формулировка дает необходимое для дальнейшего описание БТЗ черной дыры при $M = 2$.

- Применить развитый формализм к БТЗ черной дыре, что приводит к решению задачи о распространении безмассовых флуктуаций на ее фоне, а также обнаруживает условие квантования на массу и угловой момент черной дыры, при выполнении которого метрика имеет дополнительные симметрии связанные со старшими производными.

- В рамках развернутой формулировки найти бескоординатное описание черных дыр Эйнштейна–Максвелла в AdS_4, характеризующиеся массой, НУТ зарядом, электрическим и магнитным зарядами и угловым моментом. Данная формулировка позволяет представить метрику в инвариантном виде $g_{\mu\nu} = f(\eta^{AdS}_{\mu\nu}, \epsilon_0, M_i)$, где $\eta^{AdS}_{\mu\nu}$ – метрика AdS_4 в произвольных координатах, ϵ_0 – параметр глобальной симметрии AdS_4 (вектор Киллинга), инварианты которого (казимиры) классифицируют кинематические характеристики черной дыры, а M_i – набор "динамических" параметров – масса, НУТ заряд, электрический и магнитные заряды.

- Построить аналог чернодырного решения в нелинейной теории высших спинов. Данная задача решена точно для бозонного сектора и обобщает статическую черную дыру Шварцшильда в AdS_4. Решение этой проблемы существенно опирается на бескоординатную формулировку черных дыр общей теории относительности.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и четырех приложений. В первой главе диссертации найден общий вид вакуумных калибровочных полей в обобщенном AdS суперпространстве, ассоциированном с группой $OSp(L, M)$. Это позволяет описать динамику свободных безмассовых полей в обобщенном AdS пространстве-времени и найти законы их (обобщенных) конформных преобразований и преобразований высших спинов. Найдено в явном виде общее решение полевых уравнений. Результаты получены с помощью звездочной реализации ортосимплектических суперлагебр.

Во второй главе исследуется $d = 3$ БТЗ черная дыра как точное вакуумное решение $d = 3$ теории высших спинов. В трех измерениях классические черные дыры являются топологическими и существуют только в AdS_3 пространстве (БТЗ черная дыра). Поскольку локально БТЗ изоморфна AdS_3, то факт, что метрика БТЗ является точным вакуумом теории высших спинов, тривиален. Тем не менее, это наблюдение позволяет использовать мощные методы теории высших спинов для анализа этого решения. В частности, развернутая формулировка эффективно решает задачу о безмассовых флуктуациях на фоне черной дыры. Кроме этого, найдены новые симметрии этого решения, существующие для некоторых значений массы и углового момента.

В третьей главе изучаются свойства классических четырехмерных черных дыр в AdS_4 пространстве–времени. Используя методы теории высших спинов, построена развернутая система уравнений, отвечающая общей $d = 4$ черной дыре (метрика Картера-Плебанского), которая характеризуется массой $\mathbf{M}$, НУТ–зарядом $\mathbf{N}$, электрическим и магнитным зарядами e и g, а также кинематическими параметрами – угловым моментом a и дискретным параметром $\epsilon = 0, \pm 1$. Показано, что полученная развернутая система связана некоторым интегрирующим потоком с условием ковариантного постоянства параметра глобальной симметрии AdS_4. Тем самым, черная дыра порождается вектором Киллинга пространства AdS_4. Тип черной дыры – вращающаяся или статическая – характеризуется значениями AdS_4 инвариантов в координатно–независимом виде. Данное построение не только полезно для теории классических черных дыр, поскольку позволяет проводить вычисления связанные с метрикой в любых координатах, но и является необходимым для пертурбативного анализа чернодырных решений в нелинейной теории высших спинов.

В четвертой главе, опираясь на результаты предыдущей главы, получено точное решение $d = 4$ бозонных уравнений высших спинов, которое в низших порядках по взаимодействию в секторе спина $s = 2$ описывает AdS_4 статическую черную дыру. На полном нелинейном уровне данное решение представляет собой первый пример чернодырного решения в $4d$ теории высших спинов. В приложениях собраны технические детали вычислений и необходимые обозначения.

Глава 1

Динамика свободных полей в обобщенном AdS пространстве

В этой главе рассматриваются вакуумные (супер)поля обобщенного AdS (супер) пространства и описывается распространение свободных полей на его фоне. Свойства $Sp(2M)$ инвариантного пространства-времени $\mathcal{M}_M$ были изучены в [16]. Было показано, что классические решения полевых уравнений определяют причинную структуру и допускают последовательное квантование в положительно определенном гильбертовом пространстве. Обычное d-мерное пространство Минковского появляется как некоторое подпространство обобщенного пространства-времени. Анализ в [15, 16] был выполнен для плоского пространства-времени, хотя сам формализм работает в произвольном (обобщенно) конформно-плоском фоне. В частности, интересно расширить этот анализ на обобщенное пространство анти-де Ситтера, являющимся, как было указано в [15], групповым многообразием $Sp(M)$ (M четно), имеющем $Sp(M) \times Sp(M) \subset Sp(2M)$ в качестве группы изометрии, реализованной действием левыми и правыми сдвигами группы на себе. Поскольку анализ $Sp(2M)$ инвариантных систем высших спинов наиболее естественно проведен в терминах звездочных алгебр, для его расширения на обобщенное AdS пространство-время, необходимо построить звездочную реализацию левоинвариантных форм Картана (то есть плоских связностей) на $Sp(M)$. Это основная цель данной главы. Полученные результаты позволяют получить явные формулы для симметрий и решений безмассовых полевых уравнений в обобщенном AdS пространстве-времени. Аналогичная конструкция также предложена для суперсимметричного случая $OSp(L, M)$.

Заметим, что поскольку используемый формализм звездочной алгебры приводит к компактным выражениям для $OSp(L, M)$ суперформ Картана, помимо проблемы высших спинов, полученные в данной главе результаты имеют различные приложения к другим проблемам, где возникают левоинвариантные $OSp(L, M)$ формы. Например, в [24] было показано как $OSp(1, M)$ формы Картана могут быть использованы для построения твисторо-подобных действий для суперчастиц и обсуждены возможные приложения к супербранам, а в [26] была предложена игрушечная модель M-теории основанная на $osp(1, 64)$.

1.0.1 Обобщенная конформная симметрия

Генераторы L_{mn}, P_m, K_m, D конформной алгебры $o(d, 2)$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
[L_{ab}, L_{cd}] &= \eta_{ac}L_{bd} - \eta_{bc}L_{ad} + \eta_{ad}L_{cb} - \eta_{bd}L_{ca}\,, \\
[L_{ab}, P_c] = \eta_{ac}P_b - \eta_{bc}P_a\,, \qquad & [L_{ab}, K_c] = \eta_{ac}K_b - \eta_{bc}K_a\,, \\
[L_{ab}, D] = [P_a, P_b] &= [K_a, K_b] = 0\,, \\
[P_a, K_b] = 2(\eta_{ab}D + L_{ab})\,, \qquad & [P_a, D] = P_a\,, \quad [K_a, D] = -K_a\,,
\end{aligned} \tag{1.0.1}$$

$a, b = 0, \ldots d-1$, $\eta_{ab} = diag(1, -1 \ldots -1)$. Конформная алгебра может быть реализована векторными полями

$$\begin{aligned}
L_{ab} &= \eta_{ac}x^c\frac{\partial}{\partial x^b} - \eta_{bc}x^c\frac{\partial}{\partial x^a}\,, \\
P_a &= \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad D = x^a\frac{\partial}{\partial x^a}\,, \\
K_a &= 2\eta_{ac}x^c x^b\frac{\partial}{\partial x^b} - \eta_{bc}x^b x^c\frac{\partial}{\partial x^a}\,.
\end{aligned} \tag{1.0.2}$$

L_{ab} и P_a определяют подалгебру Пуанкаре. K_a и D-генераторы специальных конформных преобразований и дилатации, соответственно. Чтобы вложить AdS_d алгебру $o(d-1, 2)$ в d-мерную конформную алгебру $o(d, 2)$, нужно отождествить AdS_d трансляции с суперпозицией трансляций и специальных конформных преобразований конформной алгебры

$$P^a_{AdS_d} = P^a - \lambda^2 K^a\,. \tag{1.0.3}$$

Генераторы $P^a_{AdS_d}$ и L_{ab} образуют AdS_d подалгебру $o(d-1, 2) \subset o(d, 2)$. Таким вложением нарушается явная $o(1, 1)$ дилатационная ковариантность, поскольку смешиваются операторы P^a и K^a, имеющие различную размерность. λ-размерный параметр контракции Вигнера-Инону, который мы отождествляем с обратным радиусом AdS_d.

Алгебра $sp(2M)$ допускает аналогичное описание в терминах генераторов $L_\alpha{}^\beta, P_{\alpha\beta}, K^{\alpha\beta}$ и D, где индексы пробегают от 1 до M и $L_\alpha{}^\beta$ бесследова. Коммутационные соотношения имеют вид

$$[K^{\alpha\beta}, K^{\gamma\delta}] = 0\,, \qquad [P_{\alpha\beta}, P_{\gamma\delta}] = 0\,, \tag{1.0.4}$$

$$[D, P_{\alpha\beta}] = -P_{\alpha\beta}\,, \qquad [D, K^{\alpha\beta}] = K^{\alpha\beta}\,, \qquad [D, L_\alpha{}^\beta] = 0\,, \tag{1.0.5}$$

$$[L_\alpha{}^\beta, P_{\gamma\delta}] = -\delta_\gamma{}^\beta P_{\alpha\delta} - \delta_\delta{}^\beta P_{\alpha\gamma} + \frac{2}{M}\delta_\alpha{}^\beta P_{\gamma\delta}\,, \tag{1.0.6}$$

$$[L_\alpha{}^\beta, K^{\gamma\delta}] = \delta_\alpha{}^\gamma K^{\beta\delta} + \delta_\alpha{}^\delta K^{\beta\gamma} - \frac{2}{M}\delta_\alpha{}^\beta K^{\gamma\delta}\,, \tag{1.0.7}$$

$$[P_{\alpha\beta}, K^{\gamma\delta}] = L_\alpha{}^\delta\delta_\beta{}^\gamma + L_\beta{}^\delta\delta_\alpha{}^\gamma + L_\alpha{}^\gamma\delta_\beta{}^\delta + L_\beta{}^\gamma\delta_\alpha{}^\delta + \frac{4}{M}D(\delta_\alpha{}^\delta\delta_\beta{}^\gamma + \delta_\beta{}^\delta\delta_\alpha{}^\gamma)\,, \tag{1.0.8}$$

$$[L_\alpha{}^\beta, L_\gamma{}^\delta] = \delta_\alpha{}^\delta L_\gamma{}^\beta - \delta_\gamma{}^\beta L_\alpha{}^\delta\,. \tag{1.0.9}$$

Заметим, что обобщенная лоренцева подалгебра, задаваемая генераторами $L_\alpha{}^\beta$, есть sl_M. В полной аналогии с обычной конформной алгеброй, обобщенные трансляции, генерируемые $P_{\alpha\beta}$, образуют абелеву подалгебру $sp(2M)$. Обобщенные специальные конформные преобразования являются дуальной абелевой подалгеброй.

Коммутационные соотношения (1.0.4)-(1.0.9) можно реализовать векторными полями

$$P_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}}\,, \qquad K^{\alpha\beta} = 4X^{\alpha\gamma}X^{\beta\eta}\frac{\partial}{\partial X^{\gamma\eta}}\,, \tag{1.0.10}$$

$$L_\alpha{}^\beta = 2X^{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial X^{\alpha\gamma}} - \frac{2}{M}\delta_\alpha{}^\beta X^{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial X^{\beta\gamma}}\,, \qquad D = X^{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial X^{\beta\gamma}}\,, \tag{1.0.11}$$

где $X^{\alpha\beta} = X^{\beta\alpha}$ координаты на $\mathcal{M}_M$.

Простейший способ убедиться в том, что коммутационные соотношения (1.0.4)-(1.0.9) действительно задают $sp(2M)$ является использование их осцилляторной реализации [27]. Пусть $\hat{a}_\alpha$ и $\hat{b}^\alpha$- осцилляторы со следующими коммутационными соотношениями

$$[\hat{a}_\alpha, \hat{b}^\beta] = \delta_\alpha{}^\beta\,, \qquad [\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta] = 0\,, \qquad [\hat{b}^\alpha, \hat{b}^\beta] = 0\,. \tag{1.0.12}$$

Генераторами $sp(2M)$ являются их все билинейные комбинации

$$\hat{T}_\alpha{}^\beta = \frac{1}{2}\{\hat{a}_\alpha, \hat{b}^\beta\}\,, \qquad \hat{P}_{\alpha\beta} = \hat{a}_\alpha\hat{a}_\beta\,, \qquad \hat{K}^{\alpha\beta} = \hat{b}^\alpha\hat{b}^\beta\,. \tag{1.0.13}$$

Вместо операторов, удобнее использовать звездочную операцию в алгебре полиномов от коммутирующих переменных a_α и b^α вида

$$(f\star g)(a,b) = \frac{1}{\pi^{2M}}\int f(a+u, b+t)g(a+s, b+v)e^{2(s_\alpha t^\alpha - u_\alpha v^\alpha)}\, d^M u\, d^M t\, d^M s\, d^M v\,. \tag{1.0.14}$$

Определенная таким образом операция, часто называемая произведением Мойла, описывает произведение симметризованных (то есть упорядоченных по Вейлю) полиномов от осцилляторов в терминах символов операторов. Интеграл нормирован следующим образом[1]

$$\frac{1}{\pi^{2M}}\int e^{2(s_\alpha t^\alpha - u_\alpha v^\alpha)}\, d^M u\, d^M t\, d^M s\, d^M v = 1\,, \tag{1.0.15}$$

так, что 1 является единицей алгебры. Формула (1.0.14) определяет ассоциативную алгебру с соотношениями

$$[a_\alpha, b^\beta]_\star = \delta_\alpha{}^\beta\,, \qquad [a_\alpha, a_\beta]_\star = 0\,, \qquad [b^\alpha, b^\beta]_\star = 0 \tag{1.0.16}$$

($[a,b]_\star = a\star b - b\star a$). Генераторы $sp(2M)$ в звездочной реализации имеют вид

$$T_\alpha{}^\beta = a_\alpha b^\beta\,, \qquad P_{\alpha\beta} = a_\alpha a_\beta\,, \qquad K^{\alpha\beta} = b^\alpha b^\beta\,, \tag{1.0.17}$$

где $gl(M)$ генераторы $T_\alpha{}^\beta$ раскладываются в сумму “лоренцевых” генераторов $sl(M)$ и “дилатации” $o(1,1)$

$$L_\alpha{}^\beta = a_\alpha b^\beta - \frac{1}{M}\delta_\alpha{}^\beta a_\gamma b^\gamma\,, \qquad D = \frac{1}{2}a_\alpha b^\alpha\,. \tag{1.0.18}$$

Билинейные комбинации осцилляторов удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.0.4)-(1.0.9).

Вложение обобщенной AdS подалгебры в конформную алгебру $sp(2M)$ достигается отождествлением (обобщенных) AdS трансляций с суперпозицией трансляций и специальных конформных преобразований $P^{AdS}_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} + \lambda^2\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}K^{\gamma\delta}$ с некоторой билинейной формой $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Заметим, что сохраняя прежнее число генераторов трансляций, мы сохраняем размерность обобщенного пространства-времени. В [15] было показано, что $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ должна иметь факторизованный вид: $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = V_{\alpha\gamma}V_{\beta\delta}$, где $V_{\alpha\beta}$-некоторая невырожденная антисимметричная форма (таким образом требуется, чтобы M было четным). Далее форма $V_{\alpha\beta}$ будет использована нами для поднятия и опускания индексов, согласно правилу

$$A_\alpha = V_{\beta\alpha}A^\beta\,, \qquad A^\alpha = V^{\alpha\beta}A_\beta\,, \qquad V_{\alpha\beta}V^{\alpha\gamma} = \delta_\beta{}^\gamma\,. \tag{1.0.19}$$

Таким образом, обобщенные AdS трансляции имеют вид

$$P^{AdS}_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} + \lambda^2 V_{\alpha\gamma}V_{\beta\delta}K^{\gamma\delta} = P_{\alpha\beta} + \lambda^2 K_{\alpha\beta}\,. \tag{1.0.20}$$

Коммутационные соотношения для $P^{AdS}_{\alpha\beta}$

$$[P^{AdS}_{\alpha\beta}, P^{AdS}_{\gamma\delta}] = 2\lambda^2(V_{\beta\gamma}L^{AdS}_{\alpha\delta} + V_{\beta\delta}L^{AdS}_{\alpha\gamma} + V_{\alpha\gamma}L^{AdS}_{\beta\delta} + V_{\alpha\delta}L^{AdS}_{\beta\gamma})\,, \tag{1.0.21}$$

[1] Отсутствие мнимой единицы в экспоненте формулы (1.0.14) компенсируется подходящим выбором контура интегрирования в комплексной плоскости.

где $L^{AdS}_{\alpha\beta} = L^{AdS}_{\beta\alpha}$-генераторы $sp(M)$ подалгебры gl_M, сохраняющей симплектическую форму $V_{\alpha\beta}$. Полная обобщенная AdS подалгебра есть $sp(M) \oplus sp(M) \subset sp(2M)$. Ее лоренцева подалгебра $sp^l(M)$ отождествляется с диагональной $sp(M)$, а трансляции с фактором $sp(M) \oplus sp(M)/sp^l(M)$. Заметим, что обобщенная dS алгебра, полученная из (1.0.20) заменой знака $\lambda^2 \to -\lambda^2$, есть $Sp(M, C)^R$. Отметим также, что при $M = 2$ обобщенное пространство анти-де Ситтера тождественно обычному $AdS_3 \sim Sp(2) \times Sp(2)$.

1.0.2 Пространство Фока и $Sp(2M)$ ковариантные уравнения

$sp(2M)$ инвариантные уравнения всех безмассовых полей в трех и четырех измерениях естественным образом описаны в [28, 15] в терминах фоковских расслоений над $\mathcal{M}_M$. Другими словами, рассмотрим функции на $\mathcal{M}_M$, принимающие значения в модуле Фока F

$$|\Phi(b|X)\rangle = C(b|X) \star |0\rangle\langle 0| \,, \tag{1.0.22}$$

где $C(b|X)$-некоторая “производящая функция”

$$C(b|X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} c_{\beta_1 \dots \beta_m}(X) b^{\beta_1} \dots b^{\beta_m} \tag{1.0.23}$$

и $|0\rangle\langle 0|$-фоковский вакуум, определенный соотношениями

$$a_\alpha \star |0\rangle\langle 0| = 0 \,, \qquad |0\rangle\langle 0| \star b^\alpha = 0 \,. \tag{1.0.24}$$

$|0\rangle\langle 0|$ может быть реализован как элемент звездочной алгебры

$$|0\rangle\langle 0| = e^{-2a_\alpha b^\alpha} \,. \tag{1.0.25}$$

Заметим, что фоковский вакуум является постоянным в пространстве-времени оператором проектирования

$$d|0\rangle\langle 0| = 0 \,, \qquad |0\rangle\langle 0| \star |0\rangle\langle 0| = |0\rangle\langle 0| \,, \tag{1.0.26}$$

где d – дифференциал де Рама

$$d = dX^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} \,, \qquad d^2 = 0. \tag{1.0.27}$$

Как показано в [15], соответствующее $Sp(2M)$-ковариантное уравнение в плоском пространстве может быть записано в виде

$$d|\Phi(b|X)\rangle - w_0 \star |\Phi(b|X)\rangle = 0 \,, \tag{1.0.28}$$

где

$$w_0 = \frac{1}{2} dX^{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta \,. \tag{1.0.29}$$

То, что уравнение (1.0.28) действительно описывает все конформные полевые уравнения в $d = 3$ и $d = 4$, было показано в [28] и [15] для случаев $M = 2$ и $M = 4$, соответственно. В данной главе мы рассмотрим общий случай произвольного четного M. Стоит упомянуть, что случаи $M = 8$ и $M = 16$, как указано в [16], соответствуют конформным системам в $d = 6$ и $d = 10$, соответственно.

Реализация с помощью фоковских расслоений делает явным как конформную симметрию системы, так и бесконечномерную симметрию высших спинов. Действительно, пусть w_0 – некоторая 1-форма, принимающая значения в алгебре высших спинов, отождествленной со звездочной алгеброй (то есть алгеброй регулярных функций от осцилляторов действующих на модуль Фока F)

$$w_0(X) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} w_{0\,\beta_1 \ldots \beta_m}{}^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(X) a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_n} b^{\beta_1} \ldots b^{\beta_m} \,, \tag{1.0.30}$$

которая удовлетворяет условию нулевой кривизны

$$dw_0 = w_0 \star \wedge w_0 \,. \tag{1.0.31}$$

Уравнения (1.0.28), (1.0.31) инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\delta w_0 = d\epsilon - [w_0, \epsilon]_\star \,, \tag{1.0.32}$$

$$\delta|\Phi(b|X)\rangle = \epsilon \star |\Phi(b|X)\rangle \,, \tag{1.0.33}$$

где $\epsilon(a, b|X)$-произвольный инфинитезимальный калибровочный параметр. Любое фиксированное вакуумное решение w_0 уравнения (1.0.31) нарушает симметрию высших спинов до подалгебры стабильности с инфинитезимальными параметрами $\epsilon_0(a, b|X)$, удовлетворяющими уравнению

$$d\epsilon_0 - [w_0, \epsilon_0]_\star = 0. \tag{1.0.34}$$

Совместность этого уравнения гарантированна (1.0.31). В результате, (1.0.34) локально имеет чисто калибровочное решение вида

$$w_0(X) = -g^{-1}(X) \star dg(X) \,, \tag{1.0.35}$$

где $g(a, b|X)$ – некоторый обратимый элемент звездочной алгебры. Параметры глобальной симметрии имеют вид

$$\epsilon_0(X) = g^{-1}(X) \star \xi \star g(X) \,, \tag{1.0.36}$$

где произвольный независящий от X элемент звездочной алгебры $\xi = \xi(a,b)$ описывает параметры глобальной симметрии высших спинов и действует на решениях уравнения (1.0.28) (для любого данного w_0). В частности, подалгебра $sp(2M)$, реализованная билинейными комбинациями осцилляторов, является, таким образом, симметрией уравнения (1.0.28).

Аналогично можно решить уравнение (1.0.28) в виде

$$|\Phi(b|X)\rangle = g^{-1} \star |\Phi(b|X_0)\rangle\,, \tag{1.0.37}$$

где $|\Phi(b|X_0)\rangle$ играет роль начальных условий. Эта формула означает то, что модуль Фока $|\Phi(b|X_0)\rangle$ параметризует все ненулевые на полевых уравнениях комбинации производных от динамических полей в точке $X = X_0$. Формула (1.0.37) играет роль ковариантного разложения Тейлора, восстанавливающего общее решение в терминах производных в точке $X = X_0$. Заметим, что модуль Фока не унитарен, поскольку он разлагается в бесконечную сумму конечномерных (тензорных) представлений обобщенной некомпактной алгебры Лоренца $sl_M(\mathbf{R})$. Тем не менее, тот факт, что начальные данные задачи сформулированы в терминах модуля Фока, тесно связан с тем (см., например, [17, 23]), что совокупность унитарных безмассовых представлений, соответствующих данной динамической системе, в $d = 4$ описывается унитарным модулем Фока U, известным как синглетное представление $sp(8)$. (Также хорошо известно, что безмассовые унитарные представления $4d$ конформной алгебры допускают фоковскую реализацию в терминах соответствующих осцилляторов [30].) Как показано в [28, 15], модули U и F связаны друг с другом некоторым неунитарным преобразованием Боголюбова.

Формулы (1.0.35), (1.0.37) играют ключевую роль в нашем анализе. Они позволяют решить уравнения движения явно, при условии, что известна калибровочная функция $g(X)$, соответствующая выбранной связности w_0. Данная программа была проведена для связности плоского пространства в [15]. В этой главе мы найдем семейство таких калибровочных функций, для которого все ненулевые компоненты w_0 принимают значения в обобщенной AdS подалгебре $osp(L|M) \oplus osp(L|M)$ алгебры $osp(2L|2M)$.

1.1 $Sp(M)$ и звездочное произведение

Как было указано в [15], обобщенное AdS пространство гомеоморфно $Sp(M)$. Заметим, что обобщенная конформная группа $Sp(2M)$ не действует глобально на $Sp(M)$, аналогично тому как обычная конформная группа действует на пространстве Минковского преобразованиями Мебиуса, которые имеют сингулярности. Обычное пространство время Минковского является большой клеткой компактифицированного пространства Минковского. Аналогично, обобщенное пространство Минковского является большой клеткой в компактифицированном обобщенном пространстве-времени $\mathcal{M}_M$. Универсальным накрывающим пространством $Sp(M)$ можно считать некоторую деформацию обобщенного пространства Минковского, являющегося большой клеткой $\mathcal{M}_M$.

Группа $Sp(M)$ реализована $M \times M$ матрицами $U_\alpha{}^\beta$, удовлетворяющими соотношениям

$$U_\alpha{}^\beta U_\gamma{}^\delta V^{\alpha\gamma} = V^{\beta\delta}\,, \tag{1.1.1}$$

где $V^{\alpha\beta}$-некоторая невырожденная антисимметричная форма $V^{\alpha\beta} = -V^{\beta\alpha}$ (M-четно). Многообразие $Sp(M)$ – $\frac{M(M+1)}{2}$-мерное и может быть описано локальными координатами $X^{\alpha\beta} = X^{\beta\alpha}$. Простейшая параметризация такова

$$U_\alpha{}^\beta = \left(\exp(\lambda X)\right)_\alpha{}^\beta\,, \tag{1.1.2}$$

где λ – обратный радиус $Sp(M)$, введенный чтобы компенсировать пространственную размерность $X^{\alpha\beta}$. Заметим, что конкретное значение $\lambda \neq 0$ несущественно, пока в теории нет других размерных параметров (например, гравитационной константы). Экспонента в (1.1.2) есть матричная экспонента от матрицы

$$X_\alpha{}^\beta = V_{\gamma\alpha} X^{\gamma\beta}\,. \tag{1.1.3}$$

Легко видеть, что параметризация (1.1.2) удовлетворяет групповому уравнению (1.1.1). Экспоненциальная реализация (1.1.2) дает универсальное накрывающее пространство [31] группы $Sp(M)$ (метаплектическая группа $Mp(M)$), топологически эквивалентное большой клетке пространства $\mathcal{M}_M$ $R^{\frac{M(M+1)}{2}}$.

$Sp(M)$-инвариантно относительно действия $Sp(M) \times Sp(M)$ левыми и правыми сдвигами $Sp(M)$ на себе. Используя осцилляторную реализацию $sp(M) \oplus sp(M) \subset sp(2M)$, можно положить

$$w_0(X) = \omega_{\alpha\beta}(X) a^\alpha b^\beta + h_{\alpha\beta}(X)(a^\alpha a^\beta + \lambda^2 b^\alpha b^\beta)\,, \tag{1.1.4}$$

где “лоренцева связность” $\omega_{\alpha\beta}(X)$ и “репер” $h_{\alpha\beta}(X)$ имеют вид

$$\omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(d(U^{-1})_\alpha{}^\gamma U_{\gamma\beta} + dU_\alpha{}^\gamma (U^{-1})_{\gamma\beta}\right)\,, \tag{1.1.5}$$

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\lambda}\left(dU_\alpha{}^\gamma (U^{-1})_{\gamma\beta} - d(U^{-1})_\alpha{}^\gamma U_{\gamma\beta}\right)\,, \tag{1.1.6}$$

гарантирующий совместность с (1.0.31). В экспоненциальной параметризации (1.1.2) имеем

$$\omega^{\alpha\beta} = \frac{\lambda}{2} dX_{\mu\nu} \left(\int\limits_0^1 \exp(\lambda X t)^{\mu\beta} \exp(\lambda X t)^{\nu\alpha} dt - \int\limits_{-1}^0 \exp(\lambda X t)^{\mu\beta} \exp(\lambda X t)^{\nu\alpha} dt \right) , \quad (1.1.7)$$

$$h^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} dX_{\mu\nu} \int\limits_{-1}^1 \exp(\lambda X t)^{\mu\beta} \exp(\lambda X t)^{\nu\alpha} dt \, , \quad (1.1.8)$$

здесь мы использовали тождество $\delta e^A = \int\limits_0^1 e^{At} \delta A e^{A(1-t)} dt$ верное для любой матрицы A. Как и следовало ожидать, в плоском пределе $\lambda \to 0$ получаем (1.0.29).

Выпишем теперь калибровочную функцию в (1.0.35) для связности (1.1.4)-(1.1.6). Окончательный результат таков

$$g = \frac{1}{\det \left\| \cosh \frac{\lambda X}{2} \right\|} \exp \Big(-\frac{1}{\lambda} \left(\tanh \frac{\lambda X}{2} \right)^{\alpha\beta} (a_\alpha a_\beta + \lambda^2 b_\alpha b_\beta) \Big) \, , \quad (1.1.9)$$

$$g^{-1} = \frac{1}{\det \left\| \cosh \frac{\lambda X}{2} \right\|} \exp \Big(\frac{1}{\lambda} \left(\tanh \frac{\lambda X}{2} \right)^{\alpha\beta} (a_\alpha a_\beta + \lambda^2 b_\alpha b_\beta) \Big) \, . \quad (1.1.10)$$

Эта формула получена следующим образом. Пусть $sp(M)$ реализована в виде билинейных комбинаций осцилляторов α_α, удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[\alpha_\alpha, \alpha_\beta]_* = 2V_{\alpha\beta} \, , \quad (1.1.11)$$

со звездочной операцией вида

$$(f * g)(\alpha) = \frac{1}{\pi^M} \int f(\alpha + u) g(\alpha + v) e^{-u_\alpha v^\alpha} \, d^M u \, d^M v \, . \quad (1.1.12)$$

Рассмотрим элементы звездочной алгебры g_1 и g_2 вида

$$g_1 = r_1 e^{\frac{1}{2} f_1^{\alpha\beta} \alpha_\alpha \alpha_\beta} \, , \qquad g_2 = r_2 e^{\frac{1}{2} f_2^{\alpha\beta} \alpha_\alpha \alpha_\beta} \, . \quad (1.1.13)$$

с некоторыми α-независимыми r_1, r_2, $f_1^{\alpha\beta}$ и $f_2^{\alpha\beta}$. Элементарное вычисление гауссовых интегралов дает

$$g_{1,2} = g_1 * g_2 = r_{1,2} e^{\frac{1}{2} (f_1 \circ f_2)^{\alpha\beta} \alpha_\alpha \alpha_\beta} \, , \quad (1.1.14)$$

где

$$r_{1,2} = \frac{r_1 r_2}{\sqrt{\det \| f_1 f_2 + 1 \|}} \quad (1.1.15)$$

и

$$f_1 \circ f_2 = \frac{1}{1 + f_2 f_1} (1 + f_2) - \frac{1}{1 + f_1 f_2} (1 - f_1) \quad (1.1.16)$$

(с обычным матричным умножением в правой части: $AB \to A_\alpha{}^\gamma B_\gamma{}^\beta$, $\frac{1}{A}B \to (A^{-1})_\alpha{}^\gamma B_\gamma{}^\beta$). Найдем такое отображение

$$g(U) = r(U) e^{\frac{1}{2} f^{\alpha\beta}(U) \alpha_\alpha \alpha_\beta} \tag{1.1.17}$$

группы $Sp(M)$ в звездочную алгебру, что

$$g(U_1) * g(U_2) = g(U_1 U_2) = r(U_1 U_2) e^{\frac{1}{2} f^{\alpha\beta}(U_1 U_2) \alpha_\alpha \alpha_\beta} \,. \tag{1.1.18}$$

Эквивалентно, можно использовать обратное отображение $U(f)$, требуя

$$U(f_1) U(f_2) = U(f_1 \circ f_2) \,. \tag{1.1.19}$$

Как показано в приложении I, закон умножения (1.1.16) требует, чтобы

$$U^{\alpha\beta}(f) = \left(\frac{1+f}{1-f} \right)^{\alpha\beta} \,. \tag{1.1.20}$$

Обратная формула аналогична

$$f^{\alpha\beta}(U) = \left(\frac{U-1}{1+U} \right)^{\alpha\beta} \,. \tag{1.1.21}$$

Предэкспоненциальный множитель имеет вид

$$r(U) = \frac{2^{\frac{M}{2}}}{\sqrt{\det \| U + 1 \|}} \,. \tag{1.1.22}$$

Чтобы получить (1.1.9), нужно использовать (1.1.2) и заметить, что две $sp(M)$ подалгебры алгебры $sp(2M)$ генерируются двумя взаимно коммутирующими наборами осцилляторов

$$\alpha^\pm_\alpha = \frac{a_\alpha}{\sqrt{\lambda}} \pm \sqrt{\lambda} V_{\beta\alpha} b^\beta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (a_\alpha \pm \lambda b_\alpha) \,, \tag{1.1.23}$$

удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[\alpha^\pm_\alpha, \alpha^\pm_\beta]_* = \pm 2 V_{\alpha\beta} \,. \tag{1.1.24}$$

Отображение (1.1.20) имеет ряд интересных свойств. В частности,

$$U^{-1}(f) = U(-f) \,, \tag{1.1.25}$$

$$U(f) = -U^{-1}(-f^{-1}) \,. \tag{1.1.26}$$

Свойство (1.1.25) является следствием того элементарного факта (см., например, [32]), что звездочное произведение (1.1.12) имеет антиавтоморфизм $\rho(g(\alpha)) = g(i\alpha)$, то есть $\rho(g_1)*\rho(g_2) = \rho(g_2*g_1)$. Из (1.1.17) следует, что $\rho(U(f)) = U(-f)$. Естественный групповой антиавтоморфизм имеет вид $\rho(U) = U^{-1}$. Формула (1.1.25) отождествляет антиавтоморфизм ρ звездочной алгебры и группы $Sp(M)$.

Формула (1.1.26) более интересна. Являясь сингулярной для вырожденных $f^{\alpha\beta}$ (в частности для $f^{\alpha\beta} = 0$ и, следовательно, $U = I$), она не имеет глобальной интерпретации в рамках $Sp(M)$. Однако можно ожидать, что это отображение имеет глобальный смысл в $\mathcal{M}_M$, где можно определить инверсию по аналогии с плоским случаем, рассмотренном в [16]

$$I(f) = -f^{-1}\,, \qquad I(U) = -U^{-1}\,. \tag{1.1.27}$$

Формула (1.1.26) обеспечивает совместность этих двух определений друг с другом. Заметим, что определенная таким образом инверсия отображает единичный элемент $Sp(M)$ в центральный элемент $-I$, который не принадлежит связной компоненте единицы $PSp(M) \subset Sp(M)$.

1.2 Произвольные координаты

Калибровочная функция (1.1.9) соответствует экспоненциальной реализации $Sp(M)$, порождая тем самым глобальные координаты, покрывающие всю метаплектическую группу $Mp(M)$. Наш формализм, однако, позволяет получать явный вид вакуумных калибровочных связностей (формы Картана) в произвольных координатах. В самом деле, рассмотрим калибровочную функцию вида

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{\det\|1-\lambda^2 f^2(X)\|}\exp\Big(-f(X)^{\alpha\beta}(a_\alpha a_\beta + \lambda^2 b_\alpha b_\beta)\Big)\,,\\ g^{-1} &= \sqrt{\det\|1-\lambda^2 f^2(X)\|}\exp\Big(f(X)^{\alpha\beta}(a_\alpha a_\beta + \lambda^2 b_\alpha b_\beta)\Big)\,, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

где $f^{\alpha\beta}(X) = f^{\beta\alpha}(X)$ произвольная функция матричных координат $X^{\alpha\beta}$. Связность нулевой кривизны (1.0.35) может быть записана в виде

$$w_0 = -g(-f)\star\Big(dX^{\alpha\beta}\frac{\partial f_1^{\gamma\lambda}}{\partial X^{\alpha\beta}}\frac{\partial}{\partial f_1^{\gamma\lambda}}g(f_1)\Big)\Big|_{f_1=f}\,. \tag{1.2.2}$$

Прямое вычисление дает выражения для "лоренцевой связности" и "репера"

$$h^{\alpha\beta} = dX^{\rho\sigma}\Big(\frac{1}{1-\lambda^2 f^2}\Big)^{\alpha\gamma}\Big(\frac{\partial f_\gamma{}^\lambda}{\partial X^{\rho\sigma}} - \lambda^2 f_\gamma{}^\mu\frac{\partial f_\mu{}^\nu}{\partial X^{\rho\sigma}}f_\nu{}^\lambda\Big)\Big(\frac{1}{1-\lambda^2 f^2}\Big)_\lambda{}^\beta\,, \tag{1.2.3}$$

$$\omega^{\alpha\beta} = 2\lambda^2 dX^{\rho\sigma}\Big(\frac{1}{1-\lambda^2 f^2}\Big)^{\alpha\gamma}\Big(\frac{\partial f_\gamma{}^\mu}{\partial X^{\rho\sigma}}f_\mu{}^\lambda - f_\gamma{}^\mu\frac{\partial f_\mu{}^\lambda}{\partial X^{\rho\sigma}}\Big)\Big(\frac{1}{1-\lambda^2 f^2}\Big)_\lambda{}^\beta\,. \tag{1.2.4}$$

Из этих формул следует, что

$$\omega^{\alpha\beta} = 2h^{\alpha\gamma} f_\gamma{}^\beta - 2f^{\alpha\gamma} h_\gamma{}^\beta + \lambda^2 f^{\alpha\gamma} \omega_\gamma{}^\lambda f_\lambda{}^\beta \,. \tag{1.2.5}$$

Произвольная функция $f^{\alpha\beta}(X)$ параметризует различный выбор координат в $Sp(M)$. Связь с координатами экспоненциальной параметризации, очевидно, имеет вид

$$f(\tilde{X}) = \frac{1}{\lambda}\,\tanh\frac{\lambda X}{2}\,, \tag{1.2.6}$$

что локально дает

$$\sinh\frac{\lambda X}{2} = \frac{\lambda f(\tilde{X})}{\sqrt{1-\lambda^2 f^2(\tilde{X})}}\,, \qquad \cosh\frac{\lambda X}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 f^2(\tilde{X})}}\,. \tag{1.2.7}$$

Формулы (1.2.3) и (1.2.4), таким образом, задают представление для форм Картана в произвольных координатах, связанных с той или иной функцией $f^{\alpha\beta}(X)$.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть $f^{\alpha\beta}(X)$ имеет вид

$$f^{\alpha\beta}(X) = \phi(\det\|X\|)X^{\alpha\beta}\,. \tag{1.2.8}$$

Соответствующие связности имеют вид

$$\begin{aligned} h^{\alpha\beta} = \phi\cdot\Big(\frac{1}{1-\lambda^2\phi^2X^2}\Big)^{\alpha\gamma}(dX_\gamma{}^\lambda - \lambda^2\phi^2 X_\gamma{}^\mu dX_\mu{}^\nu X_\nu{}^\lambda)\Big(\frac{1}{1-\lambda^2\phi^2X^2}\Big)_\lambda{}^\beta + \\ +\tilde{\phi}\cdot dX^{\rho\sigma}(X^{-1})_{\rho\sigma}\Big(\frac{X}{1-\lambda^2\phi^2X^2}\Big)^{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

$$\omega^{\alpha\beta} = 2\lambda^2\phi^2\cdot\Big(\frac{1}{1-\lambda^2\phi^2X^2}\Big)^{\alpha\gamma}(dX_\gamma{}^\mu X_\mu{}^\lambda - X_\gamma{}^\mu dX_\mu{}^\lambda)\Big(\frac{1}{1-\lambda^2\phi^2X^2}\Big)_\lambda{}^\beta, \tag{1.2.10}$$

где

$$\tilde{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial\ln\det\|X\|}\,. \tag{1.2.11}$$

Другой полезный пример получается из

$$f^{\pm}_{\alpha\beta}(X) = \Big(\frac{X}{1\mp\sqrt{1-\lambda^2X^2}}\Big)_{\alpha\beta}\,. \tag{1.2.12}$$

Соответствующая калибровочная функция имеет вид

$$g^{\pm} = \det\left\|\frac{1+\lambda X\pm\sqrt{1-\lambda^2X^2}}{\lambda X}\right\|\exp\left(-\Big(\frac{X}{1\mp\sqrt{1-\lambda^2X^2}}\Big)^{\alpha\beta}(a_\alpha a_\beta+\lambda^2 b_\alpha b_\beta)\right)\,. \tag{1.2.13}$$

В этих “стереографических” координатах “репер” имеет следующий простой вид

$$h^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2X^2}}\Big)^{\alpha\gamma} dX_\gamma{}^\lambda\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2X^2}}\Big)_\lambda{}^\beta\,. \tag{1.2.14}$$

Сравним теперь эту формулу с результатами из [28, 29], описывающими безмассовые поля в $AdS_3(M=2)$ и $AdS_4(M=4)$.

Рассмотрим сначала случай $M=2$. Используя, например, g^+, из (1.2.13) получаем

$$g=\frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\exp\left(-\frac{1}{1+\sqrt{z}}x^{\alpha\beta}(a_\alpha a_\beta+\lambda^2 b_\alpha b_\beta)\right)\,, \tag{1.2.15}$$

$$g^{-1}=\frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\exp\left(\frac{1}{1+\sqrt{z}}x^{\alpha\beta}(a_\alpha a_\beta+\lambda^2 b_\alpha b_\beta)\right)\,, \tag{1.2.16}$$

где $z=1+\frac{1}{2}\lambda^2 x_{\alpha\beta}x^{\alpha\beta}$. Репер и лоренцева связность имеют вид

$$h_{\alpha\beta}=\frac{1}{2z}dx_{\alpha\beta}\,,\qquad \omega_{\alpha\beta}=\frac{1}{2z}(dx_\alpha{}^\gamma x_{\gamma\beta}+dx_\beta{}^\gamma x_{\gamma\alpha}). \tag{1.2.17}$$

При получении этого результата, который воспроизводит [28], мы воспользовались тем, что для $M=2$, любая антисимметричная матрица пропорциональна $V_{\alpha\beta}$ и, следовательно, любой полином от матричных координат $P(x)^{\alpha\beta}$ разлагается в сумму симметричной части $P_S(x_{\mu\nu}x^{\mu\nu})x^{\alpha\beta}$ и антисимметричной $P_A(x_{\mu\nu}x^{\mu\nu})V^{\alpha\beta}$. Из (1.2.17) следует, что метрический тензор имеет вид

$$g_{mn}=\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,n}h^{\alpha\beta}{}_{,m}=\frac{1}{4}\frac{\eta_{mn}}{(1+\lambda^2 x_k x^k)^2}\,, \tag{1.2.18}$$

где

$$x_n=\sigma_n{}^{\alpha\beta}x_{\alpha\beta}\,,\qquad x_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}{}^n x_n\,, \tag{1.2.19}$$

и $\sigma_n{}^{\alpha\beta}$ – набор базисных симметричных действительных матриц, нормированных так, что

$$\sigma_n{}^{\alpha\beta}\sigma_{m\alpha\beta}=2\eta_{mn}\,, \tag{1.2.20}$$

где η_{mn} – плоская метрика Минковского.

В случае $d=4$, мы вкладываем AdS_4 пространство-время в $\mathcal{M}_4$ следующим образом

$$X^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & x^{\bar\alpha\dot{\bar\beta}}\\ x^{\bar\beta\dot{\bar\alpha}} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\,, \tag{1.2.21}$$

где $\bar\alpha,\bar\beta=1,2$, $\dot{\bar\alpha},\dot{\bar\beta}=3,4$, и $x^{\bar\alpha\dot{\bar\beta}}$-локальные координаты на AdS_4, которые связаны с векторными x^n $(n=0\dots3)$ с помощью матриц Паули $\sigma_n{}^{\bar\alpha\dot{\bar\beta}}=(I,\sigma_1{}^{\bar\alpha\dot{\bar\beta}}\dots\sigma_3{}^{\bar\alpha\dot{\bar\beta}})$

$$x^n=\sigma^n{}_{\bar\alpha\dot{\bar\beta}}x^{\bar\alpha\dot{\bar\beta}}\,,\quad x^{\bar\alpha\dot{\bar\beta}}=\frac{1}{2}x_n\sigma^{n\bar\alpha\dot{\bar\beta}}\,,\quad \sigma_{n\bar\alpha\dot{\bar\beta}}\sigma_m{}^{\bar\alpha\dot{\bar\beta}}=2\eta_{mn}\,. \tag{1.2.22}$$

Калибровочная функция и гравитационные поля, возникающие из (1.2.13) и (1.2.14), имеют вид

$$g=\left(\frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^2\exp\left(-\frac{1}{1+\sqrt{z}}x^{\bar\alpha\dot{\bar\beta}}(a_{\bar\alpha}a_{\dot{\bar\beta}}+\lambda^2 b_{\bar\alpha}b_{\dot{\bar\beta}})\right)\,, \tag{1.2.23}$$

$$h_{\bar\alpha\dot\beta} = \frac{1}{2z} dx_{\bar\alpha\dot\beta}\,, \tag{1.2.24}$$

$$\omega_{\bar\alpha\bar\beta} = \frac{1}{2z}(dx_{\bar\alpha}{}^{\dot{\bar\gamma}} x_{\bar\beta\dot\gamma} + dx_{\bar\beta}{}^{\dot{\bar\gamma}} x_{\bar\alpha\dot\gamma})\,, \qquad \bar\omega_{\dot\alpha\dot\beta} = \frac{1}{2z}(dx^{\bar\gamma}{}_{\dot\alpha} x_{\bar\gamma\dot\beta} + dx^{\bar\gamma}{}_{\dot\beta} x_{\bar\gamma\dot\alpha})\,, \tag{1.2.25}$$

где $z = 1 + \frac{1}{2}\lambda^2 x_{\bar\alpha\dot\beta} x^{\bar\alpha\dot\beta} = 1 + \lambda^2 x_n x^n$. Эти гравитационные поля в AdS_4 совпадают с полями, найденными в [29].

1.3 Симметрии

Фиксируя некоторое вакуумное решение w_0 из (1.0.31), мы нарушаем локальную симметрию высших спинов до глобальной симметрии с параметром $\epsilon_0(a, b|X)$, удовлетворяющим (1.0.34). Если вакуумное решение w_0 выбрано в калибровочном виде (1.0.35) с некоторой калибровочной функцией g, то легко найти калибровочный параметр оставшейся глобальной симметрии. Действительно, пусть производящий параметр $\xi(a, b; \mu, \eta)$ в (1.0.36) имеет вид

$$\xi = \xi_0 \exp(a_\alpha \mu^\alpha - b^\alpha \eta_\alpha)\,, \tag{1.3.1}$$

где ξ_0 – инфинитезимальная константа, а μ^α и η_α – постоянные параметры. Произвольная симметрия с полиномиальными параметрами может быть получена дифференцированием ξ по μ^α и η_α. Подстановка (1.1.9) в (1.0.36) дает

$$\epsilon_0(a, b; \mu, \eta|X) = g^{-1} \star \xi \star g = \xi_0 \exp(a_\alpha \hat\mu^\alpha - b^\alpha \hat\eta_\alpha)\,, \tag{1.3.2}$$

где

$$\hat\mu^\alpha = \cosh(\lambda X)^{\alpha\beta}\mu_\beta - \frac{\sinh(\lambda X)^{\alpha\beta}}{\lambda}\eta_\beta\,, \quad \hat\eta^\alpha = \cosh(\lambda X)^{\alpha\beta}\eta_\beta - \lambda \cdot \sinh(\lambda X)^{\alpha\beta}\mu_\beta. \tag{1.3.3}$$

Согласно (1.2.7), в произвольных координатах, связанных с функцией $f^{\alpha\beta}(X)$ раздела 1.2, имеем

$$\hat\mu_\alpha = \Big(\frac{1+\lambda^2 f^2(X)}{1-\lambda^2 f^2(X)}\Big)_\alpha{}^\beta \mu_\beta - \Big(\frac{2f(X)}{1-\lambda^2 f^2(X)}\Big)_\alpha{}^\beta \eta_\beta\,, \tag{1.3.4}$$

$$\hat\eta_\alpha = \Big(\frac{1+\lambda^2 f^2(X)}{1-\lambda^2 f^2(X)}\Big)_\alpha{}^\beta \eta_\beta - \lambda^2 \Big(\frac{2f(X)}{1-\lambda^2 f^2(X)}\Big)_\alpha{}^\beta \mu_\beta\,. \tag{1.3.5}$$

Преобразования глобальной симметрии для производящей функции высших спинов

$$\delta|\Phi(b|X)\rangle \equiv \epsilon_0 \star |\Phi(b|X)\rangle = \xi_0 \exp(-\hat\eta_\alpha b^\alpha + \frac{1}{2}\hat\eta^\alpha \hat\mu_\alpha) \cdot C(b + \hat\mu|X) \star |0\rangle\langle 0| \tag{1.3.6}$$

дает

$$\delta C(b|X) = \xi_0 C(b+\hat{\mu}|X)\exp\left(\frac{1}{2}\hat{\eta}^\alpha\hat{\mu}_\alpha - b^\alpha\hat{\eta}_\alpha\right). \tag{1.3.7}$$

Динамические поля отождествляются со скаляром $c(X) = C(0|X)$ и s-вектором $c_\alpha(X) = \frac{\partial}{\partial b^\alpha}C(b|X)\Big|_{b=0}$ в разложении (1.0.23). (Все другие поля в $C(b|X)$ выражаются через производные от динамических полей [15].) Их законы преобразования имеют вид

$$\delta c(X) = \xi_0 C(\hat{\mu}|X)\exp(\frac{1}{2}\hat{\eta}^\alpha\hat{\mu}_\alpha)\,, \tag{1.3.8}$$

$$\delta c_\alpha(X) = \xi_0\Big(\frac{\partial}{\partial b^\alpha}C(b+\hat{\mu}|X)\Big|_{b=0} - \hat{\eta}_\alpha C(\hat{\mu}|X)\Big)\exp(\frac{1}{2}\hat{\eta}^\alpha\hat{\mu}_\alpha)\,. \tag{1.3.9}$$

Дифференцируя по параметрам μ^α и η_α и полагая затем их равными нулю, получаем явные выражения для преобразований симметрии высших спинов с произвольными полиномиальными по осцилляторам a и b параметрами симметрии $\epsilon_0(a,b|X)$. В частности, закон преобразований с билинейными по осцилляторам параметрами воспроизводит $Sp(2M)$ обобщенные конформные преобразования в обобщенном AdS пространстве-времени $Sp(M)$. Подчеркнем, что явные выражения для генераторов симметрий, которые сразу получаются из формулы (1.3.2), могут быть довольно громоздкими.

1.4 Светоподобные решения

Зная калибровочную функцию g, можно решить уравнение (1.0.28) на безмассовые поля с помощью (1.0.37). Рассмотрим основные светоподобные решения, порожденные начальными данными вида

$$C(b|0) = C_0\exp(\varkappa_\alpha b^\alpha)\,, \tag{1.4.1}$$

где C_0 – произвольная константа и $\varkappa^\alpha$ некоторый постоянный спинор. Согласно (1.0.22), фоковское представление начальных данных имеет вид

$$|\Phi(b|0)\rangle = C_0\exp(\varkappa_\alpha b^\alpha)\star|0\rangle\langle 0|. \tag{1.4.2}$$

Таким образом, решение свободных уравнений, описывающих светоподобные решения, получаем в следующем виде

$$|\Phi(b|X)\rangle = g^{-1}(X)\star|\Phi(b|0)\rangle = \frac{C_0}{\det\left\|\cosh\frac{\lambda X}{2}\right\|}e^{\frac{1}{\lambda}\left(\tanh\frac{\lambda X}{2}\right)^{\alpha\beta}(a_\alpha a_\beta+\lambda^2 b_\alpha b_\beta)}\star e^{\varkappa_\alpha b^\alpha}\star e^{-2a_\alpha b^\alpha}\,. \tag{1.4.3}$$

Вычисление гауссовых интегралов дает следующий результат

$$C(b|X) = \frac{C_0}{\sqrt{\det \|\cosh \lambda X\|}} \exp\left(t^{\alpha\beta}(\lambda^2 b_\alpha b_\beta + \varkappa_\alpha \varkappa_\beta) + p_\beta{}^\alpha \varkappa_\alpha b^\beta\right), \tag{1.4.4}$$

где используются обозначения

$$t_\alpha{}^\beta = \left(\tfrac{\tanh(\lambda X)}{2\lambda}\right)_\alpha{}^\beta, \qquad p_\alpha{}^\beta = (\cosh^{-1}(\lambda X))_\alpha{}^\beta, \tag{1.4.5}$$

или, эквивалентно, из (1.2.7)

$$t_\alpha{}^\beta = \left(\frac{f(X)}{1+\lambda^2 f^2(X)}\right)_\alpha{}^\beta, \qquad p_\alpha{}^\beta = \left(\frac{1-\lambda^2 f^2(X)}{1+\lambda^2 f^2(X)}\right)_\alpha{}^\beta. \tag{1.4.6}$$

Подчеркнем, что, согласно [15, 16], для частного случая $M = 4$ полученные выражения описывают решения безмассовых уравнений произвольного спина, найденные в [29]. Используя (1.2.23), эти решения принимают вид

$$C(b|x) = z \exp\left(\frac{x^{\bar\alpha\dot{\bar\beta}}}{2}(\varkappa_{\bar\alpha}\varkappa_{\dot{\bar\beta}} + \lambda^2 b_{\bar\alpha} b_{\dot{\bar\beta}}) + \sqrt{z}\varkappa_\alpha b^\alpha\right). \tag{1.4.7}$$

В случае $M = 2$ мы получаем решения AdS_3 безмассовых уравнений, обсуждавшихся в [28]

$$C(b|x) = \sqrt{z} \exp\left(\frac{x^{\alpha\beta}}{2}(\varkappa_\alpha\varkappa_\beta + \lambda^2 b_\alpha b_\beta) + \sqrt{z}\varkappa_\alpha b^\alpha\right). \tag{1.4.8}$$

Здесь мы использовали калибровочную функцию (1.2.15).

Для динамических полей получаем

$$c(X) = C_0 \sqrt{\det \left\| \frac{1-\lambda^2 f^2(X)}{1+\lambda^2 f^2(X)} \right\|} \exp(t^{\alpha\beta}\varkappa_\alpha\varkappa_\beta), \tag{1.4.9}$$

$$c_\alpha(X) = C_0 \sqrt{\det \left\| \frac{1-\lambda^2 f^2(X)}{1+\lambda^2 f^2(X)} \right\|} p_\alpha{}^\beta \varkappa_\beta \exp(t^{\alpha\beta}\varkappa_\alpha\varkappa_\beta). \tag{1.4.10}$$

Подстановка ϵ_0 в (1.0.33) дает преобразование решений (1.4.3) под действием глобальной симметрии высших спинов (1.4.3)

$$\delta C(b|X) = C_0\xi_0 \sqrt{\det \left\| \frac{1-\lambda^2 f^2(X)}{1+\lambda^2 f^2(X)} \right\|} \exp\Big(t^{\alpha\beta}\lambda^2(b_\alpha + \hat\mu_\alpha)(b_\beta + \hat\mu_\beta) + \\ t^{\alpha\beta}\varkappa_\alpha\varkappa_\beta + p_\beta{}^\alpha\varkappa_\alpha(b^\beta + \hat\mu^\beta) - \hat\eta_\alpha(b^\alpha + \frac{1}{2}\hat\mu^\alpha)\Big). \tag{1.4.11}$$

Плоский предел $\lambda \to 0$ соответствует

$$\delta C(b|X) = C_0\xi_0 \exp\Big(\frac{1}{2}X^{\alpha\beta}(\varkappa_\alpha\varkappa_\beta - 2\varkappa_\alpha\eta_\beta + \eta_\alpha\eta_\beta) + \\ + b^\alpha(\varkappa_\alpha - \eta_\alpha) + \varkappa_\alpha\mu^\alpha + \frac{1}{2}\mu_\alpha\eta^\alpha\Big). \tag{1.4.12}$$

Для динамических полей получаем плоско-волновые решения

$$c^{plane}(X) = C_0 e^{\frac{1}{2}X_{\alpha\beta}\varkappa^\alpha\varkappa^\beta}\,, \qquad c^{plane}_\alpha(X) = C_0\varkappa_\alpha e^{\frac{1}{2}X_{\alpha\beta}\varkappa^\alpha\varkappa^\beta} \tag{1.4.13}$$

с твисторным “волновым вектором” $K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varkappa_\alpha\varkappa_\beta$.

Глобальные симметрии, отвечающие найденным плоско-волновым решениям, удовлетворяют уравнению

$$\delta_{\epsilon_0}|\Phi(b|X)\rangle = 0\,. \tag{1.4.14}$$

Используя (1.3.2), легко видеть, что это условие решается любым параметром вида

$$\xi = f(a,b)\star(\rho^\alpha a_\alpha)\,, \tag{1.4.15}$$

где ρ – произвольный параметр, такой что $\rho^\alpha\varkappa_\alpha = 0$ и $f(a,b)$ – произвольная функция. Действительно, согласно (1.0.37)

$$\delta_{\epsilon_0}|\Phi(b|X)\rangle = g^{-1}\star\xi\star C(b|0)\star|0\rangle\langle 0| = g^{-1}\star f\star(\rho^\alpha a_\alpha)\star e^{\varkappa_\alpha b^\alpha}\star|0\rangle\langle 0| = 0\,. \tag{1.4.16}$$

1.5 Суперрасширение

Формализм звездочной алгебры имеет прямое обобщение на суперсимметричный случай $OSp(\mathcal{L}|2M)$, где $\mathcal{L}$ – произвольное натуральное число. Чтобы описать супералгебру $osp(\mathcal{L}|2M)$, введем клиффордовы элементы ψ_i $(i = 1\ldots L)$, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям

$$\{\psi_i, \psi_j\}_* = \eta_{ij}\,, \tag{1.5.1}$$

где $\eta_{ij} = \eta_{ji}$ – некоторая невырожденная симметричная форма. Клиффордову звездочную операцию в (1.5.1) определим следующим образом

$$(f*g)(\psi) = \frac{1}{2^L}\int f(\psi+\phi)g(\psi+\chi)e^{-2\chi^i\phi_i}d^L\phi d^L\chi\,, \tag{1.5.2}$$

(см., например, [32]), где χ_i и ϕ_i – антикоммутирующие переменные. Суперзаряды

$$Q_{i\alpha} = a_\alpha\psi_i\,, \qquad S^\alpha_i = b^\alpha\psi_i \tag{1.5.3}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\{Q_{i\alpha}, Q_{i\beta}\}_* = \eta_{ij}P_{\alpha\beta}\,, \qquad \{S^\alpha_i, S^\beta_j\}_* = \eta_{ij}K^{\alpha\beta}\,. \tag{1.5.4}$$

Пусть грассманновы нечетные координаты $\theta^{i\alpha}$ связаны с Q-супергенераторами. Удобно потребовать, чтобы дифференциалы $d\theta^{i\alpha}$ антикоммутировали с $dX^{\alpha\beta}$ и $\theta^{i\alpha}$.

Легко видеть [15], что калибровочная функция

$$g = e^{-X^{\alpha\beta}a_\alpha a_\beta - \theta^{i\alpha}a_\alpha\psi_i} \tag{1.5.5}$$

воспроизводит плоскую вакуумную суперформу

$$w_0 = \Big(dX^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}d\theta^{i\alpha}\theta_i{}^\beta\Big)P_{\alpha\beta} + d\theta^{i\alpha}Q_{i\alpha}\,. \tag{1.5.6}$$

Левый модуль Фока $|\Phi(b,\psi^+|X,\theta)\rangle$ удовлетворяет $osp(L|2M)$ суперсимметричному уравнению

$$(d - w_0)\star|\Phi(b,\psi^+|X,\theta)\rangle = 0\,, \tag{1.5.7}$$

где, помимо (1.0.26), суперсимметричный вакуум Фока $|0\rangle\langle 0|$ анигилируется $\frac{1}{2}L$ (в случае четного L) или $\frac{1}{2}(L-1)$ (в случае нечетного L) клиффордовыми операторами уничтожения ψ^- и, для нечетного L, является собственным вектором центрального элемента $\Psi^L = \psi_1\ldots\psi_L$

$$\Psi^L\star|0\rangle\langle 0| = \pm|0\rangle\langle 0|\,.$$

Рассмотрим теперь динамику свободных полей в обобщенном AdS суперпространстве. Соответствующая алгебра суперсимметрии есть $osp(\mathcal{L},M)\oplus osp(\mathcal{L},M)$, а суперпространство – $OSp(\mathcal{L},M)$. Для описания вакуумных полей (то есть форм Картана) в этом пространстве мы следуем той же процедуре, что и для $Sp(M)$.

Супергруппа $OSp(\mathcal{L}|M)$ реализована $(M+\mathcal{L})\times(M+\mathcal{L})$ матрицами $U_A{}^B$, где $A=(\alpha,i)(\alpha=1\ldots M, i=1\ldots\mathcal{L})$, удовлетворяющими групповому условию

$$U_A{}^B U_C{}^D\Omega^{AC} = \Omega^{BD}\,, \tag{1.5.8}$$

где $\Omega^{AB} = -(-1)^{\pi_A\pi_B}\Omega^{BA}$ и

$$\pi_A = \begin{cases} 1\,,\ A=i \\ 0\,,\ A=\alpha \end{cases}.$$

Ее можно описать локальными суперкоординатами $X^{AB} = (-1)^{\pi_A\pi_B}X^{BA}$ с помощью экспоненциальной параметризации

$$U_A{}^B = \exp(\lambda X)_A{}^B\,. \tag{1.5.9}$$

Введем суперосцилляторы a_A, b^A, удовлетворяющие (анти)коммутационным соотношениям

$$a_A\star b^B - (-1)^{\pi_A\pi_B}b^B\star a_A = \delta_A{}^B\,, \tag{1.5.10}$$

с операцией звездочного умножения

$$(f\star g)(a,b|X) = \frac{1}{2^{2L}\pi^M}\int f(a+u,b+t)g(a+s,b+v)e^{2(t^As_A - v^Au_A)}dudtdsdv\,, \tag{1.5.11}$$

где статистика переменных интегрирования определена следующим образом

$$u_A u_B = (-1)^{\pi_A \pi_B} u_B u_A \,.$$

Мера интегрирования выбрана так, что 1 является единичным элементом звездочной алгебры (1.5.11).

Используя осцилляторную реализацию алгебры $osp(\mathcal{L}|M) \oplus osp(\mathcal{L}|M) \subset osp(2\mathcal{L}|2M)$, можно положить

$$w_0 = \omega^{AB} a_B b_A + h^{AB}(a_B a_A + \lambda^2 b_B b_A) \,. \tag{1.5.12}$$

Анализ аналогичный несуперсимметричному случаю приводит к следующему виду суперсимметричной калибровочной функции

$$g = \sqrt{\mathrm{sdet}\|1 - \lambda^2 f^2(X)\|} \exp\Big(- f^{AB}(X)(a_B a_A + \lambda^2 b_B b_A)\Big) \tag{1.5.13}$$

и дает “лоренцеву связность” ω_{AB} и “репер” h_{AB} вида

$$\omega_{AB} = \frac{1}{2}(dU_A{}^C (U^{-1})_{CB} + d(U^{-1})_A{}^C U_{CB}) \,, \tag{1.5.14}$$

$$h_{AB} = \frac{1}{4\lambda}(dU_A{}^C (U^{-1})_{CB} - d(U^{-1})_A{}^C U_{CB}) \,, \tag{1.5.15}$$

где

$$U_A{}^B = \Big(\frac{1+\lambda f(X)}{1-\lambda f(X)}\Big)_A{}^B \,. \tag{1.5.16}$$

Связь между h_{AB} и ω_{AB} аналогична (1.2.5)

$$\omega_{AB} = 2h_A{}^C f_{CB} - 2f_A{}^C h_{CB} + \lambda^2 f_A{}^C \omega_C{}^D f_{DB} \,. \tag{1.5.17}$$

Приведем список калибровочных функций и соответствующие формы Картана в различных координатах

1. Экспоненциальная параметризация (1.5.9)

$$g = \frac{1}{\mathrm{sdet}\|\cosh\frac{\lambda X}{2}\|} \exp\Big(- \Big(\tanh\frac{\lambda X}{2}\Big)^{AB} (a_B a_A + \lambda^2 b_B b_A)\Big) \,, \tag{1.5.18}$$

$$\omega_{AB} = \frac{\lambda}{2}\Big(\int\limits_0^1 \exp(\lambda X t)_A{}^C dX_C{}^D \exp(\lambda X t)_{DB} dt - \int\limits_{-1}^0 \exp(\lambda X t)_A{}^C dX_C{}^D \exp(\lambda X t)_{DB} dt\Big) \,, \tag{1.5.19}$$

$$h_{AB} = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^1 \exp(\lambda X t)_A{}^C dX_C{}^D \exp(\lambda X t)_{DB} dt \tag{1.5.20}$$

2. $f^{AB} = \phi(\mathrm{sdet}\|X\|)X^{AB}$

$$g = \sqrt{\mathrm{sdet}\|1 - \lambda^2\phi^2 \cdot X^2\|}\exp\Big(- \phi X^{AB}(a_B a_A + \lambda^2 b_B b_A)\Big)\,, \tag{1.5.21}$$

$$h_{AB} = \phi \cdot \Big(\frac{1}{1-\lambda^2\phi^2X^2}\Big)_A{}^C(dX_C{}^D - \lambda^2\phi^2 X_C{}^M dX_M{}^N X_N{}^D)\Big(\frac{1}{1-\lambda^2\phi^2X^2}\Big)_{DB} - \\ -\tilde{\phi}\cdot\Big(\frac{X}{1-\lambda^2\phi^2X^2}\Big)_{AB}(X^{-1})_M{}^N dX_N{}^M\,,$$

$$\omega_{AB} = 2\lambda^2\phi^2 \cdot \Big(\frac{1}{1-\lambda^2\phi^2X^2}\Big)_A{}^C(dX_C{}^M X_M{}^D - X_C{}^M dX_M{}^D)\Big(\frac{1}{1-\lambda^2\phi^2X^2}\Big)_{DB}\,, \tag{1.5.22}$$

где

$$\tilde{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial \ln \mathrm{sdet}\|X\|}\,. \tag{1.5.23}$$

3. Стереографические координаты $f^{AB}(X) = \Big(\frac{X}{1\mp\sqrt{1-\lambda^2X^2}}\Big)^{AB}$

$$g^{\pm} = \sqrt{\mathrm{sdet}\|1 - \lambda^2 f^2(X)\|}\exp\Big(- \Big(\frac{X}{1\mp\sqrt{1-\lambda^2X^2}}\Big)^{AB}(a_B a_A + \lambda^2 b_B b_A)\Big)\,, \tag{1.5.24}$$

$$h_{AB} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2X^2}}\Big)_A{}^C dX_C{}^D\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2X^2}}\Big)_{DB}\,. \tag{1.5.25}$$

В суперсимметричном случае, закон преобразования симметрии высших спинов для производящей функции $C(b|X)$ с инфинитезимальным параметром

$$\xi = \xi_0 \exp(\mu^A a_A - b^A\eta_A)$$

аналогичен (1.3.7)

$$\delta C(b|X) = C(b + \hat{\mu}|X)\exp\Big(- (b^A + \frac{1}{2}\hat{\mu}^A)\hat{\eta}_A\Big)\,, \tag{1.5.26}$$

где

$$\hat{\mu}^A = \cosh(\lambda X)^{AB}\mu_B - \frac{\sinh(\lambda X)^{AB}}{\lambda}\eta_B\,, \quad \hat{\eta}^A = \cosh(\lambda X)^{AB}\eta_B - \lambda\cdot\sinh(\lambda X)^{AB}\mu_B\,. \tag{1.5.27}$$

Оставшаяся часть анализа непосредственно переносится на динамику в обобщенном суперпространстве. Также, зная левоинвариантные формы, элементарно выписывается действие мировой линии частицы (подробнее см., например, [23, 24, 15]). Лагранжиан мировой линии частицы, предложенный в [15], имеет вид

$$L = \dot{X}^{AB} w_{0AB}(a, b|X) + a_A\dot{b}^A\,, \tag{1.5.28}$$

где $dX^{AB}w_{0AB}(a,b|X) = w_0(a,b|X)$ – вакуумная 1-форма, удовлетворяющая уравнению нулевой кривизны (1.0.31), и точка означает производную по параметру мировой линии. Применяя теорему Стокса и используя (1.0.31) действие частицы (1.5.28) может быть переписано в струнной форме как интеграл по двумерной поверхности, ограниченной траекторией частицы и параметризованной σ^l

$$S = \int_{\Sigma^2} (w_0(a,b|X) \star \wedge w_0(a,b|X) + da_A \wedge db^A + \\ +(da_A \frac{\partial}{\partial a_A} + db^A \frac{\partial}{\partial b^A}) \wedge w_0(a,b|X))\,, \tag{1.5.29}$$

где обратное преобразование определено как обычно

$$w_0(a,b|X) = d\sigma^l \frac{\partial X^{AB}}{\partial \sigma^l} w_{0AB}(a,b|X), \quad da_A = d\sigma^l \frac{\partial a_A}{\partial \sigma^l}, \quad db^A = d\sigma^l \frac{\partial b^A}{\partial \sigma^l}\,. \tag{1.5.30}$$

Проблема вычисления суперформ Картана в $osp(1|2M)$ суперпространстве была рассмотрена в [24], где был найден билинейный по фермионным координатам вид суперформ Картана в бозонном секторе. Заметим, что формализм звездочной алгебры упрощает некоторые вычислительные проблемы, сводя их к вычислению элементарных гауссовых интегралов.

1.6 Заключительные замечания

В данной главе было показано, как формализм звездочной алгебры может быть применен к вычислению вакуума полей обобщенного AdS пространства, связанного с $sp(M) \oplus sp(M)$ подалгеброй обобщенной конформной симметрии $Sp(2M)$, предложенной в [16]. Метод универсален и также хорошо работает в суперсимметричном $OSp(\mathcal{L}, M)$ случае с произвольными M и $\mathcal{L}$. Показано, что формализм звездочной алгебры весьма эффективен для решения свободных полевых уравнений в нетривиальных (обобщенно конформно плоских) геометриях в $\mathcal{M}_M$ и вычисления форм Картана в произвольных координатах. Метод может быть применен как для формулировки динамики (супер)частиц, так и для построения (супер)струнных действий в М-теории.

Результаты данной главы получены в работе [100].

Глава 2

БТЗ черная дыра как решение в калибровочной теории полей высших спинов в трехмерном пространстве-времени

В этой главе рассматривается черная дыра в трехмерном пространстве анти–де Ситтера (БТЗ черная дыра) в рамках развернутой формулировки. Показано, что БТЗ черная дыра является точным решением калибровочной теории полей высших спинов в трехмерном пространстве-времени. Используя формализм звездочной алгебры, лежащей в основе теории высших спинов, найдены решения для безмассовых полей в метрике черной дыры. Обнаружено, что при специальных значениях БТЗ параметров часть симметрий, связанных со старшими производными, остается ненарушенной.

Важное отличие (2+1)-мерной теории гравитации [34, 35, 36, 37, 38] от теорий в более высоком числе измерений заключается в том, что вакуумная теория является топологической, а значит, не описывает никаких локальных степеней свободы. В [39, 40] было показано, что (2+1)-мерная теория гравитации эквивалентна $SL(2|\mathbb{R})\times SL(2|\mathbb{R})$ калибровочной теории Черна-Саймонса, калибровочный потенциал которой описывает лоренцеву связность и тетраду. Такая формулировка позволяет рассматривать диффеоморфизмы общей теории относительности как калибровочные преобразования, что существенно упрощает квантовый анализ [41].

В трех измерениях тензор Римана полностью выражается через тензор Риччи. Таким образом, из условия $R_{mn} = 0$ следует, что $R_{mnpq} = 0$, то есть, любое вакуумное решение локально является пространством Минковского. Аналогично, любое вакуумное решение уравнений Эйнштейна с отрицательным космологическим членом локально эквивалентно AdS_3.

Решение типа черной дыры в пространстве AdS_3 было найдено в [42]. В работе [43] было показано, что в (2+1) измерениях в отсутствие отрицательной космологической постоянной не существует решений с ненулевыми горизонтами событий.

По своим свойствам решение БТЗ во многом аналогично решению Керра в четырех измерениях, что дает хорошую возможность для изучения физики черных дыр на более простом примере. Однако, важное отличие заключается в том, что у БТЗ черной дыры отсутствует сингулярность в кривизне [44]. Типичное поведение геодезических диктуется топологической особенностью решения, которое локально изоморфно AdS_3. Как было показано в [44], БТЗ решение можно получить факторизацией AdS_3 по дискретной подгруппе симметрий.

В виду того, что БТЗ решение имеет нулевую $o(2,2)$ кривизну, оно также является и точным решением нелинейной калибровочной теории высших спинов [45, 46], которая в отсутствие материальных полей, эквивалентна теории Черна-Саймонса для трехмерной алгебры высших спинов, содержащей подалгебру $o(2,2) \sim sp(2) \oplus sp(2)$. В настоящее время, помимо самого пространства AdS, известно всего несколько точных решений нелинейной теории высших спинов. Одно из таких трехмерных лоренц-инвариантных решений найдено в [46], а его обобщение на случай четырех измерений получено в [33]. К сожалению, их физическая интерпретация по-прежнему отсутствует, несмотря на то, что они, по-видимому, играют ключевую роль в теории, являясь базовыми решениями для применения техники интегрирующего потока [46]. Недавно в статье Сезгина и Сандела [47] были найдены новые точные решения, которые могут допускать интерпретацию в контексте AdS/CFT соответствия.

Безусловно, наиболее важным является исследование решений типа черных дыр в калибровочных теориях высших спинов в старших размерностях.

Целью данной главы является демонстрация использования методов теории высших спинов для получения уже известных и новых результатов для БТЗ черных дыр. А именно: используя осцилляторную реализацию алгебры $o(2,2) \sim sp(2) \oplus sp(2)$ движений AdS_3, найдена калибровочная функция решения БТЗ в терминах группы $Sp(2)$, а затем решены свободные безмассовые полевые уравнения в метрике БТЗ, используя формализм модуля Фока [28], чтобы показать, как получить в нашем подходе хорошо известные результаты для скалярного и спинорного полей [48, 49, 50, 52]. Простым следствием используемого формализма является следующий ранее неизвестный результат о БТЗ черной дыре. Существует некоторое условие "квантования" на массу и угловой момент черной дыры, при выполнении которого, данное решение имеет дополнительные скрытые симметрии высших спинов.

Глава состоит из десяти разделов. В разделе 2.1 дано краткое описание БТЗ метрики, ее симметрий, а также процедуры факторизации. В разделе 2.2 представлена осцилляторная реализация алгебры AdS. В разделе 2.3 дано бескоординатное описание БТЗ черной дыры как плоской связности. БТЗ калибровочная функция найдена в разделе 2.4. В разделе 2.5 обсуждаются $Sp(4)$-ковариантные динамические уравнения и их формулировка в терминах модуля Фока [100, 28]. Звездочная реализация векторов Киллинга получена в разделе 2.6. В разделе 2.7, используя развернутую формулировку, найдены явные решения для динамических полей в метрике БТЗ. В разделе 2.8 кратко обсуждается экстремальный случай. И наконец, в разделе 2.9 изучаются симметрии безмассовых полей в метрике БТЗ черной дыры. Некоторые полезные формулы и промежуточные вычисления собраны в приложении II.

2.1 БТЗ черная дыра

В этом разделе кратко напомним основные сведения о БТЗ черной дыре. Более подробное изложение можно найти в обзоре [44].

Из действия Эйнштейна-Гильберта с отрицательной космологической постоянной $\Lambda = -\lambda^2$

$$S = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g}(R + 2\lambda^2) dt d^2 x \tag{2.1.1}$$

следуют уравнения Эйнштейна

$$R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn} = \lambda^2 g_{mn}\,. \tag{2.1.2}$$

В случае трехмерного пространства-времени имеем

$$R_{mnpq} = -\lambda^2 (g_{mp} g_{nq} - g_{np} g_{mq}). \tag{2.1.3}$$

Это означает, что, будучи вакуумным решением, черная дыра локально эквивалентна AdS_3. В [42] было показано, что метрика

$$ds^2 = (-M + \lambda^2 r^2 + \frac{J^2}{4r^2}) dt^2 - (-M + \lambda^2 r^2 + \frac{J^2}{4r^2})^{-1} dr^2 - r^2 (d\phi - \frac{J}{2r^2} dt)^2, \tag{2.1.4}$$

где $\phi \in [0, 2\pi]$, удовлетворяет (2.1.2) и описывает вращающуюся черную дыру с безразмерной массой[1] M и угловым моментом J. Такая метрика имеет внешний и внутренний горизонты

$$r_{\pm}^2 = \frac{M}{2\lambda^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{J^2 \lambda^2}{M^2}} \right)\,. \tag{2.1.5}$$

[1]Единицы измерения выбраны так, что $G = 1/8$.

Эргосфера (то есть, поверхность бесконечного красного смещения $g_{00} = 0$) имеет радиус $r_{erg} = \frac{1}{\lambda} M^{1/2}$.

Заметим, что $r_\pm$ комплексны при $|J| > M/\lambda$. В этом случае горизонты отсутствуют, а метрика имеет голую сингулярность в точке $r = 0$. Формально при $J = 0$ можно рассматривать отрицательные значения M в метрике (2.1.4). Но во всех таких случаях, кроме $M = -1$, соответствующего AdS_3, это приводит к появлению голых конических сингулярностей при $r = 0$ [44], что легко увидеть, переопределив радиальную координату $r \to \sqrt{-M} r$. Случай $M = 0$ и $J = 0$ соответствует “безмассовой” черной дыре и не воспроизводит пространство AdS (в отличие от четырехмерного случая). Таким образом, потребуем, чтобы

$$M > 0\,, \qquad |J| \leq M/\lambda. \tag{2.1.6}$$

Предельный случай $|J| = M/\lambda$ соответствует экстремальной черной дыре с $r_+ = r_-$.

Пространство AdS_3 может быть описано как гиперповерхность, вложенная в четырехмерное псевдоевклидово пространство с метрикой $\eta = diag(++--)$

$$ds^2 = du^2 + dv^2 - dx^2 - dy^2, \tag{2.1.7}$$

$$u^2 + v^2 - x^2 - y^2 = \lambda^{-2}. \tag{2.1.8}$$

В общем случае метрику БТЗ черной дыры (2.1.4) при $r > r_+$ можно получить, используя следующую параметризацию

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{A(r)}\cosh(\tilde{\phi}(t,\phi)), \quad v = \sqrt{B(r)}\sinh(\tilde{t}(t,\phi)), \\ x &= \sqrt{A(r)}\sinh(\tilde{\phi}(t,\phi)), \quad y = \sqrt{B(r)}\cosh(\tilde{t}(t,\phi)), \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

где

$$A(r) = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{r^2 - r_-^2}{r_+^2 - r_-^2}\right), \quad B(r) = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{r^2 - r_+^2}{r_+^2 - r_-^2}\right), \tag{2.1.10}$$

$$\tilde{t} = \lambda^2 r_+ t - \lambda r_- \phi, \quad \tilde{\phi} = -\lambda^2 r_- t + \lambda r_+ \phi. \tag{2.1.11}$$

В этой главе мы будем рассматривать общий случай и использовать формулы вложения (2.1.9) при $r > r_+$. (Подробности вложения при $r \leq r_+$, а также случаи экстремальной и вакуумной черных дыр можно найти в [44]).

Свойства БТЗ черной дыры существенным образом определяются ее групповым происхождением. В самом деле, (u, v, x, y) можно собрать в 2×2 матрицу $S_0 \in SL(2|\mathbb{R})$

$$S_0 = \lambda \begin{pmatrix} u + x & v - y \\ -v - y & u - x \end{pmatrix}, \quad \det(S_0) = 1. \tag{2.1.12}$$

Как показано в [44], БТЗ решение получается из группового многообразия $SL(2|\mathbb{R})$ в результате факторизации по дискретной подгруппе при помощи следующего отождествления

$$S_0 \sim \rho^+ S_0 \rho^- \,, \quad \rho^\pm = \begin{pmatrix} e^{\pi\lambda(r_+ \pm r_-)} & 0 \\ 0 & e^{-\pi\lambda(r_+ \pm r_-)} \end{pmatrix}, \tag{2.1.13}$$

которое делает переменную ϕ в метрике (2.1.4) периодической.

Изометрии AdS_3 представляются элементами группы $SL(2|\mathbb{R})_L \times SL(2|\mathbb{R})_R/\mathbb{Z}_2 \sim SO(2,2)$ и действуют на группе левыми и правыми умножениями $S_0 \to P_L\, S_0\, P_R$ по модулю отождествления $(P_L, P_R) \sim (-P_L, -P_R)$. В соответствии с (2.1.7), пространство AdS_3 инвариантно относительно $SO(2,2)$ преобразований, генераторы которых имеют вид

$$J_{ab} = X_b \frac{\partial}{\partial X^a} - X_a \frac{\partial}{\partial X^b}\,, \quad \text{где} \quad X^a = (u, v, x, y). \tag{2.1.14}$$

Согласно [44], в общем случае алгебра движений БТЗ метрики (2.1.4) определяется векторными полями $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial \phi}$. В случае $r_+^2 - r_-^2 > 0$, вектор Киллинга, ответственный за отождествление (2.1.13), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = -\lambda r_+ J_{12} + \lambda r_- J_{03}, \tag{2.1.15}$$

а генератор сдвига по времени

$$\frac{\partial}{\partial t} = \lambda^2 r_- J_{12} - \lambda^2 r_+ J_{03}. \tag{2.1.16}$$

Заметим, что, как показано в [44], среди шести векторов Киллинга AdS_3 только (2.1.15) и (2.1.16) остаются глобально определенными при отождествлении (2.1.13).

2.2 Осцилляторная реализация алгебры $o(2,2)$

Рассмотрим осцилляторную реализацию алгебры $o(2,2)$, которая важна для дальнейшего анализа. Алгебра движений пространства AdS_3 изоморфна $o(2,2) \sim sp(2) \oplus sp(2)$. Она состоит из диагональных элементов $sp(2)$ — лоренцевых генераторов $L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$ и AdS-трансляций $P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}$ $(\alpha, \beta, \ldots = 1, 2)$. Коммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}
[L_{\alpha\beta}, L_{\gamma\delta}] &= \frac{1}{2}(\epsilon_{\beta\gamma} L_{\alpha\delta} + \epsilon_{\beta\delta} L_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma} L_{\beta\delta} + \epsilon_{\alpha\delta} L_{\beta\gamma})\,, \\
[P_{\alpha\beta}, P_{\gamma\delta}] &= 2\lambda^2(\epsilon_{\beta\gamma} L_{\alpha\delta} + \epsilon_{\beta\delta} L_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma} L_{\beta\delta} + \epsilon_{\alpha\delta} L_{\beta\gamma})\,, \\
[L_{\alpha\beta}, P_{\gamma\delta}] &= \frac{1}{2}(\epsilon_{\beta\gamma} P_{\alpha\delta} + \epsilon_{\beta\delta} P_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\gamma} P_{\beta\delta} + \epsilon_{\alpha\delta} P_{\beta\gamma})\,,
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

где

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

антисимметричная $sp(2)$ инвариантная форма[2].

Пусть заданы осцилляторы $\hat{a}_\alpha$ и $\hat{b}^\alpha$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_\alpha, \hat{b}^\beta] = \delta_\alpha{}^\beta\,, \qquad [\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta] = 0\,, \qquad [\hat{b}^\alpha, \hat{b}^\beta] = 0\,. \tag{2.2.2}$$

Генераторы $sp(2) \oplus sp(2)$ имеют стандартное осцилляторное представление [27]

$$\hat{L}_\alpha{}^\beta = \frac{1}{2}\{\hat{a}_\alpha, \hat{b}^\beta\} - \frac{1}{4}\{\hat{a}_\gamma, \hat{b}^\gamma\}\delta_\alpha{}^\beta\,, \qquad \hat{P}_{\alpha\beta} = \hat{a}_\alpha\hat{a}_\beta + \lambda^2\hat{b}_\alpha\hat{b}_\beta\,. \tag{2.2.3}$$

Вместо операторов удобнее использовать коммутирующие переменные a_α и b^α, порождающие ассоциативную алгебру полиномов с операцией звездочного произведения

$$(f \star g)(a,b) = \frac{1}{\pi^4}\int f(a+u, b+t)g(a+s, b+v)e^{2(s_\alpha t^\alpha - u_\alpha v^\alpha)}\, d^2u\, d^2t\, d^2s\, d^2v\,. \tag{2.2.4}$$

Эквивалентно,

$$(f \star g)(a,b) = f(a,b)\, e^{\frac{1}{2}\left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial a_\alpha}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial b^\alpha}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial b^\alpha}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial a_\alpha}}\right)} g(a,b)\,.$$

Определенное таким образом звездочное произведение (часто называемое произведением Мойла) описывает ассоциативное произведение симметризованных (упорядоченных по Вейлю) полиномов от осцилляторов в терминах символов операторов. Интеграл нормирован так, что 1 является единичным элементом в алгебре. Таким образом,

$$1 \star 1 = \frac{1}{\pi^4}\int e^{2(s_\alpha t^\alpha - u_\alpha v^\alpha)}\, d^2u\, d^2t\, d^2s\, d^2v = 1.$$

Из (2.2.4) следует, что

$$\begin{aligned} a_\alpha \star f(a,b) &= a_\alpha f(a,b) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b^\alpha} f(a,b), \\ b_\alpha \star f(a,b) &= b_\alpha f(a,b) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a^\alpha} f(a,b)\,. \end{aligned}$$

В частности, определяющие соотношения ассоциативной звездочной алгебры имеют вид

$$[a_\alpha, b^\beta]_\star = \delta_\alpha{}^\beta, \qquad [a_\alpha, a_\beta]_\star = 0, \qquad [b^\alpha, b^\beta]_\star = 0, \tag{2.2.5}$$

где $[a,b]_\star = a \star b - b \star a$. Звездочная реализация генераторов $o(2,2)$ имеет вид

$$L_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha)\,, \qquad P_{\alpha\beta} = a_\alpha a_\beta + \lambda^2\, b_\alpha b_\beta\,. \tag{2.2.6}$$

Далее везде для удобства будем полагать радиус AdS равным единице (λ=1).

[2]Спинорные индексы поднимаются и опускаются согласно правилу $A_\alpha = A^\beta \epsilon_{\beta\alpha}$, $A^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} A_\beta$.

2.3 БТЗ решение как плоская связность

Поскольку пространство БТЗ черной дыры локально эквивалентно AdS_3, его можно описать, используя плоскую связность алгебры $sp(2) \oplus sp(2)$. Действительно, пусть w_0 является 1-формой, принимающей значения в алгебре $sp(2) \oplus sp(2)$

$$w_0(a, b|X) = \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(X)L_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}h^{\alpha\beta}(X)P_{\alpha\beta}\,, \tag{2.3.1}$$

где $P_{\alpha\beta}$ и $L_{\alpha\beta}$ — AdS_3 генераторы (2.2.6), а $\omega_{\alpha\beta}(X)$ и $h_{\alpha\beta}(X)$ — 1-формы. Тогда условие нулевой кривизны

$$R = dw_0 - w_0 \star \wedge w_0 = 0 \tag{2.3.2}$$

эквивалентно следующим уравнениям

$$d\omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\omega_\alpha{}^\gamma \wedge \omega_{\gamma\beta} + \frac{1}{2}h_\alpha{}^\gamma \wedge h_{\beta\gamma} = 0, \tag{2.3.3}$$

$$dh_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\omega_\alpha{}^\gamma \wedge h_{\gamma\beta} + \frac{1}{2}\omega_\beta{}^\gamma \wedge h_{\alpha\gamma} = 0. \tag{2.3.4}$$

После отождествления $\omega_{\alpha\beta}$ с лоренцевой связностью, а $h_{\alpha\beta}$ с тетрадой, уравнение (2.3.4) означает условие отсутствия кручения, а (2.3.3) локально описывает AdS геометрию.

Уравнение (2.3.2) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\delta w_0 = d\epsilon - [w_0, \epsilon]_\star\,, \tag{2.3.5}$$

где $\epsilon(a, b|X)$ — произвольный инфинитезимальный калибровочный параметр. Любое фиксированное вакуумное решение w_0 уравнения (2.3.2) нарушает локальную симметрию до подалгебры стабильности с инфинитезимальным параметром $\epsilon_0(a, b|X)$, удовлетворяющим уравнению

$$d\epsilon_0 - [w_0, \epsilon_0]_\star = 0. \tag{2.3.6}$$

Это уравнение совместно вследствие (2.3.2). Общее решение имеет не более шести независимых параметров глобальных симметрий. Количество таких симметрий, выживающих в локально AdS геометрии, зависит от глобальных свойств пространства (то есть, от граничных условий). Настоящее пространство AdS_3 обладает всеми шестью симметриями — $o(2, 2)$ движениями AdS_3. В пространстве БТЗ черной дыры остаются только два из шести таких параметров.

В общем случае тетрада и лоренцева связность $sp(2) \oplus sp(2)$ алгебры, удовлетворяющие уравнениям (2.3.3) и (2.3.4), локально имеют вид

$$h_{\alpha\beta} = (W_1^{-1})_\alpha{}^\gamma d(W_1)_{\gamma\beta} - (W_2)_\alpha{}^\gamma d(W_2^{-1})_{\gamma\beta}, \tag{2.3.7}$$

$$\omega_{\alpha\beta} = (W_1^{-1})_\alpha{}^\gamma d(W_1)_{\gamma\beta} + (W_2)_\alpha{}^\gamma d(W_2^{-1})_{\gamma\beta}, \tag{2.3.8}$$

где $W_{1,2\,\alpha}{}^\beta(X) \in Sp(2)$, то есть,

$$(W_{1,2}^{-1})_{\alpha\beta} = -(W_{1,2})_{\beta\alpha}. \tag{2.3.9}$$

Из (2.3.7) следует, что метрику можно записать как

$$ds^2 = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} dS_{\alpha\beta} dS^{\alpha\beta}\,, \tag{2.3.10}$$

где

$$S_{\alpha\beta} = (W_1)_\alpha{}^\gamma (W_2)_{\gamma\beta}. \tag{2.3.11}$$

Таким образом, любая локально AdS_3 метрика определяется $Sp(2)$ матричным полем $S_{\alpha\beta}(X)$. Заметим, что в общем случае $S_{\alpha\beta} \neq S_{\beta\alpha}$. Чтобы получить БТЗ метрику (2.1.4), можно использовать матрицу S_0 (2.1.12) и параметризацию (2.1.9).

Семейство хорошо определенных при отождествлении $\phi \to \phi + 2\pi$ тетрад (2.3.7) и лоренцевых связностей (2.3.8) может быть найдено, используя следующее разложение матрицы S_0 (2.1.12)

$$S_{0\,\alpha}{}^\beta = (K_+ U_r K_-)_\alpha{}^\beta \tag{2.3.12}$$

по $Sp(2)$ матрицам $K_\pm$ и U_r вида

$$K_\pm = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}(\tilde{\phi} \mp \tilde{t})} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\phi} \mp \tilde{t})} \end{pmatrix}\,, \quad U_r = \begin{pmatrix} \sqrt{A} & -\sqrt{B} \\ -\sqrt{B} & \sqrt{A} \end{pmatrix}\,. \tag{2.3.13}$$

Заметим, что $K_\pm$ принадлежат абелевой БТЗ подгруппе группы $Sp(2) \times Sp(2)$.

Полагая, что $W_1 = K_+ U_1$ и $W_2 = U_2 K_-$, где $U_1 U_2 = U_r$, мы воспроизводим (2.3.12) в виде (2.3.11). Соответствующие тетрада и лоренцева связность

$$h = U_1^{-1} K_+^{-1} dK_+ U_1 - U_2 K_- dK_-^{-1} U_2^{-1} + U_1^{-1} dU_1 - U_2 dU_2^{-1}, \tag{2.3.14}$$

$$\omega = U_1^{-1} K_+^{-1} dK_+ U_1 + U_2 K_- dK_-^{-1} U_2^{-1} + U_1^{-1} dU_1 + U_2 dU_2^{-1} \tag{2.3.15}$$

не зависят от t и ϕ при условии, что $U_{1,2} = U_{1,2}(r)$. Поэтому они остаются хорошо определенными при отождествлении $\phi \to \phi + 2\pi$ в случае БТЗ.

Удобно выбрать следующие матрицы $U_{1,2}$

$$U_1 = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 0 & -\mu(r)\sqrt{B} \\ \eta(r)\sqrt{A} & \mu(r)\sqrt{A} \end{pmatrix}\,, \quad U_2 = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} \mu(r) & 0 \\ -\mu^{-1}(r) & \eta(r)\sqrt{AB} \end{pmatrix}\,, \tag{2.3.16}$$

здесь $\mu(r)$ и $\eta(r)$ — некоторые функции, зависящие от радиальной координаты и удовлетворяющие условию

$$\mu(r)\eta(r) = A^{-1}(r)\,. \tag{2.3.17}$$

Матрицы ${W_1}_\alpha{}^\beta = (K_+U_1)_\alpha{}^\beta$, ${W_2}_\alpha{}^\beta = (U_2K_-)_\alpha{}^\beta$, соответственно, принимают вид

$$\begin{aligned} {W_1}_\alpha{}^\beta &= \sqrt{\frac{u+x}{y-v}}\begin{pmatrix} 0 & -\mu(y-v) \\ \eta(u-x) & \mu(u-x) \end{pmatrix}, \\ {W_2}_\alpha{}^\beta &= \sqrt{\frac{u+x}{y-v}}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -\mu^{-1} & \eta(u-x)(y-v) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Согласно (2.3.7) и (2.3.8), компоненты тетрады и лоренцевой связности равны

$$\begin{aligned} h_{11} &= A\mu^2\left(-d\tilde{t} + d\tilde{\phi} + \frac{1}{2AB}dA\right), \\ h_{12} &= h_{21} = d\tilde{t} - \frac{1}{2B}dA, \\ h_{22} &= -\mu^{-2}\left(d\tilde{t} + d\tilde{\phi} - \frac{1}{2AB}dA\right), \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= A\mu^2\left(-d\tilde{t} + d\tilde{\phi} + \frac{1}{2AB}dA\right), \\ \omega_{12} &= \omega_{21} = -d\tilde{\phi} - \frac{1}{2A}dA - \frac{2}{\mu}d\mu, \\ \omega_{22} &= \mu^{-2}\left(d\tilde{t} + d\tilde{\phi} - \frac{1}{2AB}dA\right), \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

где A, B и $\tilde{\phi}$, $\tilde{t}$ определены в (2.1.10) и (2.1.11), соответственно. Эти выражения хорошо определены на S^1 с циклической координатой $\phi \sim \phi + 2\pi$.

2.4 Калибровочная функция

Уравнение (2.3.2) локально имеет калибровочное решение вида

$$w_0(a,b|X) = -g^{-1}(a,b|X) \star dg(a,b|X)\,, \tag{2.4.1}$$

где $g(a,b|X)$ — некоторый обратимый ($g^{-1} \star g = g \star g^{-1} = 1$) элемент звездочной алгебры. Как только найдена калибровочная функция $g(a,b|X)$, мы сразу же имеем полное решение линеаризованной задачи. В частности, параметры глобальной симметрии, удовлетворяющие (2.3.6), имеют вид

$$\epsilon_0(a,b|X) = g^{-1}(a,b|X) \star \xi \star g(a,b|X)\,, \tag{2.4.2}$$

где $\xi = \xi(a,b)$ — произвольный независящий от X элемент звездочной алгебры. В разделе 2.5 будет показано, как знание функции $g(a,b|X)$ позволяет получить общее решение свободных полевых уравнений.

Используя формулы (1.1.18), (1.1.21), мы получаем следующую калибровочную функцию $g(a,b|W_1,W_2)$, воспроизводящую (2.3.7) и (2.3.8) через (2.4.1),

$$
\begin{aligned}
g(a,b|W_1,W_2) &= \frac{4}{\sqrt{\det||(W_1+1)(W_2+1)||}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Pi^{\alpha\beta}(W_1)T^{+}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\Pi^{\alpha\beta}(W_2)T^{-}_{\alpha\beta}\Big),\\
g^{-1}(a,b|W_1,W_2) &= \frac{4}{\sqrt{\det||(W_1+1)(W_2+1)||}} \exp\Big(\frac{1}{2}\Pi^{\alpha\beta}(W_1)T^{+}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\Pi^{\alpha\beta}(W_2)T^{-}_{\alpha\beta}\Big),
\end{aligned}
\tag{2.4.3}
$$

где[3]

$$
\Pi_{\alpha\beta}(W) = \Pi_{\beta\alpha}(W) = \Big(\frac{W-1}{W+1}\Big)_{\alpha\beta}
\tag{2.4.4}
$$

и

$$
T^{\pm}_{\alpha\beta} = a_\alpha a_\beta + b_\alpha b_\beta \pm (a_\alpha b_\beta + b_\alpha a_\beta).
\tag{2.4.5}
$$

Здесь $T^{\pm}_{\alpha\beta}$ — генераторы $sp(2)$ подалгебр алгебры $sp(2)\oplus sp(2)$, задаваемые двумя взаимно коммутирующими наборами осцилляторов $\alpha^{\pm}_{\alpha} = a_\alpha \pm b_\alpha$ и подчиненные коммутационными соотношениям $[\alpha^{\pm}_{\alpha}, \alpha^{\pm}_{\beta}]_\star = \pm 2\epsilon_{\alpha\beta}$. На практике часто бывает удобнее использовать звездочное произведение, определенное через взаимно коммутирующие осцилляторы $\alpha^{\pm}_{\beta}$ следующим образом[4]

$$
(f * g)(\alpha^{\pm}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int f(\alpha^{\pm}+u)g(\alpha^{\pm}+v)e^{\mp u_\alpha v^\alpha} d^2u d^2v\,.
\tag{2.4.6}
$$

Принимая во внимание, что $T^{\pm}_{\alpha\beta} = \alpha^{\pm}_{\alpha}\alpha^{\pm}_{\beta}$, получаем следующую полезную формулу для произведения калибровочных функций (2.4.3), которая следует из (2.4.6)

$$
g(a,b|K_1,K_2)\star g(a,b|U_1,U_2) = g(a,b|K_1U_1,U_2K_2)
\tag{2.4.7}
$$

при условии, что матрицы $K_{1,2}+1$ и $U_{1,2}+1$ невырождены. Используя равенство

$$
\Pi_{\alpha\beta}(W) = -\Pi_{\alpha\beta}(W^{-1})\,,
$$

[3]Матричное отношение $\frac{B}{A}$ надо понимать как $A^{-1}B$. Заметим, что (2.4.4) аналогично, так называемому, преобразованию Кэли [51].

[4]Заметим, что линейные преобразования образующих элементов вейлевской алгебры задают автоморфизмы звездочной алгебры, что является следствием определения алгебры Вейля, как результата полной симметризации образующих осцилляторов, нечувствительного к определенному выбору базиса в алгебре осцилляторов.

находим, что преобразование калибровочной функции (2.4.3) вида

$$g(a,b|W_1,W_2) \to g(a,b|W_1,W_2) \star \Lambda^{-1}(a,b|V) \tag{2.4.8}$$

с

$$\begin{aligned}
\Lambda(a,b|V) &= \frac{4}{\det||V+1||} \exp\Big(\frac{1}{2}\Pi^{\alpha\beta}(V)(T^+_{\alpha\beta} - T^-_{\alpha\beta})\Big), \\
\Lambda^{-1}(a,b|V) &= \frac{4}{\det||V+1||} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Pi^{\alpha\beta}(V)(T^+_{\alpha\beta} - T^-_{\alpha\beta})\Big),
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

где $V_{\alpha\beta}(X) \in Sp(2)$, описывает локальное преобразование Лоренца для тетрады (2.3.7)

$$h_{\alpha\beta} \to V^\gamma{}_\alpha V^\delta{}_\beta h_{\gamma\delta}\,, \tag{2.4.10}$$

оставляя инвариантной метрику (2.3.10).

Также из (2.4.7) следует, что тетрада (2.3.14) и лоренцева связность (2.3.15) получаются из калибровочной функции вида

$$g(a,b|t,\phi,r) = \Phi(a,b|t,\phi) \star U(a,b|r) \tag{2.4.11}$$

с

$$\begin{aligned}
\Phi(a,b|t,\phi) &= \frac{4}{\sqrt{\det||(K_+ + 1)(K_- + 1)||}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Pi^{\alpha\beta}(K_+)T^+_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\Pi^{\alpha\beta}(K_-)T^-_{\alpha\beta}\Big)\,, \\
U(a,b|r) &= \frac{4}{\sqrt{\det||(U_1 + 1)(U_2 + 1)||}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Pi^{\alpha\beta}(U_1)T^+_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\Pi^{\alpha\beta}(U_2)T^-_{\alpha\beta}\Big)\,,
\end{aligned}$$

при условии, что $U_1U_2 = U_r$ (2.3.13).

Заметим, что метрика (2.3.10) инвариантна относительно глобальных левых и правых групповых умножений $S_\gamma{}^\delta(X)$ $S \to HS\tilde{H}$, где H и $\tilde{H}$ — некоторые независящие от X элементы группы $Sp(2)$. Мы воспользуемся этим произволом в разделе 2.5 при анализе уравнений вне горизонта черной дыры. Для этого выберем

$$S_{\gamma\delta} = (HS_0)_{\gamma\delta} \tag{2.4.12}$$

с постоянной матрицей H вида

$$H_\gamma{}^\delta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\,, \tag{2.4.13}$$

где $\alpha^2 = A(r_0)$ и $\beta^2 = B(r_0)$ в некоторой точке $r_0 > r_+$. Из (2.1.10) следует, что $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. Новая матрица $S_{\gamma\delta}$ имеет вид

$$S_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} \alpha(y-v) + \beta(x-u) & \alpha(x+u) - \beta(y+v) \\ \beta(y-v) + \alpha(x-u) & \beta(x+u) - \alpha(y+v) \end{pmatrix}. \tag{2.4.14}$$

Принимая во внимание (2.3.11) и (2.4.7), получаем, что такое переопределение достигается звездочным преобразованием

$$g(a,b|W_1,W_2) \to K(a,b|H) \star g(a,b|W_1,W_2)\,, \tag{2.4.15}$$

где

$$K(a,b|H) = \frac{2}{\sqrt{\det||H+1||}} e^{-\frac{1}{2}\Pi^{\gamma\delta}(H)T^+_{\gamma\delta}}\,.$$

Таким образом, тетрада и лоренцева связность не меняются при преобразовании (2.4.12).

Заметим, что $K(a,b|1) = 1$. В следующем разделе будет показано, что случай $K(a,b|H) \neq 1$ играет роль регуляризации, позволяющей анализировать задачу вне точки, где решение сингулярно. Получив решение, мы избавимся от регуляризации, положив $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

2.5 Развернутые уравнения для безмассовых полей в трех измерениях и модуль Фока

При описании свободных динамических уравнений для безмассовых полей в поле БТЗ черной дыры, мы следуем развернутой формулировке, разработанной в [53, 28, 100]. В частности, как показано в [28], динамику свободных безмассовых полей спина $s = 0$ и $s = \frac{1}{2}$ в AdS можно описать в явно конформно-инвариантном виде в терминах сечений некоторого расслоения Фока. А именно: рассмотрим пространственно-временные поля, принимающие значения в образованном осцилляторами b^α модуле Фока,

$$|C(b|X)\rangle = C(b|X) \star |0\rangle\langle 0|, \tag{2.5.1}$$

где $C(b|X)$ — производящая функция

$$C(b|X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(X) b^{\alpha_1}\ldots b^{\alpha_k}, \tag{2.5.2}$$

а $|0\rangle\langle 0| = e^{-2a_\gamma b^\gamma}$ — фоковский вакуум, удовлетворяющий условиям

$$a_\alpha \star |0\rangle\langle 0| = 0\,, \qquad |0\rangle\langle 0| \star b_\alpha = 0\,. \tag{2.5.3}$$

Динамические безмассовые скаляр и спинор отождествим с низшими компонентами мультиплета

$$C(X) = C(b|X)\big|_{b=0}\,, \qquad C_\alpha(X) = \frac{\partial}{\partial b^\alpha} C(b|X)\Big|_{b=0}\,. \tag{2.5.4}$$

Тогда динамические уравнения для безмассовых полей в локально AdS_3 пространстве можно записать в развернутом виде

$$d|C(b|X)\rangle - w_0(a,b|X) \star |C(b|X)\rangle = 0\,, \tag{2.5.5}$$

где $w_0(a,b|X)$ удовлетворяет условию нулевой кривизны (2.3.2). Покажем, что (2.5.5) эквивалентно конформным уравнениям Клейна-Гордона и Дирака и соотношениям, выражающим высшие компоненты мультиплета (2.5.2) через старшие производные динамических полей [28]. Используя (2.3.1), уравнение (2.5.5) можно переписать в виде

$$DC_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \frac{k(k-1)}{4} h_{(\alpha_1\alpha_2}C_{\alpha_3\ldots\alpha_k)} + \frac{1}{4} h^{\beta\lambda}C_{\beta\lambda\alpha_1\ldots\alpha_k}\,, \tag{2.5.6}$$

где скобки означают полную симметризацию, а D — лоренц-ковариантный дифференциал

$$DC_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = dC_{\alpha_1\ldots\alpha_k} + \frac{k}{2}\omega_{(\alpha_1}{}^{\gamma}C_{\gamma\alpha_2\ldots\alpha_k)}\,.$$

Полагая в (2.5.6) $k=0$ и $k=2$, имеем

$$D_nC = \frac{1}{4}h_{n,}{}^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}, \tag{2.5.7}$$

$$D_nC_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}h_{n,\alpha\beta}C + \frac{1}{4}h_{n,}{}^{\gamma\delta}C_{\alpha\beta\gamma\delta}\,. \tag{2.5.8}$$

Используя полную симметрию по индексам $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (то есть бесследовость), из (2.5.7) и (2.5.8) получаем уравнение Клейна-Гордона для скалярного поля $C(X)$

$$\Box C \equiv D^nD_nC = \frac{3}{4}C\,. \tag{2.5.9}$$

Аналогично, полагая $k=1$ в уравнении (2.5.6), получаем уравнение Дирака

$$h^n{}_{,\alpha\beta}D_nC^{\beta} = 0\,. \tag{2.5.10}$$

Остальные поля мультиплета (2.5.2) выражаются с помощью (2.5.6) через производные от физических полей (2.5.4).

Калибровочное преобразование (2.3.5) действует на модуле Фока естественным образом

$$\delta|C(b|X)\rangle = \epsilon(a,b|X) \star |C(b|X)\rangle\,. \tag{2.5.11}$$

В частности, преобразование Лоренца калибровочной функции (2.4.8) действует как

$$|C(b|X)\rangle \to \Lambda(a,b|V) \star |C(b_\alpha|X)\rangle = |C(V_\alpha{}^{\beta}b_\beta|X)\rangle\,, \tag{2.5.12}$$

где $\Lambda(a,b|V)$ определено в (2.4.9).

Выбирая $w_0(a,b|X)$ в чисто калибровочном виде (2.4.1), находим общее локальное решение для $|C(b|X)\rangle$

$$|C(b|X)\rangle = g^{-1}(a,b|X) \star |C(b|X_0)\rangle = g^{-1}(a,b|X) \star C(b) \star |0\rangle\langle 0| \,, \tag{2.5.13}$$

где $|C(b|X_0)\rangle = C(b) \star |0\rangle\langle 0|$ играет роль начальных данных. Смысл формулы (2.5.13) состоит в следующем: при $g(a,b|X_0) = 1$ в некоторой точке $X = X_0$ она представляет собой ковариантное разложение Тейлора в этой точке, восстанавливающее решение через его производные, параметризованные функцией $C(b)$ на массовой оболочке. Заметим, что данная интерпретация имеет место для любой регулярной точки X_0, если переопределить калибровочную функцию

$$g(a,b|X) \to \tilde{g}(a,b|X) = g^{-1}(a,b|X_0) \star g(a,b|X) \,. \tag{2.5.14}$$

Это изменение не влияет на связность (2.3.7) и тетраду (2.3.8), но эффективно переопределяет функцию $C(b)$

$$|C(b|X)\rangle = \tilde{g}^{-1}(a,b|X) \star \tilde{C}(b) \star |0\rangle\langle 0| \,, \qquad \tilde{C}(b) \star |0\rangle\langle 0| = g^{-1}(a,b|X_0) \star C(b) \star |0\rangle\langle 0| \,.$$

Очевидно, что данный формализм не применим в точке X_0, в которой решение $C(b|X)$ сингулярно. На практике наличие пространственно-временной сингулярности в некоторой точке X_0 проявляется отсутствием соответствующей $\tilde{C}(b) \star |0\rangle\langle 0|$ (заметим, что звездочное произведение неполиномиальных функций необязательно хорошо определено). Решение проблемы состоит в некотором переопределении (2.5.14), которое соответствовало бы анализу в какой-то регулярной точке решения.

Развернутая форма безмассовых уравнений (2.5.6) явно конформно инвариантна, причем 3-мерная конформная алгебра $sp(4) \sim o(3,2)$ образована различными билинейными комбинациями осцилляторов (2.2.2). Конструкцию можно обобщить на массивный случай, заменяя обычные осцилляторы a_α, b^α на деформированные, как это сделано в [46] (см. ссылки там же) или используя модуль Фока, как в [28] и в данной статье, но с удвоенным числом деформированных осцилляторов. Заметим, что в массивном случае в силу свойств деформированных осцилляторов конформная алгебра $sp(4)$, как и положено, нарушается до AdS_3 алгебры $sp(2) \oplus sp(2)$. Соответствующая формулировка технически более сложна, поэтому случай произвольной массы здесь не рассматривается.

В стандартном описании случай массивного скалярного поля в метрике БТЗ черной дыры (2.1.4) был впервые рассмотрен в [48, 49]. Решение уравнения

$$\Box C = m^2 C$$

с определенной энергией E и угловым моментом L имеет вид

$$C(t,r,\phi) = e^{-iEt}e^{iL\phi}R(r) = \left(1 - A(r)^{-1}\right)^{\frac{P+Q}{2}} A(r)^{-\gamma} f(r)\,, \qquad (2.5.15)$$

где

$$P = i\frac{E-L}{2(r_+ - r_-)}\,, \qquad Q = i\frac{E+L}{2(r_+ + r_-)}\,, \qquad m^2 = 4\gamma(1-\gamma) \qquad (2.5.16)$$

и

$$f(r) = K_1 F(P+\gamma, Q+\gamma, 2\gamma; A(r)^{-1}) + K_2 A(r)^{2\gamma-1} F(P+1-\gamma, Q+1-\gamma, 2-2\gamma; A(r)^{-1})$$

а K_1, K_2 — произвольные константы интегрирования. $A(r)$ определено в (2.1.10), а $F(a,b,c;x)$ — гипергеометрическая функция. Заметим, что подстановка $\gamma \to 1-\gamma$ меняет местами два независимых базисных решения. Согласно (2.5.9) в безмассовом случае $m^2 = 3/4$, а значит, $\gamma = 1/4$.

В оставшейся части главы будет показано, как воспроизвести в нашем подходе известные результаты для безмассовых скалярного и спинорного полей в метрике БТЗ черной дыры. Для того, чтобы выделить состояния с определенной энергией и угловым моментом в мультиплете $|C(b|X)\rangle$, наложим следующие условия

$$\epsilon_t \star |C(b|X)\rangle = -iE|C(b|X)\rangle\,, \quad \epsilon_\phi \star |C(b|X)\rangle = iL|C(b|X)\rangle\,, \qquad (2.5.17)$$

где $\epsilon_t = g^{-1} \star \xi_t \star g$, $\epsilon_\phi = g^{-1} \star \xi_\phi \star g$ — генераторы симметрии векторов Киллинга БТЗ черной дыры $\frac{\partial}{\partial\phi}$ (2.1.15) и $\frac{\partial}{\partial t}$ (2.1.16). Используя (2.5.13), перепишем (2.5.17) в виде

$$\xi_t \star C(b) \star |0\rangle\langle 0| = -iEC(b) \star |0\rangle\langle 0|\,, \qquad \xi_\phi \star C(b) \star |0\rangle\langle 0| = iLC(b) \star |0\rangle\langle 0|\,. \quad (2.5.18)$$

Для дальнейшего анализа этих уравнений, определяющих $C(b)$, необходимо знать представление генераторов ξ_t и ξ_ϕ в звездочной алгебре. Оно будет найдено в следующем разделе.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Решение (2.5.15) сингулярно в точке $r = r_+$. Следовательно, его нельзя получить в рамках развернутого формализма, используя разложение в окрестности горизонта. Действительно, в разделе 2.7 будет показано, что уравнения (2.5.18), отвечающие разложению около $r = r_+$, не имеют регулярных по осцилляторам b^α решений для $C(b)$ и не могут интерпретироваться в терминах модуля Фока. Заметим, что, поскольку калибровочная функция (2.4.3) регулярна на горизонте, сингулярность в решении следует из условия, что оно имеет определенную энергию и угловой момент, и может отсутствовать, если это условие ослабить.

Чтобы увидеть, что калибровочная функция (2.4.3), действительно, отвечает разложению в окрестности горизонта, используя преобразование Лоренца, переведем ее в единицу. По существу, согласно (2.4.8) и (2.5.13) преобразование Лоренца $\Lambda(a,b|W_2)$ действует на $g(a,b|W_1,W_2)$ как

$$\tilde{g}(a,b|W_1,W_2) = g(a,b|W_1,W_2) \star \Lambda^{-1}(a,b|W_2) = g(a,b|W_1W_2,1)$$

и, следовательно,

$$\tilde{g}(a,b|W_1(X_0),W_2(X_0)) = 1 \quad \text{iff} \quad W_1(X_0)W_2(X_0) = 1\,.$$

Выбор калибровочной функции (2.4.15) с $H_\gamma{}^\delta = \delta_\gamma{}^\delta$ соответствует $S_\gamma{}^\delta = (HW_1W_2)_\gamma{}^\delta = \delta_\gamma{}^\delta$ в точке $X_0 = \{r = r_+, t = 0, \phi = 0\}$, принадлежащей горизонту. Действительно, $S_0(X_0)_\gamma{}^\delta = \delta_\gamma{}^\delta$ означает, что $v_0 = x_0 = y_0 = 0$, $u_0 = 1$, что соответствует точке $r_0 = r_+$, $t_0 = \phi_0 = 0$. Чтобы избежать этой проблемы, мы используем преобразование (2.4.15) и получаем (2.4.14). Теперь $S(X_0)_\gamma{}^\delta = \delta_\gamma{}^\delta$ в регулярной точке $X_0 = \{r_0 > r_+, t = 0, \phi = 0\}$, кроме случая $\alpha = 1, \beta = 0$, и возможен совместный развернутый анализ, по крайней мере, в некоторой ее окрестности. Параметрическая регуляризация с $\alpha \neq 1$ и $\beta \neq 0$ необходима для промежуточных вычислений (см. приложение II.b), тогда как предел $\alpha \to 1$, $\beta \to 0$ будет взят в окончательном выражении для $C(b|X)$. Напомним, что неопределенность в $H_\gamma{}^\delta$ не влияет на связность БТЗ черной дыры (2.3.19), (2.3.20).

2.6 Звездочная реализация векторов Киллинга в AdS_3

Любой вектор Киллинга $\frac{\partial}{\partial\zeta}$ пространства AdS_3 является линейной комбинацией J_{ab} (2.1.14), то есть,

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \Omega^{ab}J_{ab}\,, \tag{2.6.1}$$

где $\Omega^{ab} = -\Omega^{ba}$ — некоторые константы. В звездочной алгебре вектору Киллинга соответствует генератор глобальной симметрии ξ, принадлежащий алгебре $sp(2) \oplus sp(2)$, то есть,

$$\xi = (\varkappa_1)^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta} + (\varkappa_2)^{\alpha\beta}P_{\alpha\beta} \tag{2.6.2}$$

с некоторыми постоянными матрицами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Чтобы найти ξ_t и ξ_ϕ, соответствующие векторам Киллинга метрики БТЗ $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial\phi}$, вычислим действие генераторов $L_{\alpha\beta}$ и $P_{\alpha\beta}$ на скалярном поле на массовой оболочке. При этом будем использовать калибровочную функцию (2.4.15) с $S_{\alpha\beta}$ (2.4.14).

Введем производящие параметры $\xi^L = (\varkappa_1)^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}$ для генератора преобразований Лоренца и $\xi^P = (\varkappa_2)^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}$ — для генератора AdS-трансляций. Используя (2.4.2), (2.4.3), (2.5.11) и уравнения движения, нетрудно получить (подробности см. в приложении II.a)

$$\delta^L C(X) = \frac{1}{2}(\varkappa_1)^{\alpha\beta} \mathcal{L}_{\alpha\beta,}{}^n \partial_n C(X) \tag{2.6.3}$$

и

$$\delta^P C(X) = (\varkappa_2)^{\alpha\beta} \mathcal{P}_{\alpha\beta,}{}^n \partial_n C(X)\,, \tag{2.6.4}$$

где

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta,n} = \partial_n S_{\alpha\gamma} S_\beta{}^\gamma - \partial_n S_{\gamma\alpha} S^\gamma{}_\beta\,, \quad \mathcal{L}_{\alpha\beta,n} = \frac{1}{2}(\partial_n S_{\alpha\gamma} S_\beta{}^\gamma + \partial_n S_{\gamma\alpha} S^\gamma{}_\beta)\,. \tag{2.6.5}$$

Подставляя (2.4.14) в (2.6.5) и сравнивая получившиеся выражения с векторами Киллинга пространства AdS (2.1.14), имеем

$$\mathcal{L}_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} \alpha\beta(J_{12} - J_{03}) - \alpha^2 J_{23} - \beta^2 J_{01} + J_{02} & -\alpha\beta(J_{01} + J_{23}) - \alpha^2 J_{03} + \beta^2 J_{12} \\ -\alpha\beta(J_{01} + J_{23}) - \alpha^2 J_{03} + \beta^2 J_{12} & \alpha\beta(J_{12} - J_{03}) - \alpha^2 J_{23} - \beta^2 J_{01} - J_{02} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_{\gamma\delta} = 2\begin{pmatrix} \alpha\beta(J_{12} - J_{03}) - \beta^2 J_{23} - \alpha^2 J_{01} + J_{13} & -\alpha\beta(J_{01} + J_{23}) - \beta^2 J_{03} + \alpha^2 J_{12} \\ -\alpha\beta(J_{01} + J_{23}) - \beta^2 J_{03} + \alpha^2 J_{12} & \alpha\beta(J_{12} - J_{03}) - \beta^2 J_{23} - \alpha^2 J_{01} - J_{13} \end{pmatrix}. \tag{2.6.6}$$

Отсюда следует, что компоненты J_{03} и J_{12}, входящие в векторы Киллинга метрики БТЗ (2.1.15) и (2.1.16), имеют вид

$$J_{03} = -\frac{1}{4}\tau_1^{\gamma\delta}\mathcal{P}_{\gamma\delta} - \frac{1}{2}\tau_2^{\gamma\delta}\mathcal{L}_{\gamma\delta}\,, \tag{2.6.7}$$

$$J_{12} = \frac{1}{4}\tau_2^{\gamma\delta}\mathcal{P}_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}\tau_1^{\gamma\delta}\mathcal{L}_{\gamma\delta}\,, \tag{2.6.8}$$

где

$$\tau_1^{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} -\alpha\beta & \beta^2 \\ \beta^2 & -\alpha\beta \end{pmatrix}, \qquad \tau_2^{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} -\alpha\beta & \alpha^2 \\ \alpha^2 & -\alpha\beta \end{pmatrix}. \tag{2.6.9}$$

Заметим, что матрицы τ_1 и τ_2 удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{2}\tau_{1\,\gamma\delta}\tau_1^{\gamma\delta} = \beta^2, \quad \frac{1}{2}\tau_{2\,\gamma\delta}\tau_2^{\gamma\delta} = \alpha^2, \quad \tau_{1\,\gamma\delta}\tau_2^{\gamma\delta} = 0,$$

$$\tau_2^{\gamma\delta} - \tau_1^{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, осцилляторное представление векторов Киллинга метрики БТЗ в реализации модуля Фока имеет вид

$$\xi_t = \frac{1}{2}(r_-\tau_1^{\gamma\delta} + r_+\tau_2^{\gamma\delta})L_{\gamma\delta} + \frac{1}{4}(r_+\tau_1^{\gamma\delta} + r_-\tau_2^{\gamma\delta})P_{\gamma\delta}\,, \tag{2.6.10}$$

$$\xi_\phi = -\frac{1}{2}(r_+\tau_1^{\gamma\delta} + r_-\tau_2^{\gamma\delta})L_{\gamma\delta} - \frac{1}{4}(r_-\tau_1^{\gamma\delta} + r_+\tau_2^{\gamma\delta})P_{\gamma\delta}\,. \tag{2.6.11}$$

2.7 Явные решения для безмассовых полей

Зная осцилляторную реализацию векторов Киллинга метрики БТЗ (2.6.10), (2.6.11), перепишем уравнения (2.5.18) на производящую функцию для поля с определенной энергией и угловым моментом в виде

$$(\tau_2-\tau_1)^{\gamma\delta}(L-\frac{1}{2}P)_{\gamma\delta}\star C(b)\star|0\rangle\langle 0| \;=\; -4PC(b)\star|0\rangle\langle 0|\,, \tag{2.7.1a}$$

$$(\tau_2+\tau_1)^{\gamma\delta}(L+\frac{1}{2}P)_{\gamma\delta}\star C(b)\star|0\rangle\langle 0| \;=\; -4QC(b)\star|0\rangle\langle 0|\,, \tag{2.7.1b}$$

где P и Q определены в (2.5.16). Пусть

$$b^\alpha=(p,q)\,. \tag{2.7.2}$$

Тогда система (2.7.1) сводится к двум дифференциальным уравнениям второго порядка

$$(p\,\partial_p-q\,\partial_q+p\,q-\partial_p\partial_q)C(p,q)=-4PC(p,q), \tag{2.7.3}$$

$$\begin{aligned}&-\alpha\beta\left(\partial_p\partial_p+\partial_q\partial_q+p^2+q^2+2p\,\partial_q-2q\,\partial_p\right)C(p,q)\\&+(\alpha^2+\beta^2)\left(p\,\partial_p-q\,\partial_q+\partial_p\partial_q-p\,q\right)C(p,q)=-4QC(p,q).\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Заметим, что случай $\alpha=1$, $\beta=0$ вырожден, поскольку сумма уравнений (2.7.3) и (2.7.4) сводится к уравнению первого порядка. В результате система не имеет регулярных по b^α решений. Действительно, в этом случае из (2.7.3) и (2.7.4) следует, что $(p\partial_p-q\partial_q)C(p,q)=-2(P+Q)C(p,q)$, и поэтому $C(p,q)=p^{-2(P+Q)}\chi(pq)$ не регулярна по осцилляторам b^α для физических значений P и Q.

При помощи подстановки $C(p,q)=e^{p\,q}f(p,q)$ уравнение (2.7.3) сводится к

$$(\partial_p\partial_q+2q\,\partial_q)f(p,q)=(4P-1)f(p,q)\,. \tag{2.7.5}$$

Его решение можно представить в виде

$$f(p,q)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\alpha}{4\beta}s^2}g(s)e^{ps}(\frac{s}{2}+q)^{2P-\frac{1}{2}}ds\,, \tag{2.7.6}$$

где $g(s)$ — произвольная функция. Подставляя (2.7.6) в (2.7.4), получаем дифференциальное уравнение на $g(s)$

$$\alpha\beta g''(s)-\frac{1}{2}sg'(s)-(Q+\frac{1}{4})g(s)=0, \tag{2.7.7}$$

которого является вырожденным гипергеометрическим уравнением. Общее решение можно написать в интегральной форме как суперпозицию двух базисных решений

$$\int\limits_0^\infty w^{2Q-\frac{1}{2}} e^{-\alpha\beta w^2+sw} dw \qquad \text{и} \qquad \int\limits_0^\infty w^{2Q-\frac{1}{2}} e^{-\alpha\beta w^2-sw} dw \,. \tag{2.7.8}$$

Интегралы, очевидно, сходятся, поскольку $\alpha\beta > 0$ и $Re\, Q > -\frac{1}{4}$.

Обозначим общее решение (2.7.7)

$$\int w^{2Q-\frac{1}{2}} e^{-\alpha\beta w^2+sw} dw \,, \tag{2.7.9}$$

понимая под этим линейную комбинацию интегралов

$$\int\limits_0^\infty w^{2Q-\frac{1}{2}} e^{-\alpha\beta w^2+sw} dw \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{-\infty}^0 w^{2Q-\frac{1}{2}} e^{-\alpha\beta w^2+sw} dw \,. \tag{2.7.10}$$

Заметим, что, несмотря на многозначность второго интеграла в (2.7.10), неопределенность, выражающаяся в виде произвольного постоянного фазового множителя, всегда может быть включена в константу интегрирования.

Используя $g(s)$ из (2.7.9) и делая замену переменной интегрирования $s \to s - 2q$ в (2.7.6), получаем производящую функцию в виде

$$\begin{aligned} C(p,q) &= e^{-p\,q} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds \int dw\, e^{-\frac{\alpha}{4\beta}(s-2q)^2 - \alpha\beta w^2 + (s-2q)w + sp} s^{2P-\frac{1}{2}} w^{2Q-\frac{1}{2}} \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds \int dw\, e^{m_{\gamma\delta} b^\gamma b^\delta + n_\gamma b^\gamma} e^{-\alpha\beta w^2 + sw - \frac{\alpha}{4\beta} s^2} s^{2P-\frac{1}{2}} w^{2Q-\frac{1}{2}} \,, \end{aligned} \tag{2.7.11}$$

где

$$m_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}, \qquad n_\gamma = (s, \frac{\alpha}{\beta} s - 2w).$$

Используя (2.7.11) и (2.4.15), вычислим производящую функцию (2.5.13), переопределив переменную интегрирования $\beta w \to w$ и положив в конце $\alpha = 1$, $\beta = 0$. С точностью до постоянного множителя, имеем следующее интегральное представление для производящей функции $C(b|X)$ (см. приложение II.b):

$$\begin{aligned} C(b|t,r,\phi) = e^{-iEt} e^{iL\phi} A(r)^{-Q-\frac{1}{2}} (1 - A(r)^{-1})^{\frac{P+Q}{2}} e^{-b^1 b^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds \int dw\, s^{2P-\frac{1}{2}} w^{2Q-\frac{1}{2}} \\ \times \exp\left(-\frac{s^2}{4} - \frac{w^2}{4A(r)} + \frac{sw}{2A(r)} + \mu(r) s b^1 - \eta(r) w b^2 \right), \end{aligned} \tag{2.7.12}$$

где $A(r)$, $\mu(r), \eta(r)$ определены в (2.1.10) и (2.3.17), соответственно. Заметим, что, как уже обсуждалось в разделе 2.5 и в начале этой главы, данный формализм не позволяет положить $\alpha = 1, \beta = 0$ в $C(b)$ до выполнения звездочного умножения с $g^{-1}(a, b|W_1, W_2)$.

По построению производящая функция (2.7.12) содержит решения для безмассовых полей в метрике БТЗ черной дыры вместе со всеми их производными на массовой оболочке в виде коэффициентов разложения по степеням осцилляторов b^α. Используя стандартное интегральное представление для гипергеометрической функции (см., например, [54]), перепишем производящую функцию (2.7.12) в виде

$$
\begin{aligned}
C(b|t, r, \phi) = e^{-iEt}e^{iL\phi}(1 - A^{-1})^{\frac{P+Q}{2}}A^{-\frac{1}{4}}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu^m(-\eta)^n}{m!n!}A^{\frac{n}{2}}(b^1)^m(b^2)^n e^{-b^1b^2}\\
\times\left[K_1 F\left(P + \frac{2m+1}{4}, Q + \frac{2n+1}{4}, \frac{1}{2}; A^{-1}\right) + K_2 A^{-\frac{1}{2}} F\left(P + \frac{2m+3}{4}, Q + \frac{2n+3}{4}, \frac{3}{2}; A^{-1}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{2.7.13}
$$

где K_1, K_2 — произвольные константы интегрирования, а P, Q определены в (2.5.16).

Как уже было сказано в разделе 2.5, скалярное поле описывается функцией $C(0|X)$ (2.5.4). Таким образом, из (2.7.13) имеем

$$
\begin{aligned}
C(t, r, \phi) = e^{-iEt}e^{iL\phi}\left(1 - A^{-1}\right)^{\frac{P+Q}{2}}A^{-\frac{1}{4}}\\
\times\left[K_1 F\left(P + \frac{1}{4}, Q + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; A^{-1}\right) + K_2 A^{-\frac{1}{2}} F\left(P + \frac{3}{4}, Q + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}; A^{-1}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{2.7.14}
$$

Этот результат совпадает с решением уравнения (2.5.9) для безмассового скаляра в метрике БТЗ черной дыры, первоначально найденным в [48, 49] для поля произвольной массы.

Аналогично, из (2.7.13) сразу получаем решение для спинорного поля $C_\alpha(X)$ (2.5.4)

$$
C_\alpha(t, r, \phi) = e^{-iEt}e^{iL\phi}\left(1 - A^{-1}\right)^{\frac{P+Q}{2}}A^{-\frac{1}{4}}(K_1\,\psi_{1\alpha} + K_2\,\psi_{2\alpha}),
\tag{2.7.15}
$$

где

$$
\psi_1 = \begin{pmatrix} \mu F\left(P + \frac{3}{4}, Q + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; A^{-1}\right) \\ -(Q + \frac{1}{4})\eta F\left(P + \frac{3}{4}, Q + \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; A^{-1}\right) \end{pmatrix}
$$

и

$$
\psi_2 = \begin{pmatrix} (P + \frac{1}{4})\mu A^{-\frac{1}{2}} F\left(P + \frac{5}{4}, Q + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}; A^{-1}\right) \\ -\eta A^{\frac{1}{2}} F\left(P + \frac{1}{4}, Q + \frac{3}{4}, \frac{1}{2}; A^{-1}\right) \end{pmatrix}.
$$

Различный выбор функций $\mu(r), \eta(r)$ (2.3.17) параметризует различные лоренцевы калибровки в общем решении уравнения Дирака (2.5.10) с определенной энергией E и угловым моментом L в метрике БТЗ черной дыры. Заметим, что наша калибровка отличаются от используемой в [50, 52].

2.8 Экстремальная БТЗ черная дыра

Точные решения уравнений Клейна-Гордона и Дирака в поле экстремальной БТЗ черной дыры были впервые найдены в [55] и [56]. В экстремальном случае ($M = |J|$) оба горизонта совпадают, и уже нельзя пользоваться параметризацией (2.1.9). Как и прежде, БТЗ связность $w_0(a, b|X)$ выражается через калибровочную функцию $g(a, b|W_1, W_2)$, но теперь координаты X^a параметризованы иначе (см. [44]). В экстремальном случае вектор Киллинга, отвечающий за факторизацию (2.1.13), содержит дополнительные члены, от которых нельзя избавиться $SO(2,2)$ преобразованиями

$$\frac{\partial}{\partial\phi} = -\lambda r_+ J_{12} + \lambda r_- J_{03} + J_{13} - J_{23}. \tag{2.8.1}$$

Следовательно, система уравнений (2.7.1) имеет другой вид. К счастью, для того чтобы получить решения в экстремальном случае, не нужно решать эти уравнения снова. Как было отмечено, например, в [57], можно просто перейти к пределу в общих решениях (2.7.14) и (2.7.15). А именно: произведение

$$A^{-1}P = \varkappa = i\frac{(E-L)(r_+ + r_-)}{2(r^2 - r_-^2)}$$

регулярно в пределе $r_+ \to r_-$ (P определено в (2.5.16)). Подставим теперь $A^{-1} = \frac{\varkappa}{P}$ в (2.7.14), (2.7.15) и рассмотрим предел $r_+ \to r_-$ или, другими словами, $P \to \infty$. Результат может быть представлен в терминах функций Уиттакера $M_{p,q}(x)$ [58].

Для безмассового скаляра имеем

$$C(t, r, \phi) = e^{-iEt}e^{iL\phi}\left(K_1 M_{-Q,-\frac{1}{4}}(\varkappa_e) + K_2 M_{-Q,\frac{1}{4}}(\varkappa_e)\right), \tag{2.8.2}$$

где

$$\varkappa_e = i\frac{(E-L)\, r_e}{r^2 - r_e^2} \tag{2.8.3}$$

и r_e — горизонт экстремальной БТЗ черной дыры. Легко убедиться, что это решение действительно удовлетворяет конформному уравнению Клейна-Гордона, записанному в метрике экстремальной черной дыры.

Для безмассового спинора имеем

$$C_\alpha(t, r, \phi) = e^{-iEt}e^{iL\phi}(K_1\, \psi_{1\alpha} + K_2\, \psi_{2\alpha}), \tag{2.8.4}$$

где

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \mu M_{-Q,-\frac{1}{4}}(\varkappa_e) \\ -(Q+\frac{1}{4})\eta\varkappa_e^{-\frac{1}{2}} M_{-Q,\frac{1}{4}}(\varkappa_e) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} \mu M_{-Q,\frac{1}{4}}(\varkappa_e) \\ -\eta\varkappa_e^{-\frac{1}{2}} M_{-Q,-\frac{1}{4}}(\varkappa_e) \end{pmatrix},$$

а K_1, K_2 — произвольные константы.

2.9 Симметрии безмассовых полей в метрике БТЗ черной дыры

Любое вакуумное решение (2.3.1) уравнения (2.3.2) нарушает локальную симметрию высших спинов до глобальной, порождаемой подалгеброй стабильности с параметром $\epsilon_0(a,b|X)$, удовлетворяющим (2.3.6). Граничные условия БТЗ (2.1.13) сужают пространство решений (2.3.6), таким образом, представляя собой (нелокальный) механизм спонтанного нарушения симметрии. Другими словами, только те симметрии остаются глобально определенными при факторизации (2.1.13), которые коммутируют с вектором Киллинга ξ_ϕ, отвечающим за отождествление,

$$[\xi(a,b), \xi_\phi]_\star = 0\,, \tag{2.9.1}$$

где $\xi(a,b)$ — производящий параметр в уравнении (2.4.2). Пространства решений (2.9.1) различны для общего случая и случая экстремальной черной дыры. Поэтому рассмотрим их независимо.

Начнем с общего случая $r_+^2 - r_-^2 > 0$ и вектора Киллинга $\frac{\partial}{\partial\phi}$, заданного в (2.1.15) и имеющего звездочную реализацию ξ_ϕ (2.6.11). Для согласования результатов с (2.4.3) положим $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ так, что

$$\xi_\phi = -\frac{1}{2} r_- \tau^{\gamma\delta} L_{\gamma\delta} - \frac{1}{4} r_+ \tau^{\gamma\delta} P_{\gamma\delta}\,, \quad \tau^{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9.2}$$

При решении уравнения (2.9.1) удобнее перейти к новому базису осцилляторов p_α, q_β

$$\begin{gathered} p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + b_1)\,, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - b_1)\,, \\ q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 - b_2)\,, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 + b_2) \end{gathered} \tag{2.9.3}$$

удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[p_\alpha, p_\beta]_\star = [q^\alpha, q^\beta]_\star = 0\,, \qquad [p_\alpha, q^\beta]_\star = \delta_\alpha{}^\beta\,, \tag{2.9.4}$$

так что параметр ξ_ϕ имеет следующий простой вид

$$\xi_\phi = -\frac{1}{2} A_\alpha{}^\beta p_\beta q^\alpha \,, \quad A_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} r_+ + r_- & 0 \\ 0 & r_- - r_+ \end{pmatrix} . \tag{2.9.5}$$

Заметим, что поскольку коммутационные соотношения не изменились, для звездочного произведения, как и прежде, можно использовать формулу (2.2.4) с заменой a и b на p и q, соответственно.

Из уравнения (2.9.1) следует (принимая во внимание (II.b.1))

$$A_\alpha{}^\beta \Big(p_\beta \frac{\partial}{\partial p_\alpha} + q^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\beta} \Big) \xi(p,q) = 0 \,. \tag{2.9.6}$$

Искомые инфинитезимальные симметрии высших спинов соответствуют локальным преобразованиям с конечным числом пространственно-временных производных. Соответствующие производящие параметры симметрии $\xi(p,q)$ описываются полиномиальными по осцилляторам функциями. Класс полиномиальных решений (2.9.1) характеризуется параметром

$$\sigma = \frac{r_+ + r_-}{r_+ - r_-}. \tag{2.9.7}$$

Имеем следующие случаи.

- $\sigma \notin \mathbb{N}$

Для любого положительного нецелого σ общее решение (2.9.6) имеет вид

$$\xi(p,q) = \sum R_{mn} (q_1 p_2)^m (q_2 p_1)^n \sim \sum \tilde{R}_{mn} (\xi_\phi)^m (\xi_t)^n \,, \tag{2.9.8}$$

где R_{mn} — произвольные постоянные. Заметим, что конформная алгебра $sp(4)$, заданная различными билинейными комбинациями осцилляторов (2.9.3), нарушена до $u(1) \oplus u(1)$ подалгебры, состоящей из векторов Киллинга БТЗ ξ_ϕ и ξ_t (эквивалентно, $q_1 p_2$ и $q_2 p_1$).

- $\sigma = 2, 3, \dots$

В случае положительных целых σ выживает более широкий класс симметрий высших спинов. Общее решение (2.9.6) имеет вид

$$\xi(p,q) = \sum R_{n_1 n_2 m_1 m_2} (q_1 p_2)^{n_1} (q_2 p_1)^{n_2} (p_1 p_2^\sigma)^{m_1} (q_1 q_2^\sigma)^{m_2} \,. \tag{2.9.9}$$

Конформная алгебра $sp(4)$ по-прежнему нарушена до $u(1) \oplus u(1)$. Условие $\sigma = 2, 3, \dots$ имеет вид некоторого квантования массы M в терминах углового момента J, поскольку $\sigma = \sqrt{\frac{M+J\lambda}{M-J\lambda}}$. В этом случае $\rho^+ = (\rho^-)^\sigma$, то есть один из операторов голономии, участвующих в факторизации пространства AdS, является целой степенью другого[5].

[5]Мы признательны С. Карлипу, обратившему наше внимание на этот факт.

- $\sigma = 1$

Это случай невращающейся черной дыры $J = 0$. Полиномиальные решения для $\xi(p, q)$ имеют вид

$$\xi(p, q) = \sum R_{m_1 m_2 n_1 n_2} (q_1 p_2)^{m_1} (q_2 p_1)^{m_2} (p_1 p_2)^{n_1} (q_1 q_2)^{n_2} \,. \tag{2.9.10}$$

Этот случай выделен тем, что выживает большая часть конформных симметрий. Остаточные симметрии порождены билинейными комбинациями вида $q_1 p_2$, $q_2 p_1$, $p_1 p_2$, $q_1 q_2$, что изоморфно алгебре $gl(2)$. Помимо векторов Киллинга БТЗ она содержит генераторы специальных конформных преобразований, порожденных $b_1 b_1$ и $b_2 b_2$.

Рассмотрим теперь экстремальный случай. Вектор Киллинга экстремальной черной дыры ($r_- = r_+ = r_e$), отвечающий за факторизацию, приведен в (2.8.1). Используя (2.6.6) и снова полагая $\alpha = 1$, $\beta = 0$, имеем для ξ_ϕ в терминах осцилляторов p, q

$$\xi_\phi = -r_e p_1 q_2 + \frac{1}{2}\left((p_1)^2 - (q_1)^2\right) . \tag{2.9.11}$$

Выполнив простые звездочные вычисления, перепишем (2.9.1) в виде

$$r_e\Big(p^2 \frac{\partial}{\partial p^2} - q^1 \frac{\partial}{\partial q^1}\Big)\xi - p^2 \frac{\partial \xi}{\partial q^1} + q^2 \frac{\partial \xi}{\partial p^1} = 0 \,. \tag{2.9.12}$$

Случаи $r_e \neq 0$ и $r_e = 0$ (то есть, $M = J = 0$) требуют отдельного рассмотрения.

- $r_e \neq 0$

Выпишем общее решение уравнения (2.9.12) в классе полиномов

$$\xi(p, q) = \sum R_{mn} (p_1)^m (2 r_e q_2 - p_1)^m (q_1)^n \,. \tag{2.9.13}$$

Заметим, что, помимо стандартной $u(1) \oplus u(1)$ симметрии, порожденной векторами Киллинга ξ_t и ξ_ϕ, экстремальная черная дыра имеет один спинор Киллинга, порожденный q_1, что согласуется с [59], где была обнаружена суперсимметрия экстремальной черной дыры.

- $r_e = 0$

В случае “вакуумной” черной дыры $M = J = 0$ получаем максимальное число суперсимметрий и общее решением для $\xi(p, q)$ вида

$$\xi(p, q) = \sum R_{mnk} (p_1)^m (q_1)^n (q_1 q_2 + p_1 p_2)^k \,. \tag{2.9.14}$$

Имеются две суперсимметрии [59], порожденные p_1 и q_1, и часть конформных симметрий p_1p_1, q_1q_1, q_1p_1, $q_1q_2+p_1p_2$, изоморфные $E_2 \oplus u(1)$, где E_2 — алгебра движений двумерной евклидовой плоскости.

Заметим, что в нашем подходе формулы законов преобразований симметрий находятся элементарно. Для любого производящего параметра $\xi(a,b)$ соответствующий генератор симметрии (2.4.2) получается в результате дифференцирования производящего параметра (II.a.1) (см. приложение II.a) по источникам μ_α, η_β.

2.10 Заключительные замечания

В данной главе было показано, что БТЗ черная дыра может быть точно описана в рамках формализма звездочной алгебры, лежащего в основе современной нелинейной калибровочной теории высших спинов. Удовлетворяя условию нулевой кривизной в алгебре $o(2,1) \oplus o(2,1)$, БТЗ черная дыра, тем самым, оказывается точным решением нелинейной теории высших спинов в трех измерениях. Также показано, как данный формализм позволяет решать свободные полевые уравнения в метрике черной дыры.

Найдены остаточные пространственно-временные симметрии и симметрии высших спинов безмассовых полей в поле БТЗ черной дыры. В случае $M > 0$ неэкстремальной БТЗ черной дыры конформная алгебра $o(3,2) \sim sp(4)$ оказывается нарушенной до $u(1) \oplus u(1)$ подалгебры, построенной из векторов Киллинга БТЗ, в случае $J > 0$ и до $gl(2)$ в случае $J = 0$, соответственно. При $\sigma = \sqrt{\frac{M+J\lambda}{M-J\lambda}} = 1, 2, \ldots$ остаточных симметрий высших спинов становится больше. У нас нет какой-либо физической интерпретации этого явления. Анализ экстремальной черной дыры воспроизводит уже известные результаты, касающиеся структуры (супер)симметрий пространства-времени, и определяет симметрию высших спинов.

Результаты данной главы основаны на работе [101].

Глава 3

Развернутая формулировка AdS_4 черной дыры

Эта глава посвящена бескоординатному описанию четырехмерных черных дыр Эйнштейна–Максвелла в рамках развернутой формулировки. Содержание главы основано на работе [102], в которой мы показали, что черная дыра Керра в четырёхмерном AdS пространстве может быть описана в рамках развернутой формулировки на основе уравнений для вектора Киллинга и его ковариантной производной (поле Папапетру). Было явно показано, что развернутая система для AdS_4 черной дыры Керра получается из уравнения для AdS_4 параметра глобальной симметрии путем простого переопределения полей. Основной мотивацией данной главы является разработка и расширение развернутого формализма [102] для более широкого класса черных дыр, включающих электрический заряд и НУТ-параметр.

Такой подход хорошо приспособлен для построения чернодырного решения в $4d$ калибровочной теории высших спинов, которая сформулирована на твисторном языке [60, 13, 33] (см. также обзоры по теории высших спинов [62, 63, 64, 65]). В [102] мы показали, что, по крайней мере на свободном уровне, черная дыра имеет естественное обобщение на высшие спины. Естественный вопрос для дальнейшего анализа – появятся ли нелинейные поправки при включении взаимодействия? Чтобы изучать этот интересный вопрос, необходимо иметь описание классических черных дыр в духе развернутой формулировки теории высших спинов [60, 13, 33]. В этой главе мы покажем, что такая формулировка действительно возможна.

Мы надеемся, что полученные в этой главе результаты сами по себе представляются важными для приложений в физике черных дыр. В частности, то что широкий класс черных дыр описан в координатно–независимой форме позволяет легко выписывать метрику в любых нужных координатах. Более того, выбирая нужным образом некоторые свободные параметры интегрирования можно свести метрику к виду Керра-Шилда, двойного Керра-Шилда или к “обобщенному” виду Картера-Плебанского в зависимости от числа параметров (“волос”), характеризующих черную дыру.

В основе метода [102], с помощью которого была получена развернутая формулировка AdS_4 черной дыры Керра, лежат следующие известные факты из теории черных дыр [66]:

- Четырехмерная черная дыра теории Эйнштейна принадлежит типу D по Петрову. В асимптотически плоском пространстве–времени её тензор Римана устроен из производной вектора Киллинга (поле Папапетру).

- Анзац Керра-Шилда сводит нелинейные уравнения Эйнштейна к линейным уравнениям Паули–Фирца, как в плоском пространстве, так и в AdS.

В [102], в рамках спинорного подхода, первое свойство было обобщено для случая AdS_4 черной дыры, что привело к описанию тензора Вейля AdS_4 черной дыры Керра в терминах AdS_4 поля Папапетру. Далее было показано, что представление Керра-Шилда AdS_4 черной дыры возникает из AdS_4 вектора Киллинга с помощью специальных проекторов. Это позволило нам описать черную дыру Керра в AdS_4 ковариантном виде через переопределение полей входящих в уравнение AdS_4 ковариантного постоянства параметра глобальной симметрии.

В данной главе мы следуем идее [102] о том, что уравнение на параметр глобальной симметрии AdS_4

$$D_0 K_{AB} = 0\,, \qquad D_0^2 = 0\,, \tag{3.0.1}$$

где[1] $K_{AB}(x) = K_{BA}(x)$ – параметр AdS_4 глобальной симметрии, $A, B = 1, \ldots, 4$ – AdS_4 спинорные индексы и D_0 – AdS_4 ковариантный дифференциал, допускает параметрическую деформацию, приводящую к еще более широкому классу черных дыр. Отличием является использование вектора Киллинга и поля Максвелла без источника при переписывании (3.0.1), а не поля Папапетру как в [102]. Такое переопределение оказывается очень удобным и учитывает тот факт, что все четырехмерные черные дыры Эйнштейна–Максвелла имеют тензор Вейля состоящий из вакуумного тензора Максвелла. Мы покажем, что простая совместная деформация уравнения (3.0.1), сохраняющая у системы вектор Киллинга и тензор Максвелла без источника, приводит к кривизне типа D по Петрову, причем тензор Риччи определяется тензором

[1] обозначения собраны в приложении III.

энергии–импульса электромагнитного поля заряда черной дыры и постоянной скалярной кривизной пространства AdS_4 ($\Lambda = -3\lambda^2$). В результате, система содержит три вещественных параметра $\mathcal{M} \in \mathbb{C}$ и $\mathbf{q} \in \mathbb{R}$ вместо одного действительного в [102], отвечающего за массу решения Керра. Мы покажем, что Re $\mathcal{M}$ и Im $\mathcal{M}$ отвечают за чернодырные[2] массу и НУТ-заряд, соответственно, а $\mathbf{q} = 2(e^2 + \mathrm{g}^2)$, где e и g – электрический и магнитный заряды, соответственно.

Полученная развернутая система описывает так называемое семейство решений Картера-Плебанского [67, 68, 69], которое помимо действительных параметров кривизны Re $\mathcal{M}$, Im $\mathcal{M}$, $\mathbf{q}$, и λ, содержит две кинематические константы: угловой момент a и некоторый дискретный параметр ϵ. Мы показываем, что эти кинематические параметры возникают в развернутой чернодырной системе (РЧС) как два инварианта (два первых интеграла)

$$C_2 = \frac{1}{4} K_{AB} K^{AB}\,, \qquad C_4 = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(K^4) \tag{3.0.2}$$

AdS_4 алгебры $sp(4)$ и являются модулями, характеризующими вакуумную развернутую систему. Например, статической черной дыре отвечают

$$C_4 = C_2^2\,. \tag{3.0.3}$$

Чтобы получить явные выражения для метрики, соответствующей развернутым уравнениям и убедится в том, что она действительно принадлежит классу Картера-Плебанского, мы используем эффективный метод интегрирующего потока, аналогичный методу развитому в [46, 33] для нелинейных уравнений высших спинов. Применяя требование совместности $[\partial_\chi, d] = 0$ к РЧС, где χ – деформационные параметры и d – пространственно-временной дифференциал де Рама, мы получаем дифференциальные уравнения первого порядка по параметрам χ для всех полей входящих в систему, то есть тетрады, вектора Киллинга и так далее. Полученные уравнения для потоков легко интегрируются с начальными условиями $\mathcal{M} = 0, \mathbf{q} = 0$ отвечающим AdS_4 вакууму, приводя к координатно-инвариантному описанию общего семейства метрик Картера-Плебанского.

Дальнейший материал излагается в следующем порядке. В разделе 3.1 мы резюмируем основные результаты полученные в этой главе. В разделе 3.2 на языке формализма Картана описывается теория гравитации Эйнштейна, что является наиболее подходящим способом описания для дальнейшего анализа. В разделе 3.3 мы

[2]Термин черная дыра, постоянно используемый в данной главе, строго говоря является жаргонным, поскольку мы не заботимся о том, чтобы параметры решения принадлежали допустимой области, определяемой отсутствием голых сингулярностей.

переписываем уравнение для вектора Киллинга в AdS_4 в развернутой форме. Затем изучаются его свойства, такие как существование первых интегралов, дискретной симметрии, а также четырех векторов Керра-Шилда. В частности, в подразделе 3.3.4 обсуждаются $sp(4)$ инварианты алгебры симметрии AdS_4 в связи с симметриями Киллинга системы. Развернутая система для общей черной дыры получается после параметрической деформации исходной AdS_4 развернутой системы в разделе 3.4. Мы показываем, что РЧС наследует много свойств и симметрий, относящихся к недеформированной системе. Показано, что она выражает тензор Вейля в терминах поля Максвелла, тем самым, автоматически делая его типом D по Петрову. В подразделе 3.4.1 перечислены некоторые полезные свойства полученных развернутых уравнений. В разделе 3.5 мы используем технику интегрирующего потока, чтобы получить дифференциальные уравнения первого порядка по параметрам деформации, которые описывают общее чернодырное решение. Подробности вывода уравнений интегрирующих потоков описаны в подразделе 3.5.1. Интегрирование этих уравнений с AdS_4 начальными условиями проведено в разделе 3.6, приводя к AdS_4 ковариантному и координатно-независимому описанию метрики черной дыры. В разделе 3.7 мы используем некоторую конкретную систему координат AdS_4 пространства-времени и его развернутой системы, чтобы потом, в разделе 3.8 воспроизвести канонический вид метрики Картера-Плебанского и отождествить модули РЧС с физическими параметрами черной дыры. Раздел 3.9 посвящен решениям чернодырного типа для безмассовых бозонных полей, которые естественно возникают в РЧС. Раздел 3.10 содержит обсуждение полученных результатов. Используемые обозначения собраны в приложении III. Для удобства, в приложении IV основные развернутые уравнения выписаны в векторных обозначениях.

3.1 Основные результаты

Основной результат данной главы – развернутая формулировка общей AdS_4 черной дыры Эйнштейна–Максвелла. Эта формулировка не зависит от выбора координат пространства–времени. Модули решений состоят из четырех вещественных параметров $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{q}$, являющихся, соответственно, массой черной дыры, ее НУТ-зарядом и комбинацией электрического и магнитного зарядов. Преобразования из $o(3,2) \sim sp(4,\mathbb{R})$ действуют на параметры чернодырного решения – сдвиги трёх координат ее положения, три Лоренц–буста (то есть скорости) и два угла, задающих направление плоскости вращения. Два инварианта AdS_4 преобразований параметризуют кинематические параметры черной дыры – ее угловой момент на единицу массы

a и параметр Картера-Плебанского ϵ. Нормировка последнего к $\epsilon = \pm 1$ или 0 задает масштаб параметров кривизны черной дыры $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{q}$. Заряд $\mathbf{q} = 2(e^2 + \mathrm{g}^2)$ возникает, как некоторый внутренний $u(1)$-инвариант, а электромагнитная дуальность смешивает $\mathbf{M} \leftrightarrow \mathbf{N}$ и $e \leftrightarrow \mathrm{g}$.

Чтобы воспроизвести черную дыру общего вида используется идея [102], согласно которой, черная дыра возникает в результате деформации условия ковариантного постоянства AdS_4 параметра глобальной симметрии (3.0.1). Как было показано в [70], любое решение (3.0.1) описывает некоторую симметрию AdS_4. В частности, из него возникает вектор Киллинга (см., например, [64]).

В самом деле, в терминах двух–компонентных спиноров K_{AB} имеет следующий вид (см. приложение III)

$$K_{AB} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}\varkappa_{\alpha\beta} & V_{\alpha\dot\beta} \\ V_{\beta\dot\alpha} & \lambda^{-1}\bar\varkappa_{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix}, \tag{3.1.1}$$

где λ – обратный AdS радиус и $V_{\alpha\dot\alpha}$ – некоторый вектор. Из (3.0.1) и (3.1.1) следует, что $V_{\alpha\dot\alpha}$ удовлетворяет условию

$$DV_{\alpha\dot\alpha} = \frac{1}{2}h^{\gamma}{}_{\dot\alpha}\varkappa_{\gamma\alpha} + \frac{1}{2}h_{\alpha}{}^{\dot\gamma}\bar\varkappa_{\dot\alpha\dot\gamma}\,, \tag{3.1.2}$$

где D – дифференциал Лоренца и $h_{\alpha\dot\alpha}$ – 1-форма AdS_4 тетрады. Как следствие (3.1.2), получаем[3]

$$D_{\alpha\dot\alpha}V_{\alpha\dot\alpha} = 0\,, \qquad D_{\alpha\dot\alpha}V^{\alpha\dot\alpha} = 0\,, \tag{3.1.3}$$

что в тензорных обозначениях эквивалентно

$$D_iV_j + D_jV_i = 0\,. \tag{3.1.4}$$

Условие (3.1.4) означает, что $V_{\alpha\dot\alpha}$ вектор Киллинга. Уравнение (3.0.1) не накладывает больше никаких дополнительных условий и равносильно (3.1.4) вместе с AdS_4 условием нулевой кривизны $D_0^2 = 0$. Поля $\varkappa_{\alpha\alpha}$ и $\bar\varkappa_{\dot\alpha\dot\alpha}$ отвечают (анти)-самодуальным частям 2-формы Киллинга[4] $\varkappa_{ij} = D_iV_j$ ($i, j = 1, \ldots, 4$ – мировые индексы).

Заметим, что система (3.0.1), которую можно понимать в компонентах (3.1.1), представляет собой простейший пример развернутых уравнений. В разделе 3.4 мы покажем, что простая совместная деформация условия (3.0.1) приводит к некоторой развернутой системе Киллинга–Максвелла и описывает геометрию Картера-Плебанского.

[3]Индексы обозначенные одной буквой подразумеваются симметризованными.

[4]Легко проверить, что она является замкнутым тензором Киллинга–Яно. Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно, то есть вектор построенный по замкнутому тензору Киллинга–Яно не обязательно есть вектор Киллинга.

Чтобы воспроизвести метрику в явном виде, мы показываем, что (3.0.1) порождает четыре вектора Керра-Шилда, устроенных из компонент (3.1.1) в координатно-независимом виде. Два из них k^i и n^i – вещественны

$$k_i k^i = n_i n^i = 0\,, \qquad k^i D_i k_j = n^i D_i n_j = 0\,, \tag{3.1.5}$$

а другие два комплексно сопряжены друг другу и ортогональны к k^i и n^i

$$l^{-+}_i l^{-+i} = l^{+-}_i l^{+-i} = 0\,, \qquad l^{-+i} D_i l^{-+}_j = l^{+-i} D_i l^{+-}_j = 0\,. \tag{3.1.6}$$

Их явная реализация в терминах AdS_4 полей K_{AB} будет дана в разделе 3.3. Кроме того, введем следующие лоренцевы скаляры

$$G = \frac{\lambda^2}{\sqrt{-\varkappa^2}}\,, \qquad \bar{G} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{-\bar{\varkappa}^2}}\,, \tag{3.1.7}$$

где[5] $\varkappa_{\alpha\beta}\varkappa^{\beta}{}_{\gamma} = \varkappa^2 \varepsilon_{\alpha\gamma}$. Таким образом, определим “канонические скаляры”[6] как

$$2r = \frac{1}{G} + \frac{1}{\bar{G}}, \quad 2iy = \frac{1}{\bar{G}} - \frac{1}{G}. \tag{3.1.8}$$

Анализ развернутых уравнений и интегрирование уравнений первого порядка для интегрирующих потоков в разделе 3.6 приводит к решению, описывающее общую черную дыру Эйнштейна–Максвелла в AdS_4 пространстве–времени в следующем бескоординатном виде

$$\begin{aligned} ds^2 = ds_0^2 &+ \frac{2\mathbf{M}r - \frac{\mathbf{q}}{2}}{r^2+y^2}(\alpha_1(r) k_i dx^i + \alpha_2(r) n_i dx^i)^2 - \frac{2\mathbf{N}y + \frac{\mathbf{q}}{2}}{r^2+y^2}(\beta_1(y) l^{+-}_i dx^i + \beta_2(y) l^{-+}_i dx^i)^2 \\ &+ 4\alpha_1(r)\alpha_2(r)\frac{r^2+y^2}{\Delta_r \hat{\Delta}_r}(2\mathbf{M}r - \frac{\mathbf{q}}{2})dr^2 - 4\beta_1(y)\beta_2(y)\frac{r^2+y^2}{\Delta_y \hat{\Delta}_y}(2\mathbf{N}y + \frac{\mathbf{q}}{2})dy^2, \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

где $\alpha_1(r), \alpha_2(r)$ и $\beta_1(y), \beta_2(y)$ подчинены связям

$$\alpha_1(r) + \alpha_2(r) = 1, \qquad \beta_1(y) + \beta_2(y) = 1 \tag{3.1.10}$$

и в остальном произвольны, параметризуя некоторый калибровочный произвол, ds_0^2 – метрика фона AdS_4, а $\hat{\Delta}_r$ и $\hat{\Delta}_y$ – полиномы вида

$$\hat{\Delta}_r \;=\; 2\mathbf{M}r + r^2(\lambda^2 r^2 + I_1) + \frac{1}{2}(-\mathbf{q} + \frac{I_2}{2}), \tag{3.1.11}$$

$$\hat{\Delta}_y \;=\; 2\mathbf{N}y + y^2(\lambda^2 y^2 - I_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{q} + \frac{I_2}{2}), \tag{3.1.12}$$

[5] Обозначения, используемые в этой главе см. в приложении III.

[6] Причина такого названия в том, что в некоторой координатной системе скаляры r и y совпадают с каноническими координатами введенными Картером в [68].

и

$$\Delta_r = \hat{\Delta}_r\Big|_{\mathbf{M},\mathbf{N},\mathbf{q}=0} = r^2(\lambda^2 r^2 + I_1) + \frac{1}{4} I_2\,, \tag{3.1.13}$$

$$\Delta_y = \hat{\Delta}_y\Big|_{\mathbf{M},\mathbf{N},\mathbf{q}=0} = y^2(\lambda^2 y^2 - I_1) + \frac{1}{4} I_2\,, \tag{3.1.14}$$

здесь I_1, I_2 являются первыми интегралами (3.0.1) и связаны с инвариантами (3.0.2) соотношениями

$$C_2 = I_1\,, \qquad C_4 = I_1^2 + \lambda^2 I_2\,. \tag{3.1.15}$$

Заметим, что, вообще говоря, метрика (3.1.9) комплексная. Её условие вещественности фиксирует

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}\,. \tag{3.1.16}$$

Тем не менее, иногда может оказаться удобным использование комплексной метрики (например, чтобы воспроизвести двойное представление Керра-Шилда [69]).

Поле Максвелла черной дыры $F = dA$ генерируется 1-формой потенциала, которую с точностью до калибровочного произвола можно выбрать в виде

$$A = \frac{r}{r^2 + y^2} k_i dx^i. \tag{3.1.17}$$

Метрика (3.1.9) верна для любых значений ее параметров. Однако, в случае нулевого НУТ-заряда $\mathbf{N} = 0$, интегрирование потоков может быть выполнено иначе, приводя к более простому выражению для чернодырной метрики. В частности, мы покажем, что известная форма Керра-Шилда метрики черной дыры Керра–Ньюмена [71] может быть записана в произвольных координатах.

Решение (3.1.9) характеризуется двумя полиномиальными функциями, коэффициенты которых определяются шестью произвольными параметрами. Оно принадлежит классу решений уравнений Эйнштейна–Максвелла типа D по Петрову [72] и включает ненулевой космологический член, а также электрический и магнитный заряды, причем два главных изотропных направления тензора Вейля совпадают с двумя главными изотропными направлениями тензора Максвелла. $\mathbf{M}$ играет роль массы, $\mathbf{N}$ – НУТ-заряда, λ^2 – космологический член, I_2 – параметр вращения a и I_1 – параметр Картера-Плебанского, который можно всегда положить равным 1, 0 или -1 с помощью масштабных преобразований, обсуждаемых ниже. Будет показано, что $\mathbf{q}$ можно отождествить с $\mathbf{q} = 2(e^2 + \mathrm{g}^2)$, где e – электрический заряд, а g – магнитный. Такое представление конечно условно, поскольку заряды входят в (3.1.9) через $\mathbf{q}$ и, следовательно, их нельзя отличить пока не введены внешние поля.

Конкретный тип решения зависит от параметров кривизны – $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{q}$ и от $sp(4)$ инвариантов. Перечислим основные случаи:

- Решение Картера-Плебанского

Все шесть параметров ненулевые. Метрика имеет вид (3.1.9). Её легко переписать в хорошо известной форме Картера-Плебанского [68, 69] если положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$ (см. подраздел 3.8.1). Параметр вращения $a^2 = I_2/4$, а параметр Картера-Плебанского $\epsilon = I_1$.

- Двойная форма Керра-Шилда для метрики Картера-Плебанского

Фиксируя калибровку $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, из (3.1.9) сразу получаем двойное представление Керра-Шилда для метрики

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{2r}{r^2+y^2}\left(\mathbf{M} - \frac{\mathbf{q}}{4r}\right) k_i k_j dx^i dx^j - \frac{2y}{r^2+y^2}\left(\mathbf{N} + \frac{\mathbf{q}}{4y}\right) l_i^{+-} l_j^{+-} dx^i dx^j \,, \quad (3.1.18)$$

являющейся комплексной в сигнатуре Минковского.

Для физических приложений важны следующие случаи с нулевым НУТ–зарядом:

- $\mathbf{N} = 0$, $C_2 = 1 + \lambda^2 a^2$, $C_4 = C_2^2 + 4\lambda^2 a^2$

Этот случай отвечает черной дыре Керра–Ньюмена с угловым моментом единицы массы a. Метрику можно записать в форме Керра-Шилда [73]

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{2\mathbf{M}r - \mathbf{q}}{r^2+y^2} k_i k_j dx^i dx^j \,. \quad (3.1.19)$$

- $\mathbf{N} = 0$, $C_4 = C_2^2$ (эквивалентно тому, что $K_A{}^C K_C{}^B = C_2 \delta_A{}^B$)

Этот частный случай соответствует дальнейшему вырождению $I_2 = 0$, $y = 0$ и отвечает статической черной дыре Райснера-Нордстрема. Снова метрику удобно привести к виду Керра-Шилда

$$ds^2 = ds_0^2 + \left(\frac{2\mathbf{M}}{r} - \frac{\mathbf{q}}{r^2}\right) k_i k_j dx^i dx^j \,. \quad (3.1.20)$$

Заметим, что все перечисленные решения инвариантны относительно масштабных преобразований вида

$$K_{AB} \to \mu K_{AB} \,, \quad \mathbf{M} \to \mu^3 \mathbf{M} \,, \quad \mathbf{N} \to \mu^3 \mathbf{N} \,, \quad \mathbf{q}^2 \to \mu^4 \mathbf{q}^2 \quad (3.1.21)$$

с действительной константой μ, которые приводят к тому, что

$$C_2 \to \mu^2 C_2 \,, \qquad C_4 \to \mu^4 C_4 \,. \quad (3.1.22)$$

Это означает, что один из кинематических параметров метрики всегда можно перемасштабировать, сделав его дискретным вида 1, 0 или -1. Или иначе, используя масштабный произвол (3.1.21), можно устранить параметр массы $\mathbf{M}$, который будет в этом случае представлен параметром ϵ.

3.2 Формализм Картана

В подходе Римана к AdS_4 черной дыре метрика и электромагнитное поле подчинены уравнениям Эйнштейна–Максвелла

$$R_{ij} = 3\lambda^2 g_{ij} + T_{ij}\,, \tag{3.2.1}$$

$$D_i F^i{}_j = 0 \tag{3.2.2}$$

с тензором энергии–импульса вида

$$T_{ij} = 4(e^2 + \mathrm{g}^2)\left(F_{ik}F_j{}^k - \frac{1}{4}g_{ij}F_{kl}F^{kl}\right). \tag{3.2.3}$$

Альтернативный подход описания геометрии пространства–времени состоит в использовании формализма Картана. Поскольку он имеет значительные преимущества для дальнейшего анализа, разберем его подробнее.

Пусть $dx^m \mathbf{\Omega}_m{}^{ab}$ – антисимметричная 1-форма связности Лоренца, а $dx^m \mathbf{h}_m{}^a$ – 1-форма тетрады. Их можно отождествить с калибровочными полями AdS_4 алгебры симметрии $o(3,2)$. Соответствующие AdS_4 кривизны $\mathbf{R}^{ab} = \frac{1}{2}\mathbf{R}_{ij}{}^{ab}dx^i \wedge dx^j$ и $\mathbf{R}^a = \frac{1}{2}\mathbf{R}_{ij}{}^a dx^i \wedge dx^j$ имеют следующий вид

$$\mathbf{R}^{ab} = d\mathbf{\Omega}^{ab} + \mathbf{\Omega}^{ac} \wedge \mathbf{\Omega}_c{}^b - \lambda^2 \mathbf{h}^a \wedge \mathbf{h}^b\,, \tag{3.2.4}$$

$$\mathbf{R}^a = d\mathbf{h}^a + \mathbf{\Omega}^{ac} \wedge \mathbf{h}_c\,, \tag{3.2.5}$$

где $a, b, c = 0, \ldots, 3$ – лоренцевы индексы, которые поднимаются и опускаются плоской метрикой $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Лоренцева связность $\mathbf{\Omega}$ выражается алгебраически через производные тетрады $\mathbf{h}$ из условия нулевого кручения $\mathbf{R}^a = 0$. Часть 2-формы кривизны (3.2.4), которая не содержит λ-член, соответствует тензору Римана.

Для ненулевого тензора энергии-импульса 2-форму кривизны удобно разложить на бесследовую компоненту, связанную с тензором Вейля, и следовую, параметризуемую T_{ij},

$$\mathbf{R}_{ab} = \frac{1}{2}\mathbf{h}^c \wedge \mathbf{h}^d C_{cdab} + \frac{1}{2}(\mathbf{h}_a \mathbf{T}_b - \mathbf{h}_b \mathbf{T}_a)\,, \tag{3.2.6}$$

где C_{abcd} – тензор Вейля в касательном базисе, $C_{abcd} = -C_{bacd} = -C_{abdc} = C_{cdab}$ и $\mathbf{T}_a = T_{ab}\mathbf{h}^b$ – 1-форма, ассоциированная с тензором энергии-импульса. Уравнение (3.2.6) эквивалентно метрической форме уравнений Эйнштейна (3.2.1) с

$$g_{mn} = \mathbf{h}_m{}^a \mathbf{h}_n{}^b \eta_{ab}\,. \tag{3.2.7}$$

В четырех измерениях дальнейший анализ упрощается использованием языка двухкомпонентных спиноров. Уравнения Эйнштейна (3.2.6) и кручение (3.2.5) переписываются в спинорном виде следующим образом. 1-форму лоренцевой связности $\mathbf{\Omega}_{\alpha\alpha}, \bar{\mathbf{\Omega}}_{\dot\alpha\dot\alpha}$ и 1-форму тетрады $\mathbf{h}_{\alpha\dot\alpha}$ отождествляем с калибровочными полями $sp(4) \sim o(3,2)$ алгебры. Спинорную форму (3.2.3) представляем в виде

$$T_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} = -4(e^2 + \mathrm{g}^2) F_{\alpha\beta} \bar{F}_{\dot\alpha\dot\beta}, \tag{3.2.8}$$

что явно инвариантно относительно преобразований электромагнитной дуальности

$$F_{\alpha\alpha} \to e^{i\theta} F_{\alpha\alpha}, \quad \bar{F}_{\dot\alpha\dot\alpha} \to e^{-i\theta} \bar{F}_{\dot\alpha\dot\alpha}. \tag{3.2.9}$$

Накладывая условие нулевого кручения, окончательный вид уравнений Эйнштейна с космологическим членом сводится к

$$\mathcal{R}_{\alpha\alpha} = d\mathbf{\Omega}_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{\alpha}{}^{\gamma} \wedge \mathbf{\Omega}_{\gamma\alpha} = \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{H}_{\alpha\alpha} + \frac{1}{8}\mathbf{H}^{\gamma\gamma} C_{\gamma\gamma\alpha\alpha} + \frac{e^2 + \mathrm{g}^2}{2} \bar{\mathbf{H}}^{\dot\gamma\dot\gamma} \bar{F}_{\dot\gamma\dot\gamma} F_{\alpha\alpha} \tag{3.2.10}$$

$$\bar{\mathcal{R}}_{\dot\alpha\dot\alpha} = d\bar{\mathbf{\Omega}}_{\dot\alpha\dot\alpha} + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{\Omega}}_{\dot\alpha}{}^{\dot\gamma} \wedge \bar{\mathbf{\Omega}}_{\dot\gamma\dot\alpha} = \frac{\lambda^2}{2}\bar{\mathbf{H}}_{\dot\alpha\dot\alpha} + \frac{1}{8}\bar{\mathbf{H}}^{\dot\gamma\dot\gamma} \bar{C}_{\dot\gamma\dot\gamma\dot\alpha\dot\alpha} + \frac{e^2 + \mathrm{g}^2}{2} \mathbf{H}^{\gamma\gamma} F_{\gamma\gamma} \bar{F}_{\dot\alpha\dot\alpha} \tag{3.2.11}$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\dot\alpha} = d\mathbf{h}_{\alpha\dot\alpha} + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_{\alpha}{}^{\gamma} \wedge \mathbf{h}_{\gamma\dot\alpha} + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{\Omega}}_{\dot\alpha}{}^{\dot\gamma} \wedge \mathbf{h}_{\alpha\dot\gamma} = 0\,, \tag{3.2.12}$$

где $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ и $\bar{\mathcal{R}}_{\dot\alpha\dot\beta}$ – Лоренц компоненты 2-формы кривизны

$$\mathcal{D}^2 \xi_{\alpha\dot\alpha} = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\alpha}{}^{\beta}\xi_{\beta\dot\alpha} + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{R}}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\xi_{\alpha\dot\beta} \tag{3.2.13}$$

и

$$\mathbf{H}^{\alpha\alpha} = \mathbf{h}^{\alpha}{}_{\dot\alpha} \wedge \mathbf{h}^{\alpha\dot\alpha}\,, \qquad \bar{\mathbf{H}}^{\dot\alpha\dot\alpha} = \mathbf{h}_{\alpha}{}^{\dot\alpha} \wedge \mathbf{h}^{\alpha\dot\alpha}\,. \tag{3.2.14}$$

3.3 AdS_4 развернутая система

3.3.1 Развернутый вид уравнений Киллинга

Определим развернутую систему, описывающую геометрию пространства AdS_4 вместе с её глобальными симметриями. Рассмотрим некоторый AdS_4 вектор Киллинга V^m и его ковариантную производную

$$\varkappa_{ij} = D_i V_j, \quad \varkappa_{ij} = -\varkappa_{ji}\,, \tag{3.3.1}$$

которую далее мы будем называть 2-формой Киллинга или полем Папапетру.

Поскольку AdS_4 кривизна Римана имеет нулевой тензор Вейля, справедливы следующие уравнения

$$DV_{\alpha\dot\alpha} = \frac{1}{2}h^{\gamma}{}_{\dot\alpha}\varkappa_{\gamma\alpha} + \frac{1}{2}h_{\alpha}{}^{\dot\gamma}\bar\varkappa_{\dot\alpha\dot\gamma}\,, \tag{3.3.2}$$

$$D\varkappa_{\alpha\alpha} = \lambda^2 h_{\alpha}{}^{\dot\gamma}V_{\alpha\dot\gamma}\,, \tag{3.3.3}$$

$$D\bar\varkappa_{\dot\alpha\dot\alpha} = \lambda^2 h^{\gamma}{}_{\dot\alpha}V_{\gamma\dot\alpha}\,, \tag{3.3.4}$$

которые совместны, при условии что

$$Dh_{\alpha\dot\alpha} = 0\,, \tag{3.3.5}$$

$$R_{\alpha\alpha} \equiv d\omega_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha}{}^{\beta}\wedge\omega_{\beta\alpha} = \frac{\lambda^2}{2}h_{\alpha\dot\alpha}\wedge h_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\,, \tag{3.3.6}$$

$$\bar R_{\dot\alpha\dot\alpha} \equiv d\bar\omega_{\dot\alpha\dot\alpha} + \frac{1}{2}\bar\omega_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\wedge\bar\omega_{\dot\beta\dot\alpha} = \frac{\lambda^2}{2}h_{\alpha\dot\alpha}\wedge h^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\,, \tag{3.3.7}$$

где $h_{\alpha\dot\alpha}$ – AdS_4 тетрада, $\omega_{\alpha\alpha}$ и $\bar\omega_{\dot\alpha\dot\alpha}$ – компоненты лоренцевой связности, D – фоновый ковариантный дифференциал Лоренца и $R_{\alpha\alpha}$, $\bar R_{\dot\alpha\dot\alpha}$ – компоненты AdS_4 2-формы кривизны

$$D^2\xi_{\alpha\dot\alpha} = \frac{1}{2}R_{\alpha}{}^{\beta}\xi_{\beta\dot\alpha} + \frac{1}{2}\bar R_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\xi_{\alpha\dot\beta}.$$

Уравнения (3.3.2)–(3.3.7) можно переписать в явно $sp(4)$–ковариантном виде. Действительно, пусть K_{AB} – 0-форма (3.1.1) и W_{0AB} – $sp(4)$-связность

$$W_{0AB} = \begin{pmatrix} \omega_{\alpha\beta} & -\lambda h_{\alpha\dot\beta} \\ -\lambda h_{\beta\dot\alpha} & \bar\omega_{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix}. \tag{3.3.8}$$

Тогда система (3.3.2)–(3.3.7) принимает следующий явно $sp(4)$-инвариантный вид

$$D_0K_{AB} \;=\; 0, \tag{3.3.9}$$

$$R_{0AB} \;\equiv\; dW_{0AB} + \frac{1}{2}W_{0A}{}^{C}\wedge W_{0CB} = 0, \tag{3.3.10}$$

что совпадает с (3.0.1). AdS_4 индексы поднимаются и опускаются канонической $sp(4)$-формой (см. Приложение III). Первое уравнение есть условие ковариантного постоянства параметра глобальной симметрии, а второе описывает AdS_4.

Заметим, что система (3.3.2)–(3.3.4) была отправной точкой в [102] при построении развернутой системы черной дыры Керра. Ее деформация происходила в терминах полей вектора Киллинга $V_{\alpha\dot\alpha}$ и поля Папапетру $\varkappa_{\alpha\alpha}$, $\bar\varkappa_{\dot\alpha\dot\alpha}$. Однако оказывается, что более удобно работать со специально перемасштабированным полем Папапетру. Для этого введем следующим образом самодуальный тензор Максвелла $\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}$ и ему комплексно сопряженный

$$F_{\alpha\alpha} = -\lambda^{-2}G^3\varkappa_{\alpha\alpha}\,, \qquad \bar F_{\dot\alpha\dot\alpha} = -\lambda^{-2}\bar G^3\bar\varkappa_{\dot\alpha\dot\alpha}\,, \tag{3.3.11}$$

где

$$G=\frac{\lambda^2}{\sqrt{-\varkappa^2}}=(-F^2)^{1/4}\,,\qquad \bar G=\frac{\lambda^2}{\sqrt{-\bar\varkappa^2}}=(-\bar F^2)^{1/4} \tag{3.3.12}$$

и корни в правых частях (3.3.12) выбраны так, чтобы G и $\bar G$ были комплексно сопряжены друг другу.

Тогда (3.3.2)–(3.3.4) переписываются в виде[7]

$$DV_{\alpha\dot\alpha} = \frac{1}{2}\rho\, h^\gamma{}_{\dot\alpha}F_{\gamma\alpha}+\frac{1}{2}\bar\rho\, h_\alpha{}^{\dot\gamma}\bar F_{\dot\alpha\dot\gamma}\,, \tag{3.3.13}$$

$$DF_{\alpha\alpha} = -\frac{3}{2G}h^{\beta\dot\gamma}V^\beta{}_{\dot\gamma}F_{(\beta\beta}F_{\alpha\alpha)}\,, \tag{3.3.14}$$

$$D\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha} = -\frac{3}{2\bar G}h^{\gamma\dot\beta}V_\gamma{}^{\dot\beta}\bar F_{(\dot\beta\dot\beta}\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha)}\,. \tag{3.3.15}$$

с

$$\rho=-\lambda^2G^{-3},\qquad \bar\rho=-\lambda^2\bar G^{-3}. \tag{3.3.16}$$

Важное свойство (3.3.13)–(3.3.15) то, что $F_{\alpha\alpha}$ и $\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла без источника и тождествам Бианки

$$D_{\gamma\dot\alpha}F_\alpha{}^\gamma=0\,,\qquad D_{\alpha\dot\gamma}\bar F_{\dot\alpha}{}^{\dot\gamma}=0. \tag{3.3.17}$$

Используя (3.3.14) и (3.3.15), получаем полезные уравнения на G и $\bar G$

$$dG=-\frac{1}{2}h^{\alpha\dot\alpha}V^\alpha{}_{\dot\alpha}F_{\alpha\alpha},\qquad d\bar G=-\frac{1}{2}h^{\alpha\dot\alpha}V_\alpha{}^{\dot\alpha}\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}\,. \tag{3.3.18}$$

В дальнейшем эту систему Киллинга–Максвелла[8] (3.3.13)–(3.3.15) вместе с уравнениями для AdS_4 кривизны (3.3.5)–(3.3.7) мы будем называть AdS_4 развернутой системой. Заметим, что построенные напряженности (3.3.11) хорошо определены в плоском пределе $\lambda\to 0$.

Развернутые уравнения (3.3.13)–(3.3.16) обладают рядом замечательных свойств. Можно показать, в частности, что эта система содержит тензор Киллинга–Яно и еще один вектор Киллинга, построенный из $F_{\alpha\alpha}$ и $\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}$. Отметим, что предлагаемый метод изучения черных дыр на основе уравнений (3.3.13)–(3.3.16) осуществляется впервые.

Важным свойством системы, имеющим отношение к описанию кинематических параметров $4d$ черных дыр, является существование двух первых интегралов уравнений (3.3.13)–(3.3.15), которые выражаются через $sp(4)$ инварианты (3.0.2)

$$I_1 = V^2-\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1}{G^2}+\frac{1}{\bar G^2}\right), \tag{3.3.19}$$

$$I_2 = \frac{1}{G^3\bar G^3}V^{\alpha\dot\alpha}V^{\alpha\dot\alpha}F_{\alpha\alpha}\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}-V^2\left(\frac{1}{G^2}+\frac{1}{\bar G^2}\right)+\frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{1}{G^2}-\frac{1}{\bar G^2}\right)^2, \tag{3.3.20}$$

[7] Скобки означают симметризацию индексов.

[8] Первым, кто стал изучать связь вектора Киллинга черной дыры с ее тензором Максвелла и тензором Киллинга–Яно был Б. Картер [74].

где $V^2 = \frac{1}{2}V_{\alpha\dot\alpha}V^{\alpha\dot\alpha}$. Используя (3.3.13)–(3.3.15), легко показать, что $dI_1 = 0$ и $dI_2 = 0$.

Наконец, AdS_4 развернутая система инвариантна относительно следующих преобразований

$$\tau_\mu : \quad (V_{\alpha\dot\alpha}, F_{\alpha\alpha}, \bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}) \to (\mu V_{\alpha\dot\alpha}, \frac{1}{\mu|\mu|}F_{\alpha\alpha}, \frac{1}{\mu|\mu|}\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}), \tag{3.3.21}$$

где μ – вещественная константа. Имеется также симметрия относительно преобразования четности вида

$$\pi : (V_{\alpha\dot\alpha}, h_{\alpha\dot\alpha}) \to (-V_{\alpha\dot\alpha}, -h_{\alpha\dot\alpha}). \tag{3.3.22}$$

3.3.2 Проекторы Киллинга

Как было показано в [102], ключевым местом в получении развернутой формулировки черной дыры, что в итоге приводит к (3.1.9), является построение векторов Керра-Шилда из параметра глобальной симметрии AdS_4. Предлагаемая процедура существенно четырехмерна и основана на использовании определенных проекторов, которые мы сейчас определим. Речь идет о том, чтобы разбить двумерное спинорное пространство на два ортогональных сектора, используя проекторы построенные из поля Максвелла. Такие проекторы мы будем называть в дальнейшем проекторами Киллинга.

Рассмотрим пару комплексно сопряженных проекторов $\Pi^{\pm}_{\alpha\beta}$ и $\bar\Pi^{\pm}_{\dot\alpha\dot\beta}$, определенных соотношениями

$$\Pi^{\pm}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\beta} \pm \frac{1}{G^2}F_{\alpha\beta}), \qquad \bar\Pi^{\pm}_{\dot\alpha\dot\beta} = \frac{1}{2}(\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \pm \frac{1}{\bar G^2}\bar F_{\dot\alpha\dot\beta})\,, \tag{3.3.23}$$

так что

$$\Pi^{+}_{\alpha\beta} + \Pi^{-}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}\,, \qquad \bar\Pi^{+}_{\dot\alpha\dot\beta} + \bar\Pi^{-}_{\dot\alpha\dot\beta} = \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,, \tag{3.3.24}$$

и

$$\Pi^{\pm}_{\alpha}{}^{\beta}\Pi^{\pm}_{\beta\gamma} = \Pi^{\pm}_{\alpha\gamma}\,, \qquad \Pi^{\pm}_{\alpha}{}^{\beta}\Pi^{\mp}_{\beta\gamma} = 0\,, \qquad \bar\Pi^{\pm}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\bar\Pi^{\pm}_{\dot\beta\dot\gamma} = \bar\Pi^{\pm}_{\dot\alpha\dot\gamma}\,, \qquad \bar\Pi^{\pm}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\bar\Pi^{\mp}_{\dot\beta\dot\gamma} = 0\,. \tag{3.3.25}$$

Из определения (3.3.23) следует, что

$$\Pi^{\pm}_{\alpha\beta} = -\Pi^{\mp}_{\beta\alpha}\,, \qquad \bar\Pi^{\pm}_{\dot\alpha\dot\beta} = -\bar\Pi^{\mp}_{\dot\beta\dot\alpha}\,. \tag{3.3.26}$$

Из (3.3.23), (3.3.14) и (3.3.18) находим следующие дифференциальные свойства

$$D\Pi^{\pm}_{\alpha\beta} = \pm\frac{G}{2}(\Pi^{+}_{\alpha\gamma}\Pi^{+}_{\beta\dot\gamma} + \Pi^{-}_{\alpha\gamma}\Pi^{-}_{\beta\dot\gamma})h^{\gamma}{}_{\dot\gamma}V^{\gamma\dot\gamma}, \tag{3.3.27}$$

$$D\bar\Pi^{\pm}_{\dot\alpha\dot\beta} = \pm\frac{\bar G}{2}(\bar\Pi^{+}_{\dot\alpha\dot\gamma}\bar\Pi^{+}_{\dot\beta\dot\gamma} + \bar\Pi^{-}_{\dot\alpha\dot\gamma}\bar\Pi^{-}_{\dot\beta\dot\gamma})h_{\gamma}{}^{\dot\gamma}V^{\gamma\dot\gamma}. \tag{3.3.28}$$

Далее все соотношения будут выписаны в голоморфном (то есть неточечном) секторе системы. Все соотношения для антиголоморфного сектора возникают в результате комплексного сопряжения.

Проекторы (3.3.23) разбивают двумерное (анти)голоморфное спинорное пространство в прямую сумму двух одномерных подпространств. Для любого ψ_α имеем

$$\psi_\alpha^\pm = \Pi_\alpha^{\pm\beta}\psi_\beta\,, \qquad \psi_\alpha^+ + \psi_\alpha^- = \psi_\alpha, \tag{3.3.29}$$

так что $\Pi_\alpha^{\mp\beta}\psi_\beta^\pm = 0$. Это позволяет строить световые векторы с помощью этих проекторов. В самом деле, рассмотрим произвольный вектор $U_{\alpha\dot\alpha}$. Используя (3.3.23), определим $U_{\alpha\dot\alpha}^\pm$ и $U_{\alpha\dot\alpha}^{\pm\mp}$ как

$$U_{\alpha\dot\alpha}^\pm = \Pi_\alpha^{\pm\beta}\bar\Pi_{\dot\alpha}^{\pm\dot\beta}U_{\beta\dot\beta}\,, \qquad U_{\alpha\dot\alpha}^{+-} = \Pi_\alpha^{+\beta}\bar\Pi_{\dot\alpha}^{-\dot\beta}U_{\beta\dot\beta}\,, \qquad U_{\alpha\dot\alpha}^{-+} = \Pi_\alpha^{-\beta}\bar\Pi_{\dot\alpha}^{+\dot\beta}U_{\beta\dot\beta}\,. \tag{3.3.30}$$

Поскольку ранг проекторов равен единице, их можно представить, используя пару базисных спиноров $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$, в следующем виде

$$\Pi_{\alpha\beta}^+ = \frac{\eta_\alpha\xi_\beta}{\eta_\gamma\xi^\gamma}, \qquad \Pi_{\alpha\beta}^- = \frac{\xi_\alpha\eta_\beta}{\xi_\gamma\eta^\gamma}. \tag{3.3.31}$$

Очевидно, что $U_{\alpha\dot\beta}^\pm U^{\pm\alpha\dot\gamma} = 0$ и $U_{\alpha\dot\alpha}^\pm U^{\pm\beta\dot\alpha} = 0$. Поэтому $U_{\alpha\dot\alpha}^\pm$ и $U_{\alpha\dot\alpha}^{\pm\mp}$ в данном спинорном базисе принимают вид

$$U_{\alpha\dot\alpha}^- = \xi_\alpha\bar\xi_{\dot\alpha}, \quad U_{\alpha\dot\alpha}^+ = \eta_\alpha\bar\eta_{\dot\alpha}, \quad U_{\alpha\dot\alpha}^{+-} = q\,\eta_\alpha\bar\xi_{\dot\alpha}, \quad U_{\alpha\dot\alpha}^{-+} = \bar q\,\xi_\alpha\bar\eta_{\dot\alpha}, \tag{3.3.32}$$

где $q(x)$ и $\bar q(x)$ – некоторые комплексные функции. Как следствие (3.3.23) и (3.3.31), имеем

$$F_{\alpha\alpha} = 2G^2\frac{\xi_\alpha\eta_\alpha}{\eta_\gamma\xi^\gamma}. \tag{3.3.33}$$

Из (3.3.32) очевидно следует, что

$$U_{\alpha\dot\beta}^\pm U_{\beta\dot\alpha}^\pm = U_{\alpha\dot\alpha}^\pm U_{\beta\dot\beta}^\pm\,, \qquad U_{\alpha\dot\beta}^{-+}U_{\beta\dot\alpha}^{+-} = -\frac{(U^{-+}U^{+-})}{(U^-U^+)}U_{\alpha\dot\alpha}^-U_{\beta\dot\beta}^+\,, \tag{3.3.34}$$

где

$$(AB) = A_{\alpha\dot\alpha}B^{\alpha\dot\alpha}.$$

Отметим также, что

$$U^2 = (U^+U^-) + (U^{+-}U^{-+}) = (1 - q\bar q)(U^+U^-). \tag{3.3.35}$$

Как было показано Папапетру [75], любое стационарное осесимметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна симметрично относительно одновременной инверсии углового и временного векторов Киллинга. Боер и Линдквист [76] нашли переменные, в которых метрика Керра явно инвариантна относительно этой инверсии. В

AdS развернутой системе эта симметрия есть τ_{-1} (3.3.21), которая меняет местами проекторы

$$\tau_{-1}: \quad \Pi^{\pm}_{\alpha\beta} \to \Pi^{\mp}_{\alpha\beta}, \quad \bar{\Pi}^{\pm}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \to \bar{\Pi}^{\mp}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}. \tag{3.3.36}$$

3.3.3 Базис векторов Керра-Шилда

Теперь все готово для того, чтобы ввести полный набор нулевых векторов (комплексную нулевую тетраду). Определим следующие четыре нулевых вектора

$$k_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{2}{(V^+V^-)}V^-_{\alpha\dot{\alpha}}, \qquad n_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{2}{(V^+V^-)}V^+_{\alpha\dot{\alpha}}, \tag{3.3.37}$$

$$l^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{2}{(V^{+-}V^{-+})}V^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}}, \qquad l^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{2}{(V^{+-}V^{-+})}V^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}}\,. \tag{3.3.38}$$

То, что так определенные векторы светоподобны, следует из формулы Пенроуза (комплексный нулевой вектор S^i, $S^iS_i = 0$, эквивалентен спинорному выражению $S_{\alpha\dot{\alpha}} = \xi_\alpha\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}$). Заметим, что $k_{\alpha\dot{\alpha}}$ и $n_{\alpha\dot{\alpha}}$ – вещественные векторы, а $l^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}}$ и $l^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}}$ комплексно сопряжены друг другу

$$l^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}} = \bar{l}^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}}\,.$$

Дискретная симметрия τ_{-1} (3.3.36) переставляет нулевые вектора

$$\tau_{-1} : k_{\alpha\dot{\alpha}} \to n_{\alpha\dot{\alpha}}\,, \qquad \tau_{-1} : l^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}} \to l^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}}. \tag{3.3.39}$$

Схематично, в терминах спиноров (3.3.31), эти нулевые векторы можно представить как

$$k_{\alpha\dot{\alpha}} \sim \xi_\alpha\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\,, \quad n_{\alpha\dot{\alpha}} \sim \eta_\alpha\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\,, \quad l^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}} \sim \eta_\alpha\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\,, \quad l^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}} \sim \xi_\alpha\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\,. \tag{3.3.40}$$

Удобно параметризовать нулевые векторы следующим набором

$$e_{I,\alpha\dot{\alpha}} = \left(k_{\alpha\dot{\alpha}}, n_{\alpha\dot{\alpha}}, l^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}}, l^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}}\right) \tag{3.3.41}$$

с очевидными свойствами

$$e_{I,\alpha\dot{\alpha}}e_{I,}{}^{\alpha\dot{\alpha}} = 0, \qquad \frac{1}{2}e_{I,\alpha\dot{\alpha}}V^{\alpha\dot{\alpha}} = 1, \tag{3.3.42}$$

где $I = 1,\ldots,4$ (нет суммирования по I).

Из (3.3.13)–(3.3.15) следует, что

$$\begin{aligned} De_{I,\alpha\dot{\alpha}} &= (-1)^{\sigma_I}\frac{G}{4}\left(\rho\, Ge_{I,\alpha\dot{\alpha}}e_{I,\beta\dot{\beta}} + e_{I,\beta}{}^{\dot{\gamma}}V_{\alpha\dot{\gamma}}e_{I,}{}^{\gamma}{}_{\dot{\alpha}}V_{\gamma\dot{\beta}}\right)h^{\beta\dot{\beta}} \\ &+ (-1)^{\bar{\sigma}_I}\frac{\bar{G}}{4}\left(\bar{\rho}\,\bar{G}e_{I,\alpha\dot{\alpha}}e_{I,\beta\dot{\beta}} + e_{I,\alpha}{}^{\dot{\gamma}}V_{\beta\dot{\gamma}}e_{I,}{}^{\gamma}{}_{\dot{\beta}}V_{\gamma\dot{\alpha}}\right)h^{\beta\dot{\beta}}, \end{aligned} \tag{3.3.43}$$

где σ_I считает количество η_α в $e_{I,\alpha\dot\alpha}$ (3.3.41), то есть $\sigma_I = (0,1,1,0)$ и $\bar\sigma_I$ считает количество $\bar\eta_{\dot\alpha}$, то есть $\bar\sigma_I = (0,1,0,1)$.

Простым следствием (3.3.43) и (3.3.40) является условие геодезичности для $e_{I,\alpha\dot\alpha}$

$$e_{I,}{}^{\alpha\dot\alpha} D_{\alpha\dot\alpha} e_{I,\beta\dot\beta} = 0 \tag{3.3.44}$$

(по I нет суммирования). Другими словами, все четыре нулевых вектора (3.3.37) и (3.3.38)– векторы Керра-Шилда, то есть светоподобные, и каждый удовлетворяет (3.3.44). Кроме того, из (3.3.37), (3.3.38) и (3.3.32) следует, что $e_{I,\alpha\dot\alpha}$ – собственные векторы тензора Максвелла $F_{\alpha\alpha}$, $\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}$ в том смысле, что

$$F_{\alpha\beta} e_{I,}{}^{\beta}{}_{\dot\alpha} = (-1)^{\sigma_I} G^2 e_{I,\alpha\dot\alpha}, \qquad \bar F_{\dot\alpha\dot\beta} e_{I,\alpha}{}^{\dot\beta} = (-1)^{\bar\sigma_I} \bar G^2 e_{I,\alpha\dot\alpha}. \tag{3.3.45}$$

Как следствие (3.3.13)–(3.3.15) и (3.3.18) получаем следующие соотношения

$$D_{\alpha\dot\alpha} e_{I,}{}^{\alpha\dot\alpha} = -2((-1)^{\sigma_I} G + (-1)^{\bar\sigma_I}\bar G)\,, \qquad e_{I,}{}^{\alpha\dot\alpha} D_{\alpha\dot\alpha} G = 2(-1)^{\sigma_I} G^2\,, \tag{3.3.46}$$

$$D_{\alpha\dot\alpha}(((-1)^{\bar\sigma_I} G + (-1)^{\sigma_I}\bar G) e_{I,}{}^{\alpha\dot\alpha}) = -4G\bar G\,, \qquad D_{\alpha\dot\alpha}(G\bar G e_{I,}{}^{\alpha\dot\alpha}) = 0\,, \tag{3.3.47}$$

$$e_{I,\alpha}{}^{\dot\alpha} D_{\alpha\dot\alpha} e_{I,\gamma\dot\gamma} = (-1)^{\sigma_I} G e_{I\alpha}{}^{\dot\alpha} V_{\gamma\dot\alpha} e_{I,\alpha\dot\gamma}. \tag{3.3.48}$$

Используя (3.3.18) и (3.3.43), можно показать, что любой вектор Керра-Шилда из (3.3.41) порождает поле Максвелла (3.3.11)

$$F_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} D_{\alpha\dot\alpha}((G + (-1)^{\sigma_I + \bar\sigma_I}\bar G) e_{I,\alpha}{}^{\dot\alpha})\,, \tag{3.3.49}$$

$$\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha} = \frac{1}{2} D_{\alpha\dot\alpha}((\bar G + (-1)^{\sigma_I + \bar\sigma_I} G) e_{I,}{}^{\alpha}{}_{\dot\alpha})\,. \tag{3.3.50}$$

Найдем теперь явные выражения для (V^+V^-) и $(V^{+-}V^{-+})$, которые будут полезны в дальнейшем. Используя (3.3.19), (3.3.20) и (3.1.8), получаем

$$(V^+V^-) = \frac{\Delta_r}{r^2 + y^2}, \qquad (V^{+-}V^{-+}) = -\frac{\Delta_y}{r^2 + y^2}, \tag{3.3.51}$$

где

$$\Delta_r = r^2(\lambda^2 r^2 + I_1) + \frac{I_2}{4}, \qquad \Delta_y = y^2(\lambda^2 y^2 - I_1) + \frac{I_2}{4}. \tag{3.3.52}$$

Заметим, что тем самым мы, естественным образом, ввели так называемые канонические “координаты” Картера r и y через поле Максвелла[9].

Введем набор 1-форм $\mathcal{E}_I$, отвечающий нулевым векторам (3.3.41), который будет играть важную роль в построении метрики

$$\mathcal{E}_I = \frac{1}{2} e_{I,\alpha\dot\alpha} h^{\alpha\dot\alpha} = (K, N, L^{+-}, L^{-+})\,. \tag{3.3.53}$$

[9]В [86] эти координаты возникают как собственные значения главного тензора Киллинга–Яно, что сразу следует из его определения (см. подраздел 3.4.1) и (3.3.45).

Можно убедится, что

$$K - N = \frac{2(r^2+y^2)}{\Delta_r}dr, \qquad L^{+-} - L^{-+} = \frac{2(r^2+y^2)}{i\Delta_y}dy\,. \tag{3.3.54}$$

Используя (3.3.49), (3.3.50) и (3.3.54) мы замечаем, что вектор–потенциалы

$$A_{1,2} = \frac{r}{r^2+y^2}\mathcal{E}_{1,2}, \qquad A_{3,4} = \frac{y}{r^2+y^2}\mathcal{E}_{3,4} \tag{3.3.55}$$

порождают дуальные по Ходжу напряженности Максвелла F_{ij} и $*F_{ij}$.

3.3.4 AdS_4 инварианты

Чтобы увидеть алгебраическую природу первых интегралов (3.3.19), полезно использовать AdS_4 ковариантную форму (3.3.9)–(3.3.10) развернутой системы (3.3.2)–(3.3.7).

Рассмотрим AdS_4 инварианты, построенные из K_{AB}. Вычисление квадрата K_{AB} приводит к

$$K_{AC}K^C{}_B = \begin{pmatrix} (V^2+\lambda^{-2}\varkappa^2)\varepsilon_{\alpha\beta} & \lambda^{-1}(\varkappa_{\alpha\gamma}V^\gamma{}_{\dot\beta} - \bar\varkappa_{\dot\gamma\dot\beta}V_\alpha{}^{\dot\gamma}) \\ -\lambda^{-1}(\varkappa_{\beta\gamma}V^\gamma{}_{\dot\alpha} - \bar\varkappa_{\dot\gamma\dot\alpha}V_\beta{}^{\dot\gamma}) & (V^2+\lambda^{-2}\bar\varkappa^2)\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix}. \tag{3.3.56}$$

Все старшие степени матрицы K_{AB} имеют ту же структуру с другими скалярными факторами. Два независимых $sp(4)$ инварианта есть просто

$$C_2 = \frac{1}{4}K_{AB}K^{AB} = I_1, \qquad C_4 = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(K^4) = I_1^2 + \lambda^2 I_2, \tag{3.3.57}$$

где $dC_{2,4} = 0$, а $I_{1,2}$ определены в (3.3.19) и (3.3.20). Заметим, что все нечетные инварианты равны нулю $\mathrm{Tr}(K^n) = 0$, для нечетного n. Все старшие четные инварианты выражаются через $C_{2,4}$ в согласии с тем фактом, что ранг алгебры $sp(4)$ равен двум.

Сделаем некоторые замечания. Во-первых, из (3.3.21) следует, что с помощью τ_μ – симметрии можно положить один из AdS_4 инвариантов равным 1, 0 или -1. Напомним, что это позволяет с помощью диффеоморфизмов сделать один из кинематических параметров черной дыры дискретным. Другое наблюдение состоит в том, что векторы Керра-Шилда $l^{+-}_{\alpha\dot\alpha}$ и $l^{-+}_{\alpha\dot\alpha}$ не существуют для некоторых значений AdS_4 инвариантов. В самом деле, рассмотрим случай, когда $K_A{}^C K_C{}^B \sim \delta_A{}^B$, где

$$C_4 = C_2^2\,. \tag{3.3.58}$$

Легко видеть, что в этом случае

$$\varkappa_{\alpha\gamma}V^\gamma{}_{\dot\beta} = \bar\varkappa_{\dot\gamma\dot\beta}V_\alpha{}^{\dot\gamma}, \tag{3.3.59}$$

и, следовательно,

$$\varkappa^2 = \bar{\varkappa}^2, \qquad G = \bar{G}. \tag{3.3.60}$$

Из (3.3.56) и (3.3.59) следует, что

$$K_{AC}K^C{}_B = C_2\epsilon_{AB}. \tag{3.3.61}$$

Пользуясь определением (3.3.30) и (3.3.31), имеем

$$V_{\alpha\dot{\alpha}} = V^{+}_{\alpha\dot{\alpha}} + V^{-}_{\alpha\dot{\alpha}} + V^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}} + V^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}}\,. \tag{3.3.62}$$

Подставляя (3.3.62) в (3.3.59) и, используя (3.3.32), (3.3.33), находим

$$V^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}} = V^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}} = 0. \tag{3.3.63}$$

Наконец, из (3.3.38) следует, что

$$l^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}} \to \infty\,, \qquad l^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}} \to \infty\,. \tag{3.3.64}$$

Более того, принимая во внимание (3.3.51), получаем $I_2 = 0$. В дальнейшем мы увидим, что этот случай отвечает черной дыре с нулевым угловым моментом и единственным ненулевым инвариантом $C = I_1$.

3.4 Развернутые уравнения черной дыры

Уравнения (3.3.13)–(3.3.15) допускают естественную деформацию развернутой AdS_4 системы, сохраняющую свойства Киллинга и Максвелла. Другими словами, потребуем, чтобы деформированные уравнения, по–прежнему, были устроены из вектора Киллинга и тензора Максвелла без источника. Мы увидим, что такая деформация описывает общую AdS_4 черную дыру.

Ослабим уравнение (3.3.16) для функции ρ в (3.3.13), допустив ее произвольную зависимость от скаляров G и $\bar{G}$

$$\rho = \rho(G, \bar{G})\,. \tag{3.4.1}$$

В этом случае, тождества Бианки для системы (3.3.5)–(3.3.7), (3.3.13)–(3.3.16) оказываются очень сильными и ограничивают вид функции ρ в общем виде до следующего

$$\rho = \mathcal{M} - \lambda^2 G^{-3} - \mathbf{q}\,\bar{G}\,, \tag{3.4.2}$$

где $\mathcal{M}$ и $\mathbf{q}$ – произвольные комплексный и действительный параметры, соответственно.

В результате, имеем следующий окончательный вид совместной деформированной системы

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\mathcal{V}_{\alpha\dot\alpha} &= \frac{1}{2}\rho\, \mathbf{h}^{\gamma}{}_{\dot\alpha} F_{\gamma\alpha} + \frac{1}{2}\bar\rho\, \mathbf{h}_{\alpha}{}^{\dot\gamma} \bar F_{\dot\alpha\dot\gamma}\,, && (3.4.3)\\
\mathcal{D}F_{\alpha\alpha} &= -\frac{3}{2G}\mathbf{h}^{\beta\dot\gamma}\mathcal{V}^{\beta}{}_{\dot\gamma} F_{(\beta\beta}F_{\alpha\alpha)}\,, && (3.4.4)\\
\mathcal{D}\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha} &= -\frac{3}{2\bar G}\mathbf{h}^{\gamma\dot\beta}\mathcal{V}_{\gamma}{}^{\dot\beta} \bar F_{(\dot\beta\dot\beta}\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha)}\,, && (3.4.5)
\end{aligned}$$

с 2-формой кривизны вида

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\alpha\alpha} &= \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{H}_{\alpha\alpha} - \frac{3(\mathcal{M}-\mathbf{q}\,\bar G)}{4G}\mathbf{H}^{\beta\beta}F_{(\beta\beta}F_{\alpha\alpha)} + \frac{\mathbf{q}}{4}\,\bar{\mathbf{H}}^{\dot\beta\dot\beta}\bar F_{\dot\beta\dot\beta}F_{\alpha\alpha}\,, && (3.4.6)\\
\bar{\mathcal{R}}_{\dot\alpha\dot\alpha} &= \frac{\lambda^2}{2}\bar{\mathbf{H}}_{\dot\alpha\dot\alpha} - \frac{3(\overline{\mathcal{M}}-\mathbf{q}\,G)}{4\bar G}\bar{\mathbf{H}}^{\dot\beta\dot\beta}\bar F_{(\dot\beta\dot\beta}\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha)} + \frac{\mathbf{q}}{4}\,\mathbf{H}^{\beta\beta}F_{\beta\beta}\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}\,, && (3.4.7)\\
\mathcal{D}\mathbf{h}_{\alpha\dot\alpha} &= 0\,, && (3.4.8)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\rho &= \mathcal{M} - \lambda^2 G^{-3} - \mathbf{q}\,\bar G, \quad \bar\rho = \overline{\mathcal{M}} - \lambda^2\bar G^{-3} - \mathbf{q}\,G && (3.4.9)\\
G &= (-F^2)^{1/4}, \quad \bar G = (-\bar F^2)^{1/4}, && (3.4.10)
\end{aligned}$$

где $\mathbf{H}^{\alpha\alpha}$ и $\bar{\mathbf{H}}^{\dot\alpha\dot\alpha}$ определены также как и в (3.2.14), $\mathcal{R}_{\alpha\alpha}$ и $\bar{\mathcal{R}}_{\dot\alpha\dot\alpha}$ – кривизны (3.2.10) и (3.2.11), $\mathcal{V}_{\alpha\dot\alpha}$ – вектор Киллинга деформированной развернутой системы. Для G и $\bar G$ находим такие же как и в (3.3.18) следствия

$$dG = -\frac{1}{2}\mathbf{h}^{\alpha\dot\alpha}\mathcal{V}^{\alpha}{}_{\dot\alpha}F_{\alpha\alpha}, \qquad d\bar G = -\frac{1}{2}\mathbf{h}^{\alpha\dot\alpha}\mathcal{V}_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}\,. \qquad (3.4.11)$$

В подразделе 3.8.1 мы увидим, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ описывают массу и НУТ-параметр черной дыры.

Последний член в (3.4.6) и (3.4.7) имеет вид тензора энергии-импульса электромагнитного поля, который инвариантен относительно $U(1)$ вращений (3.2.9). Константа интегрирования $\mathbf{q}$ интерпретируется как сумма квадратов электрического и магнитного зарядов $\mathbf{q} = 2(e^2 + \mathrm{g}^2)$.

Мы называем систему (3.4.3)–(3.4.10) развернутой чернодырной системой. Заметим, что РЧС в [102] является частным случаем (3.4.3)–(3.4.10) с $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ и $\mathbf{q} = 0$. Сравнивая (3.4.6) и (3.4.7) с (3.2.10) и (3.2.11), мы обнаруживаем, что деформация AdS_4 алгебры приводит к вакуумным уравнениям Эйнштейна–Максвелла с тензором Максвелла $F_{\alpha\alpha}$ и тензором Вейля вида

$$C_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = -\frac{6(\mathcal{M}-\mathbf{q}\,\bar G)}{G}F_{\alpha\alpha}F_{\alpha\alpha}, \qquad \bar C_{\dot\alpha\dot\alpha\dot\alpha\dot\alpha} = -\frac{6(\overline{\mathcal{M}}-\mathbf{q}\,G)}{\bar G}\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}, \qquad (3.4.12)$$

имеющим тип D по Петрову. Из (3.3.21) следует, что РЧС τ_μ–инвариантна в соответствии с [77].

По аналогии с AdS_4 случаем, используя (3.4.3)–(3.4.5) можно убедится в том, что в РЧС сохраняются следующие выражения

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{V}^2 - \mathcal{M}G - \overline{\mathcal{M}}\bar{G} - \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1}{G^2}+\frac{1}{\bar{G}^2}\right) + \mathbf{q}\,G\bar{G}\,, \tag{3.4.13}$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{G^3\bar{G}^3}\mathcal{V}^{\alpha\dot\alpha}\mathcal{V}^{\alpha\dot\alpha}F_{\alpha\alpha}\bar{F}_{\dot\alpha\dot\alpha} - 2\left(\frac{\mathcal{M}}{G}+\frac{\overline{\mathcal{M}}}{\bar{G}}\right) - \mathcal{I}_1\left(\frac{1}{G^2}+\frac{1}{\bar{G}^2}\right) - \frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{1}{G^4}+\frac{1}{\bar{G}^4}\right) - \frac{3\lambda^2}{2G^2\bar{G}^2} \tag{3.4.14}$$

Другими словами, $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ являются первыми интегралами полученных развернутых уравнений.

$$d\mathcal{I}_1 = d\mathcal{I}_2 = 0\,.$$

Замечательно, что большинство дифференциальных и алгебраических свойств РЧС буквально совпадают с соответствующими из AdS_4 системы раздела 3.3 с заменой (3.3.19), (3.3.20) на (3.4.13), (3.4.14) и (3.3.52), на

$$\hat\Delta_r = 2\mathbf{M}r + r^2(\lambda^2 r^2 + \mathcal{I}_1) + \frac{1}{2}(-\mathbf{q} + \frac{\mathcal{I}_2}{2}), \tag{3.4.15}$$

$$\hat\Delta_y = 2\mathbf{N}y + y^2(\lambda^2 y^2 - \mathcal{I}_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{q} + \frac{\mathcal{I}_2}{2})\,, \tag{3.4.16}$$

где

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathcal{M} + \overline{\mathcal{M}})\,, \qquad \mathbf{N} = \frac{1}{2i}(\mathcal{M} - \overline{\mathcal{M}})\,. \tag{3.4.17}$$

Аналогично, векторы Керра-Шилда в этой системе строятся по той же процедуре с проекторами Киллинга. Алгебраические и дифференциальные свойства таких векторов даются (3.3.43)–(3.3.45) с заменой D на $\mathcal{D}$ и функции ρ на (3.4.9). Используя (3.4.13) и (3.4.14) и делая замену переменных (3.1.8), получаем

$$(\mathcal{V}^+\mathcal{V}^-) = \frac{\hat\Delta_r}{r^2+y^2}, \qquad (\mathcal{V}^{+-}\mathcal{V}^{-+}) = -\frac{\hat\Delta_y}{r^2+y^2}. \tag{3.4.18}$$

Снова, вектор потенциалы для тензора Максвелла F_{ij} и его Ходж–дуального $*F_{ij}$ имеют вид

$$A_{1,2} = \frac{r}{r^2+y^2}\hat{\mathcal{E}}_{1,2}, \quad A_{3,4} = \frac{y}{r^2+y^2}\hat{\mathcal{E}}_{3,4}, \tag{3.4.19}$$

где

$$\hat{\mathcal{E}}_I = \frac{1}{2}\hat e_{I,\alpha\dot\alpha}\mathbf{h}^{\alpha\dot\alpha} = (\hat K, \hat N, \hat L^{+-}, \hat L^{-+})\,. \tag{3.4.20}$$

Здесь

$$\hat e_{I,\alpha\dot\alpha} = (\hat k_{\alpha\dot\alpha}, \hat n_{\alpha\dot\alpha}, \hat l^{+-}_{\alpha\dot\alpha}, \hat l^{-+}_{\alpha\dot\alpha}) \tag{3.4.21}$$

определены точно также как и в (3.3.41). Напомним, что величины (без) шляпок отвечают (не)деформированной системе.

Свободная ($\mathcal{M} = 0$, $q = 0$) и деформированная ($\mathcal{M} \neq 0$ и/или $q \neq 0$) развернутые системы во многом похожи. В частности, у них одинаковое число первых интегралов, векторов Керра-Шилда, обе содержат тензор Максвелла без источника, а также замкнутый тензор Киллинга–Яно. Это наводит на мысль о том, что должен существовать некоторый поток по параметрам $\mathcal{M}$ и $\mathbf{q}$, который переводит одну систему в другую. Существование такого потока также естественно в контексте ожидаемой связи предлагаемой конструкции с чернодырным решением в нелинейной теории высших спинов. В самом деле, метод интегрирующего потока, который мы собираемся здесь исследовать, во многом похож на интегрирующий поток в теории высших спинов [33], отображающий решения нелинейных уравнений высших спинов в решения свободных уравнений.

Прежде чем перейти к анализу интегрирующих потоков, приведем важные свойства рассмотренных развернутых систем – AdS_4 и РЧС.

3.4.1 Некоторые полезные свойства развернутой системы

Рассмотренные развернутые системы обладают рядом важных свойств, таких как, существование тензоров Киллинга-Яно и еще одного вектора Киллинга. Продемонстрируем это подробнее на примере AdS_4 системы.

Используя (3.3.3) и (3.3.11), найдем

$$D\left(\frac{1}{G^3}F_{\alpha\alpha}\right) = -h_\alpha{}^{\dot{\alpha}}V_{\alpha\dot{\alpha}}. \tag{3.4.22}$$

Следовательно, тензор Максвелла генерирует тензор Киллинга–Яно

$$Y_{\alpha\alpha} = \frac{i}{G^3}F_{\alpha\alpha}, \qquad \bar{Y}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}} = -\frac{i}{\bar{G}^3}\bar{F}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}. \tag{3.4.23}$$

В самом деле, (3.4.23) дает

$$D_{\alpha\dot{\alpha}}Y_{\alpha\alpha} = 0\,, \quad D_{\beta\dot{\alpha}}Y^\beta{}_\alpha + D_{\alpha\dot{\beta}}\bar{Y}^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} = 0\,, \tag{3.4.24}$$

что эквивалентно уравнению Киллинга–Яно в векторных индексах [85]

$$D_{(k}Y_{m)n} = 0, \quad Y_{mn} = -Y_{nm}. \tag{3.4.25}$$

Рассмотрим дуальный по Ходжу тензор (см. приложение III) $*Y_{ij}$. Имея следующие неприводимые компоненты

$$*Y_{\alpha\alpha} = \frac{1}{G^3}F_{\alpha\alpha}, \qquad *\bar{Y}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}} = \frac{1}{\bar{G}^3}\bar{F}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}\,, \tag{3.4.26}$$

он является замкнутой 2-формой Киллинга–Яно, поскольку удовлетворяет уравнению[10] $d\ast Y=0$, то есть

$$\partial_{[i}\ast Y_{jk]}=0,\quad \ast Y_{mn}=-\ast Y_{nm}, \tag{3.4.27}$$

где скобки означают антисимметризацию по индексам. Очевидно, что

$$\ast Y_{mn}=-\frac{1}{\lambda^2}\varkappa_{mn}, \tag{3.4.28}$$

где $\varkappa_{mn}$ определена в (3.3.1).

Можно убедится, что вектор Киллинга $V_{\alpha\dot\alpha}$ может быть выражен как

$$V^i=\frac{1}{3}D_j\ast Y^{ji}. \tag{3.4.29}$$

Заметим, что другой вектор Киллинга можно построить из V^i с помощью тензора K_{ij} генерируемого тензором Киллинга–Яно Y_{ij} (см. [74])

$$U_i=K_{ij}V^j,\qquad K_{ij}=Y_{ik}Y^k{}_j. \tag{3.4.30}$$

В спинорном виде это дает следующую связь между векторами Киллинга

$$U_{\alpha\dot\alpha}=\frac{1}{2G^3\bar G^3}F_\alpha{}^\beta\bar F_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}V_{\beta\dot\beta}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{G^2}+\frac{1}{\bar G^2}\right)V_{\alpha\dot\alpha}. \tag{3.4.31}$$

Действительно, легко убедится, что

$$DU_{\alpha\dot\alpha}=\frac{1}{2}h_\alpha{}^{\dot\beta}\bar\varphi_{\dot\alpha\dot\beta}+\frac{1}{2}h^\beta{}_{\dot\alpha}\varphi_{\alpha\beta}, \tag{3.4.32}$$

где $U_{\alpha\alpha},\bar U_{\dot\alpha\dot\alpha}$ – (анти)самодуальные компоненты 2-формы Киллинга

$$\varphi_{\alpha\alpha}=-\frac{1}{2G^3}\left(I_1+\frac{\lambda^2}{\bar G^2}\right)F_{\alpha\alpha}-\frac{1}{2\bar G^3}V_\alpha{}^{\dot\alpha}V_\alpha{}^{\dot\alpha}\bar F_{\dot\alpha\dot\alpha}. \tag{3.4.33}$$

Заметим, что когда $C_4=C_2^2$, $U_{\alpha\dot\alpha}=0$ и $U_{\alpha\alpha}=0$.

В результате, параметр глобальной симметрии K_{AB} (3.1.1) порождает еще один параметр $\tilde K_{AB}$ в виде

$$\tilde K_{AB}=\begin{pmatrix} U_{\alpha\beta} & \lambda U_{\alpha\dot\beta}\\ \lambda U_{\beta\dot\alpha} & \bar U_{\dot\alpha\dot\beta}\end{pmatrix}=\frac{1}{2\lambda}\left((I_1^2-\lambda^2I_2)K^{-1}_{AB}+I_1K_{AB}\right),\quad D_0\tilde K_{AB}=0\,. \tag{3.4.34}$$

Заметим, что $\tilde K^2_{AB}=\frac{1}{4}I_2K^2_{AB}$, поэтому его $sp(4)$ инварианты имеют вид

$$\mathcal{C}_2 \;=\; \tilde K_{AB}\tilde K^{AB}=I_1I_2, \tag{3.4.35}$$

$$\mathcal{C}_4 \;=\; \mathrm{Tr}(\tilde K^4)=\frac{I_2^2}{4}(I_1^2+\lambda^2I_2)\,. \tag{3.4.36}$$

[10]Напомним, что ковариантный дифференциал действует на формы как обычный внешний дифференциал.

Интересно, что существование тензора Киллинга–Яно и еще одного вектора Киллинга также имеет место в РЧС (3.4.3)–(3.4.8). Можно убедится, что формулы (3.4.22)–(3.4.31) остаются верны в РЧС после переопределения

$$D \to \mathcal{D}\,, \qquad V_{\alpha\dot{\alpha}} \to \mathcal{V}_{\alpha\dot{\alpha}}\,. \tag{3.4.37}$$

3.5 Интегрирующий поток

В этом разделе мы строим интегрирующие потоки вдоль $\mathcal{M}$ и $\mathbf{q}$. Преимуществом использования интегрирующих потоков, являющихся дифференциальными уравнениями первого порядка по модулям чернодырного решения, является то, что интегрирование этих уравнений приводит к описанию метрики черной дыры в терминах начальных данных, описывающих вакуумную AdS_4 геометрию. Другими словами, идея состоит в том, чтобы получить сложные чернодырные решения теории Эйнштейна, как решения простых и легко интегрируемых уравнений на потоки, вид которых определяется следующими формальными условиями совместности

$$\left[\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}},\frac{\partial}{\partial x^m}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial\overline{\mathcal{M}}},\frac{\partial}{\partial x^m}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}},\frac{\partial}{\partial x^m}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}},\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial\overline{\mathcal{M}}},\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}},\frac{\partial}{\partial\overline{\mathcal{M}}}\right]=0 \tag{3.5.1}$$

с уравнениями (3.4.3)–(3.4.5), (3.4.8).

Потребуем, чтобы тензор Максвелла был постоянен вдоль потоков и, следовательно, постоянны скаляры G и $\bar{G}$ (эквивалентно, r и y)

$$\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}F_{\alpha\alpha}=\frac{\partial}{\partial\overline{\mathcal{M}}}F_{\alpha\alpha}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}F_{\alpha\alpha}=0\,. \tag{3.5.2}$$

Хотя требование (3.5.2) и не является необходимым, оно оказывается совместимым с (3.4.3)–(3.4.5) и существенно упрощает дальнейший анализ. Кроме того, в некотором смысле это требование естественно, поскольку различные известные примеры черных дыр допускают представления, согласующееся с (3.5.2). Заметим, что интегрирующий поток по $\overline{\mathcal{M}}$ может быть получен в результате комплексного сопряжения $\partial_{\mathcal{M}}$–потока[11]. Оставляя детали вычислений для раздела 3.5.1, приведем окончательный результат для искомых интегрирующих потоков

$$\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{V}_{\alpha\dot{\alpha}}=\sum_{I=1}^{4}\phi_I\hat{e}_{I,\alpha\dot{\alpha}}\,, \qquad \partial_{\mathcal{M}}\mathbf{h}_{\alpha\dot{\alpha}}=\sum_{I=1}^{4}\phi_I\hat{e}_{I,\alpha\dot{\alpha}}\hat{\mathcal{E}}_I \tag{3.5.3}$$

и

$$\partial_{\mathbf{q}}\mathcal{V}_{\alpha\dot{\alpha}}=\sum_{I=1}^{4}\psi_I\hat{e}_{I,\alpha\dot{\alpha}}\,, \qquad \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{h}_{\alpha\dot{\alpha}}=\sum_{I=1}^{4}\psi_I\hat{e}_{I,\alpha\dot{\alpha}}\hat{\mathcal{E}}_I\,. \tag{3.5.4}$$

[11] Строго говоря, это верно при требовании условия вещественности (3.5.12).

В общем случае произвольного комплексного $\mathcal{M}$ функции ϕ_I и ψ_I имеют следующий вид

$$\phi_1 = \frac{G+\bar{G}}{4}\alpha_1(r)\,, \qquad \phi_2 = \frac{G+\bar{G}}{4}\alpha_2(r)\,, \tag{3.5.5}$$

$$\phi_3 = \frac{G-\bar{G}}{4}\beta_1(y)\,, \qquad \phi_4 = \frac{G-\bar{G}}{4}\beta_2(y) \tag{3.5.6}$$

и

$$\psi_1 = -\frac{G\bar{G}}{4}\theta_1(r)\,, \qquad \psi_2 = -\frac{G\bar{G}}{4}\theta_2(r)\,, \tag{3.5.7}$$

$$\psi_3 = -\frac{G\bar{G}}{4}\vartheta_1(y)\,, \qquad \psi_4 = -\frac{G\bar{G}}{4}\vartheta_2(y)\,, \tag{3.5.8}$$

где функции α, β, θ, ϑ подчинены связям

$$\alpha_1(r) + \alpha_2(r) = \beta_1(y) + \beta_2(y) = 1\,, \tag{3.5.9}$$

$$\theta_1(r) + \theta_2(r) = 1 - \frac{\gamma}{2}\,, \qquad \vartheta_1(y) + \vartheta_2(y) = 1 + \frac{\gamma}{2}, \tag{3.5.10}$$

$$\alpha_1(r)\theta_2(r) = \alpha_2(r)\theta_1(r)\,, \qquad \beta_1(y)\vartheta_2(y) = \beta_2(y)\vartheta_1(y)\,, \tag{3.5.11}$$

и γ – произвольная действительная константа. Кроме этого, мы предполагаем, что α, β, θ, ϑ и γ не зависят от $\mathcal{M}$ и $\mathbf{q}$. Условия вещественности гравитационного поля требуют еще, чтобы

$$\beta_1(y) = \beta_2(y) = \frac{1}{2}\,, \qquad \vartheta_1(y) = \vartheta_2(y) = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{4}\,. \tag{3.5.12}$$

Заметим, что иногда может быть удобна комплексная форма метрики (например, двойная форма Керра-Шилда).

Следствием потоков (3.5.3), (3.5.4) являются также такие соотношения

$$\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_1 = \partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_2 = 0\,, \qquad \partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_1 = 0\,, \qquad \partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_2 = \gamma\,. \tag{3.5.13}$$

Подчеркнем, что произвольные функции $\alpha_{1,2}(r)$, $\beta_{1,2}(y)$ и γ параметризуют калибровочный произвол. Они возникают как константы интегрирования в уравнениях на потоки (см. раздел 3.5.1) и ограничены только условием вещественности (3.5.12), если необходимо. Данный калибровочный произвол довольно нетривиально параметризует произвол в выборе того или иного представления метрики, что дает методу интегрирующего потока широкую область применения.

Сделаем следующий комментарий. При выводе уравнений для интегрирующего потока мы фиксировали калибровочный произвол уравнений Картана. В принципе, это можно было делать различными способами, сохраняя то или иное количество произвольных калибровочных параметров. Наша стратегия состояла в том, чтобы иметь как можно меньше таких параметров, но все же достаточное количество, чтобы охватить самые важные представления, такие как Керра-Шилда, двойное Керра-Шилда и обобщенное представление Картера-Плебанского. В принципе, ничто не мешает обобщать вид интегрирующих потоков, чтобы описать еще более общие представления чернодырных решений.

Заметим, что случай $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ и $\mathbf{q} = 0$ был рассмотрен в [102] в рамках этого же развернутого подхода. Однако, простой сдвиг типа Керра-Шилда, который там использовался для отображения РЧС на свободную AdS_4 систему, не работает когда $\mathcal{M} \neq \pm\overline{\mathcal{M}}$. Причина в том, что в данном случае такое преобразование несовместимо с условием вещественности метрики. В терминах интегрирующего потока это приводит к наличию двух потоков при $\mathcal{M} \neq \pm\overline{\mathcal{M}}$ вместо одного и, следовательно, другим ограничениям на коэффициентные функции.

В случае $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ интегрирование потоков можно произвести иначе, чем при общем комплексном $\mathcal{M}$. Это приводит к заметному упрощению (3.5.3), (3.5.4). В этом случае мы фиксируем калибровочный произвол в виде

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(G + \bar{G})\,, \qquad \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0\,, \tag{3.5.14}$$

$$\psi_1 = -\frac{1}{2}G\bar{G}\,, \qquad \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0\,. \tag{3.5.15}$$

Это, в свою очередь, приводит к

$$\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_1 = \partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_2 = 0\,, \qquad \partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_1 = 0\,, \qquad \partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_2 = -2\,. \tag{3.5.16}$$

Заметим, что различие случаев $\mathcal{M} = \pm\overline{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M} \neq \pm\overline{\mathcal{M}}$ возникает как следствие того, что в первом случае два потока по $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$ можно заменить одним по $\mathcal{M}$, в отличие от второго случая (подробнее см. раздел 3.5.1).

Полученные интегрирующими потоками уравнения могут быть легко проинтегрированны, что приводит, как мы увидим, к AdS_4 ковариантному и бескоординатному описанию метрики черной дыры.

3.5.1 Краткий вывод интегрирующего потока

Опишем в общих чертах вывод уравнений (3.5.3) и (3.5.4). Поскольку для любого потока по $\mathcal{M}$ или $\overline{\mathcal{M}}$ метод одинаков, мы ограничимся $\partial_{\mathcal{M}}$–потоком с комплексным $\mathcal{M}$.

Рассмотрим самое общее разложение производных $\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{V}_{\alpha\dot\alpha}$ и $\partial_{\mathcal{M}}\mathbf{h}_{\alpha\dot\alpha}$ в базисе векторов Керра-Шилда (3.4.21)

$$\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{V}_{\alpha\dot\alpha}=\sum_{I=1}^{4}t_I\hat e_{I,\alpha\dot\alpha}\,,\qquad \partial_{\mathcal{M}}\mathbf{h}_{\alpha\dot\alpha}=\sum_{I,J=1}^{4}\Phi_{IJ}\hat e_{I,\alpha\dot\alpha}\hat{\mathcal{E}}_J \tag{3.5.17}$$

с произвольными функциями $t_I(x,\mathcal{M},\dots)$ и $\Phi_{IJ}(x,\mathcal{M},\dots)$. Применяя $[\partial_{\mathcal{M}},d]=0$ к (3.3.18) и используя $\partial_{\mathcal{M}}G=\partial_{\mathcal{M}}\bar G=0$ (см. (3.5.2)), имеем

$$\sum_{I=1}^{4}(-1)^{\sigma_I+\sigma_J}\Phi_{IJ}\;=\;t_J, \tag{3.5.18}$$

$$\sum_{I=1}^{4}(-1)^{\bar\sigma_I+\bar\sigma_J}\Phi_{IJ}\;=\;t_J. \tag{3.5.19}$$

Некоторые компоненты Φ_{IJ} можно положить равными нулю, используя калибровочную симметрию уравнений Картана. В самом деле, калибровочные преобразования тетрады имеют вид

$$\delta\mathbf{h}_{\alpha\dot\alpha}=\mathcal{D}\xi_{\alpha\dot\alpha}+\xi_\alpha{}^\beta\mathbf{h}_{\beta\dot\alpha}+\bar\xi_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\mathbf{h}_{\alpha\dot\beta}\,, \tag{3.5.20}$$

где $\xi_{\alpha\dot\alpha},\xi_{\alpha\alpha},\bar\xi_{\dot\alpha\dot\alpha}$ – произвольные калибровочные параметры. Используя (3.5.17) для выделения чисто калибровочной части в

$$\delta_{\mathcal{M}}\mathbf{h}_{\alpha\dot\alpha}=\sum_{I,J=1}^{4}\Phi_{IJ}\hat e_{I,\alpha\dot\alpha}\hat{\mathcal{E}}_J\delta\mathcal{M}\,, \tag{3.5.21}$$

видно, что шестью параметрами $\xi_{\alpha\alpha}$ и $\bar\xi_{\dot\alpha\dot\alpha}$ можно устранить антисимметричную часть матрицы $\Phi_{[IJ]}$. Выбираем калибровочный параметр $\xi_{\alpha\dot\alpha}$ в виде

$$\xi_{\alpha\dot\alpha}=\sum_{I=1}^{4}S_I\hat e_{I,\alpha\dot\alpha}\delta\mathcal{M}\,, \tag{3.5.22}$$

где $S_I(G,\bar G,\mathcal{M},\dots)$ – некоторый набор функций. Используя (3.3.43), (3.4.11) и (3.3.45) получаем

$$\mathcal{D}\xi_{\alpha\dot\alpha}=\sum_{I,J=1}^{4}(B_{[IJ]}+B_{(IJ)})\hat e_{I,\alpha\dot\alpha}\hat{\mathcal{E}}_J\delta\mathcal{M}\,, \tag{3.5.23}$$

где $B_{(IJ)}$ и $B_{[IJ]}$ – некоторые симметричные и антисимметричные коэффициенты. Наконец, подстраивая калибровочные параметры $\xi_{\alpha\alpha}$ и $\bar\xi_{\dot\alpha\dot\alpha}$ нужным образом, избавимся от антисимметричной матрицы $\Phi_{[IJ]}$. Симметричная же часть $\Phi_{(IJ)}$, в следствие уравнений (3.5.18) и (3.5.19), может быть только следующего вида

$$\Phi_{(IJ)}=\begin{pmatrix}\Phi_{11}&X&Z&Z\\X&\Phi_{22}&Z&Z\\Z&Z&\Phi_{33}&Y\\Z&Z&Y&\Phi_{44}\end{pmatrix}. \tag{3.5.24}$$

Ее внедиагональная часть параметризуется тремя параметрами X, Y, Z. Остаточная калибровочная симметрия в $\xi_{\alpha\dot{\alpha}}$ позволяет положить X, Y, Z равными нулю. На этом этапе остается один произвольный калибровочный параметр. Итак, частичная фиксация калибровки приводит к следующим структурным функциям

$$\Phi_{IJ} = \delta_{IJ}\phi_J\,, \qquad t_I = \phi_I\,, \tag{3.5.25}$$

где δ_{IJ} – δ-символ Кронекера.

Заметим, что фиксация калибровки, делающая Φ_{IJ} диагональной, вместе с условием (3.5.2) приводит к независимости от $\mathcal{M}$ 2-формы Максвелла

$$\partial_{\mathcal{M}}F = 0\,. \tag{3.5.26}$$

Условие $[\partial_{\mathcal{M}}, d] = 0$, примененное к (3.4.3)–(3.4.5), после довольно долгих, но простых вычислений с использованием (3.3.43) приводит к следующим простым условиям совместности

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y} + (G - \bar{G})\phi_1 = 0\,, \qquad \frac{\partial\phi_3}{\partial r} + (G + \bar{G})\phi_3 = 0\,, \tag{3.5.27}$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial y} + (G - \bar{G})\phi_2 = 0\,, \qquad \frac{\partial\phi_4}{\partial r} + (G + \bar{G})\phi_4 = 0 \tag{3.5.28}$$

и связям вида

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = \frac{1}{2}G + \frac{1}{2}\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_1, \tag{3.5.29}$$

$$\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \frac{1}{2}\bar{G} + \frac{G^2 + \bar{G}^2}{4G\bar{G}}\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_1 + \frac{G\bar{G}}{4}\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_2\,, \tag{3.5.30}$$

что эквивалентно переписывается в виде

$$\phi_1 + \phi_2 = \frac{G + \bar{G}}{4}(1 + r\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{4r}\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_2), \tag{3.5.31}$$

$$\phi_3 + \phi_4 = \frac{G - \bar{G}}{4}(1 - iy\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_1 + \frac{i}{4y}\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_2). \tag{3.5.32}$$

Заметим, что условия (3.5.29), (3.5.30) возникают в результате применения $\partial_{\mathcal{M}}$–потока к (3.4.13) и (3.4.14), соответственно.

Решения для ϕ_I существуют для любых значений констант $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$. Тем не менее, случай когда $\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_{1,2} \neq 0$, хотя и не нарушает совместности (3.5.27), (3.5.28), оказывается несовместим с условием вещественности метрики, но даже и в комплексном случае не приводит к каким–либо упрощениям метрики. Потребуем поэтому, чтобы

$$\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_1 = 0\,, \qquad \partial_{\mathcal{M}}\mathcal{I}_2 = 0\,. \tag{3.5.33}$$

Выполняя простое интегрирование уравнений (3.5.27) и (3.5.28), получаем (3.5.5), (3.5.6) и (3.5.9) с некоторыми константами интегрирования $\alpha_{1,2}(r)$ и $\beta_{1,2}(y)$.

Анализ для $\partial_{\mathbf{q}}$–потока проводится аналогично и приводит к тем же дифференциальным уравнениям (3.5.27), (3.5.28) на функции ψ_I, а также связям

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = -\frac{G\bar{G}}{2} + \frac{1}{2}\partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_1 \tag{3.5.34}$$

$$\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4 = \frac{G^2 + \bar{G}^2}{4G\bar{G}}\partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_1 + \frac{G\bar{G}}{4}\partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_2 \tag{3.5.35}$$

или, эквивалентно,

$$\psi_1 + \psi_2 = -\frac{G\bar{G}}{4}(1 - 2r^2\partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_1 - \frac{1}{2}\partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_2), \tag{3.5.36}$$

$$\psi_3 + \psi_4 = -\frac{G\bar{G}}{4}(1 - 2y^2\partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{2}\partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_2)\,. \tag{3.5.37}$$

Снова удобно положить $\partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_1 = 0$, что воспроизводит уравнения (3.5.7), (3.5.8) и (3.5.10), где $\gamma = \partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_2$. Наконец, условие $[\partial_{\mathcal{M}}, \partial_{\mathbf{q}}] = 0$ приводит к связи (3.5.11). Причина, по которой мы допускаем $\partial_{\mathbf{q}}\mathcal{I}_2 \neq 0$, состоит в том, что таким образом удается воспроизводить метрику в форме Керра-Шилда для $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$.

Наконец, случай когда $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ можно рассмотреть отдельно, поскольку он приводит к значительному упрощению метрики. Когда $\mathcal{M}$ действительно, остается один поток вместо двух в случае комплексного $\mathcal{M}$. При этом возникает такая же система дифференциальных уравнений на структурные функции (3.5.27), (3.5.28). Аналогично, чтобы получить полный набор условий совместности на ϕ_I необходимо подействовать $\partial_{\mathcal{M}}$ на первые интегралы (3.4.13), (3.4.14). Заметим, что положить $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ в правых частях уравнений (3.4.13), (3.4.14) нужно перед их дифференцированием. Также как и в комплексном случае, удобно потребовать (3.5.33). В результате, в дополнение к (3.5.27), (3.5.28) получаем следующие связи

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = \frac{1}{2}(G + \bar{G})\,, \quad \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \frac{1}{2}(G + \bar{G})\,. \tag{3.5.38}$$

Общее решение уравнений (3.5.27), (3.5.28), (3.5.38) имеет вид

$$\phi_1 = \frac{G + \bar{G}}{2}\alpha_1(r)\,, \qquad \phi_2 = \frac{G + \bar{G}}{2}\alpha_2(r)\,, \tag{3.5.39}$$

$$\phi_3 = \frac{G - \bar{G}}{2}\beta_1(y)\,, \qquad \phi_4 = \frac{G - \bar{G}}{2}\beta_2(y)\,, \tag{3.5.40}$$

где

$$\alpha_1(r) + \alpha_2(r) = 1\,, \qquad \beta_1(y) + \beta_2(y) = 0\,. \tag{3.5.41}$$

Такое интегрирование позволяет выбрать калибровочные параметры в виде $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, чтобы получить (3.5.14).

Заметим, что для любого из интегрирующих потоков $\partial_\chi = (\partial_{\mathcal{M}}, \partial_{\overline{\mathcal{M}}}, \partial_{\mathbf{q}})$ условие интегрируемости

$$[\partial_\chi, d] = 0 \tag{3.5.42}$$

приводит к одним и тем же дифференциальным уравнениям на структурные функции (3.5.27), (3.5.28). Одних этих уравнений недостаточно для полной совместности (3.5.42). Оставшиеся условия, такие как (3.5.29) и (3.5.30), возникают в результате требования того, что (3.4.13), (3.4.14) являются константами в РЧС. Они вместе с (3.5.27) и (3.5.28) уже удовлетворяют (3.5.42). Решив (3.5.42), остается проанализировать условия

$$[\partial_\chi, \partial_{\chi'}] = 0\,, \tag{3.5.43}$$

которые, как оказывается, не приводят к дополнительным ограничениям.

3.6 От AdS_4 к черной дыре

3.6.1 Решение для векторов Керра-Шилда

Чтобы восстановить поля описывающие черную дыру из уравнений для потоков, проще начать с векторов Керра-Шилда. Рассмотрим общий случай произвольного комплексного $\mathcal{M}$.

Удобно ограничить калибровочные параметры интегрирующего потока (3.5.9)–(3.5.11) в виде

$$\alpha_1(r) = \theta_1(r)\,, \quad \alpha_2(r) = \theta_2(r)\,, \quad \beta_1(y) = \vartheta_1(y)\,, \quad \beta_2(y) = \vartheta_2(y)\,, \quad \gamma = 0\,. \tag{3.6.1}$$

Заметим, что такой выбор совместим с условиями вещественности (3.5.12) только если $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$. Как уже было отмечено, нарушение вещественности может оказаться полезным, поскольку включает в себя двойное представление Керра-Шилда комплексной метрики черной дыры.

Чтобы получить векторы Керра-Шилда в терминах их AdS_4 аналогов (3.6.6), (3.6.7) посредством интегрирования потоков, продифференцируем (3.4.21) вдоль потоков. Это приводит к следующим уравнениям

$$\partial_{\mathcal{M}} \hat{k}_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{\alpha_2 r}{\hat{\Delta}_r}\hat{k}_{\alpha\dot\alpha}, \quad \partial_{\mathcal{M}} \hat{l}^{+-}_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{\beta_2 y}{i\hat{\Delta}_y}\hat{l}^{+-}_{\alpha\dot\alpha}, \tag{3.6.2}$$

$$\partial_{\mathcal{M}} \hat{n}_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{\alpha_1 r}{\hat{\Delta}_r}\hat{n}_{\alpha\dot\alpha}, \quad \partial_{\mathcal{M}} \hat{l}^{-+}_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{\beta_1 y}{i\hat{\Delta}_y}\hat{l}^{-+}_{\alpha\dot\alpha}\,. \tag{3.6.3}$$

Аналогично, имеем

$$\partial_{\mathbf{q}}\hat{k}_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{\theta_2}{2\hat{\Delta}_r}\hat{k}_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \partial_{\mathbf{q}}\hat{l}^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}} = -\frac{\vartheta_2}{2\hat{\Delta}_y}\hat{l}^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}}, \tag{3.6.4}$$

$$\partial_{\mathbf{q}}\hat{n}_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{\theta_1}{2\hat{\Delta}_r}\hat{n}_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \partial_{\mathbf{q}}\hat{l}^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}} = -\frac{\vartheta_1}{2\hat{\Delta}_y}\hat{e}_{4,\alpha\dot{\alpha}}. \tag{3.6.5}$$

Напомним, что параметры $\alpha_{1,2}(r), \beta_{1,2}(y), \theta_{1,2}(r), \vartheta_{1,2}(y)$ появились как константы интегрирования (см. уравнения (3.5.27), (3.5.28) в разделе 3.5.1). Интегрирование со связью (3.6.1) приводит к

$$\hat{k}_{\alpha\dot{\alpha}} = k_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\frac{\Delta_r}{\hat{\Delta}_r}\right)^{\alpha_2}, \hat{n}_{\alpha\dot{\alpha}} = n_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\frac{\Delta_r}{\hat{\Delta}_r}\right)^{\alpha_1}, \tag{3.6.6}$$

$$\hat{l}^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}} = l^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\frac{\Delta_y}{\hat{\Delta}_y}\right)^{\beta_2}, \quad \hat{l}^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}} = l^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\frac{\Delta_y}{\hat{\Delta}_y}\right)^{\beta_1}, \tag{3.6.7}$$

где величины без шляпок отвечают начальным данным из AdS_4 развернутой системы (3.3.13)–(3.3.15)

$$\Delta_{r,y} = \hat{\Delta}_{r,y}\Big|_{\mathcal{M},\overline{\mathcal{M}},\mathbf{q}=0}, \qquad e_{I,\alpha\dot{\alpha}} = \hat{e}_{I,\alpha\dot{\alpha}}\big|_{\mathcal{M},\overline{\mathcal{M}},\mathbf{q}=0}. \tag{3.6.8}$$

Свернем второе уравнение в (3.5.3) последовательно со всеми векторами Керра-Шилда (3.4.21). Это приводит к

$$\partial_{\mathcal{M}}\hat{K} = \frac{\alpha_2 r}{\hat{\Delta}_r}(\hat{N}-\hat{K}), \quad \partial_{\mathcal{M}}\hat{L}^{+-} = \frac{\beta_2 y}{i\hat{\Delta}_y}(\hat{L}^{-+}-\hat{L}^{+-}), \tag{3.6.9}$$

$$\partial_{\mathcal{M}}\hat{N} = \frac{\alpha_1 r}{\hat{\Delta}_r}(\hat{K}-\hat{N}), \quad \partial_{\mathcal{M}}\hat{L}^{-+} = \frac{\beta_1 y}{i\hat{\Delta}_y}(\hat{L}^{+-}-\hat{L}^{-+}). \tag{3.6.10}$$

Анализ $\partial_{\mathbf{q}}$–потока проводится аналогично, и интегрирование с условием (3.6.1) дает

$$\hat{K} = K - \alpha_2(r)\frac{\hat{\Delta}_r-\Delta_r}{\hat{\Delta}_r}(K-N), \quad \hat{N} = N - \alpha_1(r)\frac{\hat{\Delta}_r-\Delta_r}{\hat{\Delta}_r}(N-K), \tag{3.6.11}$$

$$\hat{L}^{+-} = L^{+-} - \beta_2(y)\frac{\hat{\Delta}_y-\Delta_y}{\hat{\Delta}_y}(L^{+-}-L^{-+}), \quad \hat{L}^{-+} = L^{-+} - \beta_1(y)\frac{\hat{\Delta}_y-\Delta_y}{\hat{\Delta}_y}(L^{-+}-L^{+-}). \tag{3.6.12}$$

Заметим, что

$$\alpha_1 K + \alpha_2 N = \alpha_1\hat{K} + \alpha_2\hat{N}, \tag{3.6.13}$$

$$\beta_1 L^{+-} + \beta_2 L^{-+} = \beta_1\hat{L}^{+-} + \beta_2\hat{L}^{-+}. \tag{3.6.14}$$

Отметим также, что $\hat{L}^{+-}$ и $\hat{L}^{-+}$ комплексно сопряжены друг другу только при условии $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$. Первые интегралы, соответствующие данной калибровке (3.6.1) совпадают с интегралами AdS_4

$$\mathcal{I}_1 = I_1\,, \qquad \mathcal{I}_2 = I_2\,. \tag{3.6.15}$$

Теперь рассмотрим особый случай, когда $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$. Используя простейшую калибровку для коэффициентов потока (3.5.14), (3.5.15), выполним интегрирование поля тетрады, приводящее к представлению Керра-Шилда

$$\hat{k}_{\alpha\dot{\alpha}} = k_{\alpha\dot{\alpha}}\,, \qquad \hat{K} = K\,, \tag{3.6.16}$$

$$\mathbf{h}_{\alpha\dot{\alpha}} = h_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\Big(M(G+\bar{G}) - \mathbf{q}G\bar{G}\Big)k_{\alpha\dot{\alpha}}K \tag{3.6.17}$$

с

$$\mathcal{I}_1 = I_1\,, \qquad \mathcal{I}_2 = I_2 - 2\mathbf{q}\,. \tag{3.6.18}$$

Подчеркнем еще раз, что в случае $C_4 = C_2^2$ векторы Керра-Шилда $l^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}}$ и $l^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}}$ не определены уже в вакуумной геометрии AdS_4, поэтому векторы $\hat{l}^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}}$ и $\hat{l}^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}}$ не могут быть выражены через свои вакуумные AdS_4 значения.

Заметим, что AdS_4 развернутая система (3.3.13)–(3.3.15) имеет хорошо определенный плоский предел $\lambda \to 0$. Следовательно, привлекая дополнительный поток по космологической постоянной λ^2, можно проинтегрировать РЧС с начальными условиями пространства–времени Минковского. В этом случае первые интегралы РЧС будут связаны с инвариантами алгебры Пуанкаре, а решение будет записываться в ковариантном относительно метрики Минковского виде. Мы, тем не менее, предпочитаем AdS_4 ковариантное представление, а не представление Пуанкаре.

3.6.2 AdS_4 ковариантный вид метрики черной дыры

Полученные векторы Керра-Шилда (3.6.6), (3.6.7) и 1–формы (3.6.11), (3.6.12) позволяют реконструировать тетраду и метрику черной дыры. Рассмотрим общий случай с комплексным $\mathcal{M}$. Чтобы получить метрику, воспользуемся следующим тождеством

$$\mathbf{h}_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{2}{(\hat{k}\hat{n})}(\hat{k}_{\alpha\dot{\alpha}}\hat{N} + \hat{n}_{\alpha\dot{\alpha}}\hat{K}) + \frac{2}{(\hat{l}^{+-}\hat{l}^{-+})}(\hat{l}^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}}\hat{L}^{-+} + \hat{l}^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}}\hat{L}^{+-})\,, \tag{3.6.19}$$

которое является следствием соотношений полноты для двухкомпонентных спиноров

$$\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \frac{1}{(\hat{k}\hat{n})}(\hat{k}_{\alpha\dot{\alpha}}\hat{n}_{\beta\dot{\beta}} + \hat{n}_{\alpha\dot{\alpha}}\hat{k}_{\beta\dot{\beta}}) + \frac{1}{(\hat{l}^{+-}\hat{l}^{-+})}(\hat{l}^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}}\hat{l}^{-+}_{\beta\dot{\beta}} + \hat{l}^{-+}_{\alpha\dot{\alpha}}\hat{l}^{+-}_{\beta\dot{\beta}})\,. \tag{3.6.20}$$

Его легко доказать, используя (3.3.32). Подставляя (3.6.6), (3.6.7), (3.6.11), (3.6.12) в (3.6.19), мы находим тетраду в бескоординатном виде.

По определению, метрика равна

$$ds^2 = \frac{1}{2}\mathbf{h}_{i\alpha\dot{\alpha}}\mathbf{h}_j{}^{\alpha\dot{\alpha}}dx^i dx^j. \tag{3.6.21}$$

Подставляя (3.6.19), получаем координатно–независимое представление для метрики

$$ds^2 = \frac{\hat{\Delta}_r}{r^2+y^2}\hat{K}\hat{N} - \frac{\hat{\Delta}_y}{r^2+y^2}\hat{L}^{+-}\hat{L}^{-+}, \tag{3.6.22}$$

где $\hat{\Delta}_r$ и $\hat{\Delta}_y$ были определены в (3.4.15) и (3.4.16), соответственно. С помощью (3.6.11) и (3.6.12) перепишем метрику через AdS_4 1-формы Керра-Шилда (3.3.53)

$$\begin{aligned} ds^2 = ds_0^2 &+ \frac{2\mathbf{M}r - \mathbf{q}/2}{r^2+y^2}(\alpha_1(r)K + \alpha_2(r)N)^2 - \frac{2\mathbf{N}y + \mathbf{q}/2}{r^2+y^2}(\beta_1(y)L^{+-} + \beta_2(y)L^{-+})^2 \\ &+ 4\alpha_1(r)\alpha_2(r)\frac{r^2+y^2}{\Delta_r\hat{\Delta}_r}(2\mathbf{M}r - \mathbf{q}/2)dr^2 - 4\beta_1(y)\beta_2(y)\frac{r^2+y^2}{\Delta_y\hat{\Delta}_y}(2\mathbf{N}y + \mathbf{q}/2)dy^2, \end{aligned} \tag{3.6.23}$$

где $\alpha_1(r) + \alpha_2(r) = \beta_1(y) + \beta_2(y) = 1$, а ds_0^2 – фоновая метрика AdS_4, которую также можно представить в аналогичном (3.6.22) виде

$$ds_0^2 = \frac{\Delta_r}{r^2+y^2}KN - \frac{\Delta_y}{r^2+y^2}L^{+-}L^{-+}. \tag{3.6.24}$$

Условие вещественности (3.6.23) фиксирует

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}\,. \tag{3.6.25}$$

Случай комплексной метрики, например с $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, дает двойную форму Керра-Шилда метрики (3.6.23)

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{2r}{r^2+y^2}\left(\mathbf{M} - \frac{e^2+\mathrm{g}^2}{2r}\right)KK - \frac{2y}{r^2+y^2}\left(\mathbf{N} + \frac{e^2+\mathrm{g}^2}{2y}\right)L^{+-}L^{+-}\,, \tag{3.6.26}$$

которая удовлетворяет как полным, так и только линеаризованным уравнениям Эйнштейна[12].

Чтобы прояснить физический смысл метрики (3.6.23), напомним сначала ее пространство параметров. Имеются три параметра $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{q}$ (и λ), которые нельзя переопределить диффеоморфизмами, поскольку они входят в кривизну Римана (3.4.6), (3.4.7). Кроме того есть два параметра, связанные с первыми интегралами (3.6.15)

[12]Заметим, что (3.6.26) становится вещественной после поворота Вика к (2,2) сигнатуре.

и выражающиеся через AdS_4 инварианты (3.3.57). Это, так называемые, кинематические параметры, один из которых всегда можно выбрать равным -1, 0 или 1. Напомним, что найденный интегрирующий поток отображает РЧС в уравнение на параметр глобальной симметрии AdS_4 (3.3.9), (3.3.10), которое инвариантно относительно перемасштабирования (3.1.21). Это позволяет положить, например, $C_2 = \pm 1$ или 0.

В результате диффеоморфно-инвариантные параметрами являются три параметра кривизны $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{q}$ (и λ) и два кинематических – дискретный C_2 и непрерывный C_4.

Покажем теперь, что (3.6.23) описывает в бескоординатном виде AdS_4–Керр–Ньюман–Тауб–НУТ решение, открытое Картером [68] и Плебанским [69]. Чтобы это сделать, выберем некоторую двухпараметрическую реализацию AdS_4 пространства, которая покрывает всю область значений инвариантов для некоторого AdS_4 вектора Киллинга, и вычислим соответствующую метрику (3.6.23).

3.7 Координатная реализация AdS_4

Следуя [68], удобно выбрать метрику AdS_4 в некотором двух параметрическом виде. Вводя координаты $\{\tau, \psi, r, y\}$ AdS_4, выпишем метрику в следующем виде

$$ds_0^2 = \frac{\Delta_r}{r^2+y^2}(d\tau + y^2 d\psi)^2 - \frac{\Delta_y}{r^2+y^2}(d\tau - r^2 d\psi)^2 - \frac{r^2+y^2}{\Delta_r}dr^2 - \frac{r^2+y^2}{\Delta_y}dy^2\,, \quad (3.7.1)$$

где

$$\Delta_r = r^2(\lambda^2 r^2 + \epsilon) + a^2, \quad \Delta_y = y^2(\lambda^2 y^2 - \epsilon) + a^2\,. \quad (3.7.2)$$

Эта метрика удовлетворяет AdS_4 уравнениям Эйнштейна

$$R_{ij} = 3\lambda^2 g_{ij}\,. \quad (3.7.3)$$

Вектор Киллинга $\frac{\partial}{\partial t}$

$$V^i = \{1, 0, 0, 0\} \quad (3.7.4)$$

порождает с помощью (3.3.13) 2-форму Максвелла, удовлетворяющую вакуумным уравнениям Максвелла

$$F = \frac{1}{(r^2+y^2)^2}((d\tau + y^2 d\psi)\wedge(r^2-y^2)dr + 2(d\tau - r^2 d\psi)\wedge rydy)\,, \quad (3.7.5)$$

которой отвечает 1-форма вектор потенциала вида

$$F = \mathrm{d}A\,, \qquad A = \frac{r}{r^2+y^2}(d\tau + y^2 d\psi). \quad (3.7.6)$$

Тензор Максвелла (3.7.5) вместе с вектором Киллинга (3.7.4) удовлетворяют AdS_4 развернутым уравнениям (3.3.13)–(3.3.15). Можно убедится, что координаты r и y совпадают с каноническими координатами, вычисленными по (3.1.8).

Используя (3.3.37) и (3.3.38), вычислим в данных координатах 1-формы Керра-Шилда

$$K = d\tau + y^2 d\psi + \frac{r^2+y^2}{\Delta_r}dr, \quad N = d\tau + y^2 d\psi - \frac{r^2+y^2}{\Delta_r}dr, \tag{3.7.7}$$

$$L^{+-} = d\tau - r^2 d\psi + \frac{r^2+y^2}{i\Delta_y}dy, \quad L^{-+} = d\tau - r^2 d\psi - \frac{r^2+y^2}{i\Delta_y}dy\,. \tag{3.7.8}$$

Имеем следующие значения для первых интегралов AdS_4 развернутой системы (3.3.19), (3.3.20)

$$I_1 = \epsilon\,, \qquad I_2 = 4a^2\,. \tag{3.7.9}$$

Параметры a и ϵ, которые входят в AdS_4 метрику (3.7.1) как чисто калибровочные произвольные константы,[13] окажутся кинематическими параметрами черной дыры Картера-Плебанского после деформации AdS_4 системы.

Заметим, что имея выражения для фоновых 1-форм (3.7.7) и (3.7.8), легко вычислить в данных координатах тензоры Киллинга–Яно (см. подраздел 3.4.1)

$$Y = ydr \wedge (dt + y^2 d\psi) + rdy \wedge (dt - r^2 d\psi), \tag{3.7.10}$$

$$*Y = rdr \wedge (dt + y^2 d\psi) - ydy \wedge (dt - r^2 d\psi). \tag{3.7.11}$$

3.8 Примеры метрик

3.8.1 Решение Картера-Плебанского

Рассмотрим вещественный случай (3.6.25) метрики (3.6.23) и зафиксируем калибровочные функции в виде

$$\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = \frac{1}{2}\,. \tag{3.8.1}$$

Подставляя (3.7.1) и (3.7.7), (3.7.8) в (3.6.23), получаем

$$ds^2 = \frac{\hat{\Delta}_r}{r^2+y^2}(d\tau + y^2 d\psi)^2 - \frac{\hat{\Delta}_y}{r^2+y^2}(d\tau - r^2 d\psi)^2 - \frac{r^2+y^2}{\hat{\Delta}_r}dr^2 - \frac{r^2+y^2}{\hat{\Delta}_y}dy^2\,, \tag{3.8.2}$$

где

$$\hat{\Delta}_r = 2\mathbf{M}r - e^2 - g^2 + r^2(\lambda^2 r^2 + \epsilon) + a^2, \tag{3.8.3}$$

$$\hat{\Delta}_y = 2\mathbf{N}y + e^2 + g^2 + y^2(\lambda^2 y^2 - \epsilon) + a^2. \tag{3.8.4}$$

[13] a^2 может также быть отрицательным.

(Напомним, что $\mathbf{q} = 2(e^2 + \mathrm{g}^2)$.) Метрика (3.8.2) является хорошо известным решением Картера-Плебанского вакуумных уравнений Эйнштейна–Максвелла, описывающее метрику типа D по Петрову и характеризуемую массой $\mathbf{M}$, НУТ–зарядом $\mathbf{N}$, электрическим и магнитным зарядами e и g. Она имеет два первых интеграла (3.4.13), (3.4.14) a^2 и ϵ, один из которых можно всегда положить равным 1, 0 или -1.

Поскольку данный выбор координат на AdS_4 (3.7.1) вместе с вектором Киллинга (3.7.4) покрывает весь диапазон AdS_4 инвариантов (3.7.9), то тем самым мы показали, что РЧС с общими произвольными параметрами описывает семейство метрик Картера-Плебанского (3.8.2). Параметрический вид (3.6.23) позволяет выбирать их различные представления.

В частности, можно перейти к двойной форме Керра-Шилда(3.6.26), построенной из двух взаимно ортогональных фоновых нулевых векторов $k_{\alpha\dot{\alpha}}$, $l^{+-}_{\alpha\dot{\alpha}}$, которая зависит от параметров деформации линейно. С помощью поворота Вика и замены переменной ее можно преобразовать к вещественному виду (3.8.2) [78].

3.8.2 Решение Керра-Ньюмана

Рассмотрим случай нулевого НУТ-заряда $\mathbf{N} = 0$, отвечающий действительному $\mathcal{M}$. Черная дыра Керра, для которой $\mathbf{q} = 0$, была рассмотрена в [102]. Случай $\mathbf{q} \neq 0$ отвечает решению Керра-Ньюмана, которое описывает вращающуюся электромагнитно заряженную черную дыру (при условии, что ее заряд и угловой момент таковы, что решение не имеет голых сингулярностей). Чтобы описать этот случай, положим $\mathbf{N} = 0$ в (3.6.23). Однако, как мы уже убедились, интегрирующий поток с $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ можно проинтегрировать иначе (3.6.17), что приводит к более простому виду метрики, а именно к виду Керра-Шилда

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{2\mathbf{M}r - \mathbf{q}}{r^2 + y^2} KK\,. \tag{3.8.5}$$

Чтобы отождествить AdS_4 инварианты данного решения с параметром вращения черной дыры, можно воспользоваться системой координат для метрики AdS_4 из работы [79] и выбрать некоторый специальный вектор Киллинга [102]. Тогда инварианты имеют следующий вид

$$C_2 = 1 + \lambda^2 a^2\,, \qquad C_4 = C_2^2 + 4\lambda^2 a^2\,. \tag{3.8.6}$$

Важный частный случай статического решения (решение Рейснера–Нордстрема) получается при $a = 0$ или, что эквивалентно, при $C_4 = C_2^2 \neq 0$.

3.9 Безмассовые решения чернодырного типа

Рассмотрим физически важный пример метрики Керра, то есть $\mathbf{N} = \mathbf{q} = 0$. Покажем, что в этом случае РЧС порождает решения типа Керра-Шилда для свободных уравнений произвольного целого спина в AdS_4.

Рассмотрим бесследовый симметричный тензор

$$\varphi_{mm} = \frac{1}{2}(G + \bar{G})k_m k_m \,. \tag{3.9.1}$$

Используя (3.4.3), (3.4.4) и (3.4.6), а также (3.3.43), легко показать, что

$$\mathcal{D}^n \mathcal{D}_n \varphi_{mm} - 2\mathcal{D}^n \mathcal{D}_m \varphi_{mn} = -6\lambda^2 \varphi_{mm} \,, \tag{3.9.2}$$

причем уравнение (3.9.2) остается верным при замене ковариантных производных $\mathcal{D}$ на фоновые D. В последнем случае мы получаем решение типа Керра-Шилда для уравнения свободного спина $s = 2$, что конечно есть не что иное как уравнение Эйнштейна для решения Керра.

Случай спина $s = 1$ аналогичен. Простым следствием (3.3.49) является то, что векторное поле $\varphi_m = \frac{1}{2}(G + \bar{G})k_m$ удовлетворяет (3.3.17). Легко видеть, что как и в случае спина $s = 2$, уравнения Максвелла выполнены, как для чернодырных производных, так и для фоновых AdS_4.

Ситуация меняется для скаляра $\varphi = \frac{1}{2}(G + \bar{G})$. Используя (3.4.3), (3.4.4), (3.3.18) и (3.3.17) имеем

$$\mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} G = 4\lambda^2 G - 4\mathbf{M} G^4 \,. \tag{3.9.3}$$

Таким образом, уравнение (3.9.3) сводится к свободному уравнению для спина $s = 0$ $D^{\alpha\dot{\alpha}} D_{\alpha\dot{\alpha}} \varphi = 4\lambda^2 \varphi$ только в свободном пределе, когда $\mathbf{M} = 0$, $\mathcal{D} = D$. Это уравнение описывает распространение безмассового скаляра в пространстве AdS_4. Пользуясь дифференциальными свойствами (3.3.43) вектора $k_{\alpha\dot{\alpha}}$, легко показать, что

$$\mathcal{D}_m (k^m k^n \mathcal{D}_n (G + \bar{G})^2) = 4(G^4 + \bar{G}^4) \,. \tag{3.9.4}$$

Таким образом, из уравнения (3.9.3) следует

$$\mathcal{D}^m \mathcal{D}_m \varphi = 2\lambda^2 \varphi - 2\mathcal{M} \mathcal{D}_m (\varphi^{mn} \mathcal{D}_n \varphi) \,. \tag{3.9.5}$$

Второй член в правой части представляет собой некоторую нелинейную добавку взаимодействия скаляра со спином $s = 2$. Итак, поля $\varphi, \varphi_m, \varphi_{mm}$ удовлетворяют свободным безмассовым уравнениям в пространстве AdS_4 для спинов 0, 1 и 2, соответственно [17, 80]. Пользуясь соотношениями РЧС, можно показать, что[14]

$$\varphi_{m(s)} = \frac{1}{2}(G+\bar{G})k_m \dots k_m \tag{3.9.6}$$

отвечает решению типа Керра-Шилда уравнения на безмассовое поле спина s в пространстве AdS_4

$$D^n D_n \varphi_{m(s)} - s D_n D_m \varphi^n{}_{m(s-1)} = -2(s-1)(s+1)\lambda^2 \varphi_{m(s)}\,. \tag{3.9.7}$$

В метрике черной дыры Керра уравнение (3.9.7) модифицируется

$$\mathcal{D}^n \mathcal{D}_n \varphi_{m(s)} - s \mathcal{D}_n \mathcal{D}_m \varphi^n{}_{m(s-1)} = -2(s-1)(s+1)\lambda^2 \varphi_{m(s)} - \mathcal{M}(s-1)(s-2)\mathcal{D}_n(\varphi^{nr}\mathcal{D}_r \varphi_{m(s)})\,. \tag{3.9.8}$$

Заметим, что член связанный со "взаимодействием" в (3.9.8) исчезает только в случае $s=1$ и $s=2$.

Этот результат предполагает, что анзац Керра-Шилда может быть распространен на нелинейные уравнения $4d$ безмассовых полей произвольного спина (см. работу [33] и ссылки в ней).

3.10 Заключительные замечания

Перечислим результаты, полученные в данной главе. Мы показали, что широкий класс чернодырных метрик (Картера-Плебанского) имеет простую развернутую формулировку в терминах поля Киллинга и поля Максвелла без источника. Система получена в результате параметрической деформации уравнения на параметр глобальной симметрии AdS_4. Два параметра деформации $\mathcal{M} \in \mathbb{C}$ и $\mathbf{q} \in \mathbb{R}$ отождествлены с массой черной дыры $\mathbf{M} = \mathrm{Re}\,\mathcal{M}$, НУТ–зарядом $\mathbf{N} = \mathrm{Im}\,\mathcal{M}$ и электрическим и магнитными зарядами $\mathbf{q} = 2(e^2 + \mathrm{g}^2)$. Кинематические характеристики черной дыры – угловой момент a и дискретный параметр ϵ – выражаются через два первых интеграла развернутой системы.

Также показано, что уравнение на параметр глобальной симметрии AdS_4 и РЧС связаны друг с другом интегрирующими потоками, описывающими эволюцию в пространстве зарядов черной дыры. Интегрирующие потоки позволили описать тетраду, метрику, векторы Киллинга и другие характеристики черной дыры в AdS_4 ковариантном и координатно-независимом виде. Это достигнуто прямым интегрированием уравнений первого порядка на потоки с начальными условиями, соответствующими

[14]Число в скобках рядом с индексом означает число индексов, подверженных симметризации, например, $\phi_{m(s)} = \phi_{(m_1 \dots m_s)}$.

вакуумному AdS_4 пространству. Одним из следствий данной процедуры является то, что кинематические параметры черной дыры приобретают инвариантную интерпретацию в терминах значений двух AdS_4 инвариантов. Подчеркнем, что соответствие между вакуумной системой и чернодырной, реализуемое интегрирующими потоками, похоже на соответствие, изучавшееся в нелинейной калибровочной теории высших спинов [46, 33].

Мы ожидаем, что полученные нами результаты имеют большую область применений в приложениях. Одной из наиболее поразительных черт построенного описания является ее полная координатная независимость. Многие важные алгебраические конструкции присущие четырехмерным черным дырам, такие как, тензоры Киллинга-Яно, векторы Керра-Шилда приобретают в предложенной формулировке простую и естественную интерпретацию.

Непосредственным применением может быть изучение поведения флуктуаций различных полей в геометрии черной дыры в рамках развернутой формулировки. В литературе имеется описание различного типа свободных полей в развернутом виде (см., например, [60] по безмассовым полям в AdS_4 и [28] для случая скалярного поля произвольной массы в любой размерности, а также обзоры [33, 64]).

Другое интригующее направление – изучение возможных обобщений полученных результатов в полной нелинейной калибровочной теории высших спинов, которая основана на развернутом формализме. Как показано в следующей главе, полученные результаты позволяют это сделать, по крайней мере, в статическом случае.

Еще одним направлением возможного применения представляется обобщение предложенной конструкции в произвольном числе измерений. Хорошо известно, что черные дыры в старших размерностях обладают более богатыми свойствами чем четырехмерные. В частности, в $d > 4$ существуют черные дыры с несферической (кольцевой) топологией горизонта [81]. Кроме того, тензор кривизны многомерных черных дыр не обязательно является обобщенным типом D по Петрову [82] (например, в случае черных колец). И, хотя подход, используемый в данной главе, существенно четырехмерен, мы надеемся, что его можно обобщить на старшие размерности. В этой связи, заметим, что согласно анализу работы [83], где были открыты скрытые симметрии многомерных черных дыр, развернутая формулировка таких черных дыр вероятно потребует введения дифференциальных форм более высокого ранга.

Альтернативной возможностью обобщения развернутой формулировки на старшие измерения может быть поиск решений типа черных дыр в $Sp(2M)$ пространствах с матричными координатами [15, 16, 84, 100]. Поскольку эти модели представляют многомерное обобщение спинорного подхода, используемого в данной главе, то не исключено, что такое направление обобщения может оказаться даже проще, чем стандартное тензорное обобщение.

Последним, но не менее важным вопросом является источник происхождения интегрирующего потока, который, вероятно, является проявлением некоторой скрытой многомерной и/или интегрируемой структуры в системе.

Результаты данной главы основаны на работах [102], [103]

Глава 4

Статическая черная дыра в четырехмерной теории высших спинов

В этой главе найдено точное статическое сферически симметричное решение нелинейной бозонной теории полей высших спинов в четырех измерениях. Данное решение обобщает чернодырное решение Шварцшильда общей теории относительности, учитывая взаимодействие бесконечного набора безмассовых бозонных полей.

Как известно, нелинейные уравнения поля теории высших спинов впервые были найдены в четырёх измерениях [12, 13]. Позднее, полученные результаты были обобщены на случай трех [45] и произвольного числа измерений [14]. В $d \geq 4$ эта теория описывает взаимодействие бесконечного набора динамических безмассовых полей низших и высших спинов. Теория явно координатно-инвариантна и содержит гравитацию. Поле спина $s = 2$ является источником для полей высших спинов и наоборот. Поэтому те или иные решения теории гравитации Эйнштейна не обязаны являться решениями теории высших спинов. Взаимодействие с полями старших спинов может существенно влиять на поведение теории в режиме высоких энергий. Более того, поскольку интервал $ds^2 = g_{mn}dx^m dx^n$ связанный с полем $s = 2$ g_{mn} не инвариантен относительно действия калибровочной симметрии высших спинов, привычные понятия общей теории относительности могут нуждаться в пересмотре в рамках этой теории с ненарушенной симметрией высших спинов.

Сложности поиска решений в теории высших спинов связаны с нелокальностью полевых уравнений, которые сформулированы во вспомогательном некоммутативном твисторном пространстве с помощью звёздочного произведения. Уравнения поля отображают нелокальность в твисторном пространстве в пространственно-временную в соответствии с тем известным фактом, что взаимодействие полей $s \geq 2$ содержит старшие производные (подробнее см. обзор по калибровочным теориям высших спинов [64]). Последнее свойство означает, что нелинейная калибровочная теория высших спинов применима вне рамок низкоэнергетического приближения типичного для теории Эйнштейна и её пертурбативных струнных поправок. Таким образом, данная теория может быть использована для учета эффектов сильных полей.

В настоящее время известно небольшое число точных решений теории высших спинов. Простейшим является вакуумное решение AdS_d. В трех измерениях, как показано во второй главе, БТЗ черная дыра [42] также удовлетворяет нелинейным уравнениям высших спинов [101]. Первый нетривиальный пример точного решения в $d = 3$ был получен в [46], где было показано, что для ненулевой вакуумной кривизны полей высших спинов $B_0 = \nu$, $3d$ уравнения описывают массивные поля материи, массы которых зависят от параметра ν. Некоторые решения $4d$ уравнений были изучены Санделом и Сезгиным [91, 47]. Более общий класс решений с ненулевыми полями высших спинов, представляющий пример алгебраически специального решения теории, был получен Иазеоллой, Санделом и Сезгиным в [92]. Широкий класс решений такого типа отвечает решениям киральных моделей с сигнатурой пространства-времени $(0, 4)$ или $(2, 2)$. В некоммутативном твисторном секторе они сводятся к $3d$ решению [46], однако их физическая интерпретация пока остается неясной.

Поскольку теория высших спинов обобщает теорию гравитации Эйнштейна, естественно выяснить существуют ли аналоги чернодырных решений в такой теории? В данной главе мы ответим на этот вопрос для простейшего случая – статического, сферически симметричного решения. А именно, мы предлагаем явную бескоординатную конструкцию точного решения бозонного сектора $4d$ теории высших спинов [13], характеризуемого одним размерным параметром M. В приближении слабого поля это решение воспроизводит черную дыру массы M в секторе $s = 2$, а также спин-s чернодырные безмассовые поля найденные в разделе 3.9. Наша конструкция основана на развернутой формулировке черных дыр Эйнштейна, развитой в третьей главе диссертации и существенно опирается на симметрии Киллинга пространства AdS_4. Мы покажем, что случай Шварцшильда приводит к существенным упрощениям пертурбативного анализа уравнений высших спинов и сводит их к $3d$ уравнениям с помощью специального вакуума Фока в алгебре звездочного произведения.

Глава состоит из шести разделов. В разделе 4.1 на основе третьей главы кратко описана статическая AdS_4 черная дыра. $4d$ бозонные уравнения высших спинов выписаны в разделе 4.2. В разделе 4.3 показано как черные дыры возникают в свободной теории высших спинов. Точное чернодырное решение высших спинов получено в разделе 4.4. Наконец, в разделе 4.5 изучаются глобальные (супер)симметрии черной дыры. Заключительные замечания и дальнейшие перспективы обсуждаются в разделе 4.6. Используемые обозначения собраны в приложении III.

4.1 AdS_4 черная дыра Шварцшильда

Хорошо известно, что метрика черной дыры массы M на фоне AdS_4 может быть записана в форме Керра-Шилда [67]

$$g_{mn} = \eta_{mn} + \frac{2M}{r} k_m k_n \,, \qquad g^{mn} = \eta^{mn} - \frac{2M}{r} k^m k^n \,, \tag{4.1.1}$$

где η_{mn}, $(m, n = 0 \dots 3)$ – фоновая AdS_4 метрика с отрицательной космологической постоянной $-\lambda^2$, k^m – вектор Керра-Шилда, удовлетворяющий

$$k^m k_m = 0 \,, \quad k^m \mathcal{D}_m k_n = k^m D_m k_n = 0 \,, \tag{4.1.2}$$

где $\mathcal{D}_m$ и D_m – чернодырная и AdS_4 ковариантные производные, соответственно, и

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{2} \mathcal{D}_m k^m = -\frac{1}{2} D_m k^m \,. \tag{4.1.3}$$

Заметим, что в формулах (4.1.1)-(4.1.3) не имеет значения метрикой AdS_4 или метрикой черной дыры поднимаются и опускаются индексы. В дальнейшем мы используем бескоординатное описание, тем не менее, приведем явный вид разложения (4.1.1), используя координаты [79], где k^m имеет особенно простой вид

$$\eta_{mn} = \frac{1}{1+\lambda^2 r^2} \begin{pmatrix} (1+\lambda^2 r^2)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda^2(y^2+z^2) & \lambda^2 xy & \lambda^2 xz \\ 0 & \lambda^2 xy & -1-\lambda^2(x^2+z^2) & \lambda^2 yz \\ 0 & \lambda^2 xz & \lambda^2 yz & -1-\lambda^2(x^2+y^2) \end{pmatrix} \tag{4.1.4}$$

$$k^0 = \frac{1}{1+\lambda^2 r^2} \,, \quad k^1 = -\frac{x}{r} \,, \quad k^2 = -\frac{y}{r} \,, \quad k^3 = -\frac{z}{r} \,, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \,. \tag{4.1.5}$$

Определим пространство AdS_4 уравнением нулевой кривизны (3.3.10). AdS_4 имеет десять параметров глобальной симметрии $K_{AB} = K_{BA}$, которые принимают значения в $o(3,2) \sim sp(4)$ алгебре Ли и удовлетворяют (3.3.9). В терминах двух-компонентных спиноров с

$$K_{AB} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} \varkappa_{\alpha\beta} & v_{\alpha\dot\beta} \\ v_{\beta\dot\alpha} & \lambda^{-1} \bar\varkappa_{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix} , \tag{4.1.6}$$

(3.3.9) переписывается в виде

$$D^L v_{\alpha\dot\alpha} = \frac{1}{2} h^{\gamma}{}_{\dot\alpha} \varkappa_{\gamma\alpha} + \frac{1}{2} h_{\alpha}{}^{\dot\gamma} \bar\varkappa_{\dot\alpha\dot\gamma} \,, \qquad D^L \varkappa_{\alpha\alpha} = \lambda^2 h_{\alpha}{}^{\dot\gamma} v_{\alpha\dot\gamma} \,, \qquad D^L \bar\varkappa_{\dot\alpha\dot\alpha} = \lambda^2 h^{\gamma}{}_{\dot\alpha} v_{\gamma\dot\alpha} \,, \tag{4.1.7}$$

где

$$D^L A_\alpha = dA_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha{}^\gamma A_\gamma \,, \qquad D^L \bar A_{\dot\alpha} = d\bar A_{\dot\alpha} + \frac{1}{2}\bar\omega_{\dot\alpha}{}^{\dot\gamma} \bar A_{\dot\gamma} \,.$$

Из (4.1.7) следует, в частности, что $v_{\alpha\dot\alpha}$ есть просто AdS_4 вектор Киллинга.

Определим вектор Керра-Шилда метрики (4.1.1) через параметр (4.1.6) с помощью, например, первой формулы в (3.3.37), а именно,

$$k_{\alpha\dot\alpha} \equiv h^n_{\alpha\dot\alpha} k_n = \frac{1}{v^- v^+} v^-_{\alpha\dot\alpha} \,, \qquad v^{\pm}_{\alpha\dot\alpha} = \pi^{\pm}_{\alpha}{}^{\gamma} \bar\pi^{\pm}_{\dot\alpha}{}^{\dot\gamma} v_{\gamma\dot\gamma} \,, \qquad v^- v^+ = \frac{1}{2} v^-_{\alpha\dot\alpha} v^{+\alpha\dot\alpha} \,, \tag{4.1.8}$$

где

$$\pi^{\pm}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\beta} \pm \frac{\varkappa_{\alpha\beta}}{\sqrt{-\varkappa^2}}) \,, \qquad \varkappa^2 = \frac{1}{2}\varkappa_{\alpha\beta}\varkappa^{\alpha\beta} \tag{4.1.9}$$

проекторы, удовлетворяющие (3.3.25). Напомним, что эквивалентно вместо $v^-_{\alpha\dot\alpha}$ можно использовать $v^+_{\alpha\dot\alpha}$ в (4.1.8).

Тип черной дыры (вращающаяся или статическая) зависит от значений $sp(4)$ инвариантов построенных по K^{AB}. Статический случай характеризуется условием

$$K_A{}^B K_B{}^C = \delta_A{}^C \,, \tag{4.1.10}$$

что эквивалентно

$$\lambda^{-2}\varkappa^2 + v^2 = -1 \,, \quad \varkappa^2 = \bar\varkappa^2 \,, \quad \bar\varkappa_{\dot\alpha}{}^{\dot\gamma} v_{\beta\dot\gamma} + v^{\gamma}{}_{\dot\alpha}\varkappa_{\gamma\beta} = 0 \,. \tag{4.1.11}$$

Функция r (4.1.3) удовлетворяет

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{-\varkappa^2}} \,, \qquad d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2\lambda^2 r^3} h^{\alpha\dot\alpha} v^{\alpha}{}_{\dot\alpha} \varkappa_{\alpha\alpha} \,.$$

Уравнения Эйнштейна для метрики (4.1.1) выполнены вследствие (3.3.9) и (4.1.8).

Как показано в разделе 3.9, решение Керра-Шилда допускает обобщение для безмассовых бозонных полей любого спина вида

$$\phi_{m_1 \ldots m_k} = \frac{2M}{r} k_{m_1} \ldots k_{m_k} \,, \tag{4.1.12}$$

которые удовлетворяют свободным спин-s уравнениям (3.9.7) в AdS_4 пространстве. Случай $s = 2$ воспроизводит член Керра-Шилда, отвечающий чернодырной метрике (4.1.1). В разделах 4.3 и 4.4 будет показано, что поля высших спинов типа Керра-Шилда удовлетворяют уравнениям линеаризованной теории высших спинов и остаются ненулевыми для нелинейного решения.

4.2 Уравнения высших спинов в четырех измерениях

Чтобы воспроизвести решение Керра-Шилда для высших спинов, мы напомним структуру $4d$ нелинейных уравнений высших спинов (подробнее см. [33]). В этом разделе и далее для удобства положим $\lambda^2 = 1$.

Нелинейные уравнения теории высших спинов в $d = 4$ сформулированы в терминах 1-формы потенциалов $W(Z, Y|x) = dx^n W_n(Z, Y|x)$ и 0-формы кривизны $B(Z, Y|x)$, зависящих от координат пространства-времени x^n и вспомогательных спинорных переменных Z^A и Y^A. Кроме того, вводится вспомогательная 1-форма в Z-пространстве $S(Z, Y|x) = S_\alpha(Z, Y|x)dz^\alpha + \bar{S}_{\dot\alpha}(Z, Y|x)d\bar{z}^{\dot\alpha}$, которая выражается через динамические поля теории с помощью уравнений движения. Также предполагается, что $\{dx^n, dz^\alpha\} = 0$, $\{dx^n, d\bar{z}^{\dot\alpha}\} = 0$. В данной главе рассматривается бозонный сектор уравнений высших спинов [13], то есть поля B и W являются четными функциями осцилляторов (Z, Y), а S – нечетной. Уравнения высших спинов, в которых отфакторизованы топологические поля (см. [33]) в этом случае принимают вид

$$dW - W \star \wedge W = 0\,, \tag{4.2.1}$$

$$dB - W \star B + B \star \tilde{W} = 0\,, \tag{4.2.2}$$

$$dS_\alpha - [W, S_\alpha]_\star = 0\,, \quad d\bar{S}_{\dot\alpha} - [W, \bar{S}_{\dot\alpha}]_\star = 0\,, \tag{4.2.3}$$

$$S_\alpha \star S^\alpha = 2(1 + B \star v)\,, \quad \bar{S}_{\dot\alpha} \star \bar{S}^{\dot\alpha} = 2(1 + B \star \bar{v})\,, \quad [S_\alpha, \bar{S}_{\dot\alpha}]_\star = 0\,, \tag{4.2.4}$$

$$B \star \tilde{S}_\alpha + S_\alpha \star B = 0\,, \quad B \star \tilde{\bar{S}}_{\dot\alpha} + \bar{S}_{\dot\alpha} \star B = 0\,, \tag{4.2.5}$$

где $\tilde{A} = (-u_\alpha, \bar{u}_{\dot\alpha})$ для $A = (u_\alpha, \bar{u}_{\dot\alpha})$,

$$v = \exp\left(z_\alpha y^\alpha\right), \qquad \bar{v} = \exp\left(\bar{z}_{\dot\alpha} \bar{y}^{\dot\alpha}\right), \tag{4.2.6}$$

а операция звездочного произведения во вспомогательном твисторном пространстве коммутирующих переменных $Y_A = (y_\alpha, \bar{y}_{\dot\alpha})$, $Z_A = (z_\alpha, \bar{z}_{\dot\alpha})$ определена следующим образом

$$(f \star g)(Z, Y) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4u\, d^4v\, f(Z+U, Y+U) g(Z-V, Y+V) e^{U_A V^A}\,, \quad U_A V^A = u_\alpha v^\alpha + \bar{u}_{\dot\alpha} \bar{v}^{\dot\alpha}\,. \tag{4.2.7}$$

В частности,

$$Y_A \star f = (Y_A - \frac{\partial}{\partial Y^A} + \frac{\partial}{\partial Z^A}) f\,, \quad f \star Y_A = (Y_A + \frac{\partial}{\partial Y^A} + \frac{\partial}{\partial Z^A}) f\,,$$

$$Z_A \star f = (Z_A - \frac{\partial}{\partial Y^A} + \frac{\partial}{\partial Z^A})f\,, \quad f \star Z_A = (Z_A - \frac{\partial}{\partial Y^A} - \frac{\partial}{\partial Z^A})f\,. \tag{4.2.8}$$

Контур интегрирования в (4.2.7) выбран так, чтобы $1 \star f = f \star 1 = f$. Заметим, что такое определение звездочного произведения (4.2.7) отличается от используемого в [33] отсутствием мнимой единицы в экспоненте. Из (4.2.8) легко видеть, что

$$[z_\alpha, z_\beta]_\star = -[y_\alpha, y_\beta]_\star = 2\epsilon_{\alpha\beta}\,, \quad [\bar{z}_{\dot\alpha}, \bar{z}_{\dot\beta}]_\star = -[\bar{y}_{\dot\alpha}, \bar{y}_{\dot\beta}]_\star = 2\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,, \quad [y_\alpha, \bar{y}_{\dot\alpha}]_\star = [z_\alpha, \bar{z}_{\dot\alpha}]_\star = 0\,. \tag{4.2.9}$$

Важным свойством звездочного произведения (4.2.7) является наличие левого и правого операторов Клейна (4.2.6), удовлетворяющих

$$v \star v = \bar{v} \star \bar{v} = 1\,, \qquad v \star f(z,y) = f(-z,-y) \star v\,, \qquad \bar{v} \star f(\bar{z},\bar{y}) = f(-\bar{z},-\bar{y}) \star \bar{v} \tag{4.2.10}$$

и

$$v \star f(z,y) = \exp(z_\alpha y^\alpha) f(y,z)\,, \qquad \bar{v} \star f(\bar{z},\bar{y}) = \exp(\bar{z}_{\dot\alpha}\bar{y}^{\dot\alpha}) f(\bar{y},\bar{z})\,. \tag{4.2.11}$$

Заметим, что операторы Клейна, зависящие только от переменных Y или Z, есть δ–функции [93] (и поэтому не являются целыми функциями)

$$\delta(y) \star \delta(y) = 1\,, \qquad \delta(y) \star f(y) = f(-y) \star \delta(y)\,. \tag{4.2.12}$$

Отметим также, что $\hat{f}(y) = f(y) \star \delta(y)$ дает преобразование Фурье по переменной y, $\hat{f}(y) = \int d^2u f(u) e^{-u_\alpha y^\alpha}$. Аналогичные формулы имеют место и для точечных спиноров, а также для $y \leftrightarrow z$.

Легко показать, что

$$v = \delta(y) \star \delta(z)\,, \qquad \bar{v} = \delta(\bar{y}) \star \delta(\bar{z})\,. \tag{4.2.13}$$

То, что результат оказался целой функцией, а не обобщенной, есть следствие того, что звездочка (4.2.7) отвечает нормальному упорядочению операторов, а не симметризованному (подробнее см. [33]).

Уравнения (4.2.1)-(4.2.5) совместны и явно инвариантны относительно калибровочных преобразований вида

$$\delta B = \epsilon \star B - B \star \tilde{\epsilon}\,, \quad \delta W = d\epsilon + [\epsilon, W]_\star\,, \quad \delta S_\alpha = [\epsilon, S_\alpha]_\star\,, \quad \delta \bar{S}_{\dot\alpha} = [\epsilon, \bar{S}_{\dot\alpha}]_\star \tag{4.2.14}$$

с произвольным калибровочным параметром $\epsilon = \epsilon(Z,Y|x)$. Вакуумное решение уравнений (4.2.1)-(4.2.5) описывающее пустое AdS_4 пространство имеет вид $B_0 = 0\,,\quad S_0 = z_\alpha dz^\alpha + \bar{z}_{\dot\alpha} d\bar{z}^{\dot\alpha}\,,\quad W_0 = W_0(Y|x)$, где

$$W_0(Y|x) = -\frac{1}{8}\Big(\omega_{\alpha\alpha}(x) y^\alpha y^\alpha + \bar{\omega}_{\dot\alpha\dot\alpha}(x) \bar{y}^{\dot\alpha}\bar{y}^{\dot\alpha} - 2h_{\alpha\dot\alpha}(x) y^\alpha \bar{y}^{\dot\alpha}\Big) \tag{4.2.15}$$

определяет AdS_4 вакуумные поля через (3.3.10) и удовлетворяет

$$\mathcal{D}_0^2 \equiv dW_0 - W_0 \star \wedge W_0 = 0\,. \tag{4.2.16}$$

Переменные Z_A в звездочном произведении (4.2.7) необходимы для описания взаимодействия высших спинов и не играют роли на свободном уровне. Согласно [60, 33] свободные поля можно описать в развернутом формализме с помощью 1-формы $w(Y|x)$ и 0-формы $C(Y|x)$

$$w(Y|x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} w_{\alpha(n),\dot\alpha(m)} y^\alpha \dots y^\alpha \bar y^{\dot\alpha} \dots \bar y^{\dot\alpha}\,, \quad C(Y|x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} C_{\alpha(n),\dot\alpha(m)} y^\alpha \dots y^\alpha \bar y^{\dot\alpha} \dots \bar y^{\dot\alpha}\,, \tag{4.2.17}$$

описывающие, соответственно, линеаризованные потенциалы высших спинов и кривизны, а также вспомогательные поля. Поля $w(Y|x)$ и $C(Y|x)$ связаны с коэффициентами тэйлоровского разложения $W(Z,Y|x)$ и $B(Z,Y|x)$ по степеням Y и не ограничены уравнениями (4.2.3)-(4.2.5). В секторе 0-форм свободные уравнения, возникающие из (4.2.2), имеют вид условия ковариантного постоянства в твистованном модуле

$$\tilde{\mathcal{D}}_0 C \equiv dC - W_0 \star C + C \star \tilde W_0 = 0\,, \qquad \tilde f(y,\bar y) = f(-y,\bar y)\,. \tag{4.2.18}$$

Линеаризованные уравнения для потенциалов высших спинов, следующие из (4.2.1), имеют вид [60]

$$R_{1\alpha(n),\dot\alpha(m)} = \delta(m) h^{\gamma\dot\beta} \wedge h^{\gamma}{}_{\dot\beta} C_{\alpha(n)\gamma(2)} + \delta(n) h^{\gamma\dot\beta} \wedge h_{\gamma}{}^{\dot\beta} C_{\dot\alpha(m)\dot\beta(2)}\,, \tag{4.2.19}$$

где кривизны $R_{1\alpha(n),\dot\alpha(m)}$ суть компоненты линеаризованного тензора кривизны высших спинов

$$R_1(Y|x) \equiv \mathcal{D}_0 w(Y|x)\,. \tag{4.2.20}$$

Заметим, что уравнение (4.2.18) с фиксированным W_0 инвариантно относительно преобразования глобальной симметрии высших спинов

$$\delta C = \epsilon_0 \star C - C \star \tilde\epsilon_0\,, \tag{4.2.21}$$

при условии, что

$$\mathcal{D}_0 \epsilon_0 = 0\,. \tag{4.2.22}$$

Поскольку оператор твиста в (4.2.18) может быть реализован как $\tilde f(Y) = \delta(y) \star f \star \delta(y)$, то любое решение уравнения глобальной симметрии (4.2.22) $\epsilon_0(Y|x)$ порождает решение уравнения (4.2.18) вида

$$C(Y|x) = c_1 \epsilon_0(Y|x) \star \delta(y) + c_2 \epsilon_0(Y|x) \star \delta(\bar y)\,, \tag{4.2.23}$$

где c_1, c_2 – произвольные константы. Эта формула возникает из-за того, что присоединенные и твистованные производные связаны друг с другом через Фурье преобразование по y_α или $\bar y_{\dot\alpha}$ переменным.

4.3 Решение типа черной дыры в свободной теории высших спинов

В третьей главе мы показали, что AdS_4 черная дыра общего вида однозначно определяется в терминах заданного параметра глобальной симметрии K_{AB} пространства AdS_4. Используем эту идею для обобщения на случай высших спинов. Поскольку K_{AB} удовлетворяет (3.3.9), то

$$\mathcal{D}_0 f(K_{AB}Y^AY^B) = 0 \tag{4.3.1}$$

для любой функции $f(\xi)$. Формула (4.2.23) порождает решение свободных уравнений высших спинов (4.2.18) в виде

$$C(Y|x) = Mf(K_{AB}Y^AY^B)\star\delta(y)\,, \tag{4.3.2}$$

где $f(\xi)$ предполагается действительной и безразмерной. В общем случае C (4.3.2) оказывается неэрмитовым, описывая на свободном уровне два действительных решения. Можно показать, что в секторе спина $s=2$ каждое из них описывает общую AdS_4–Керр–НУТ черную дыру массы m и НУТ зарядом n

$$m\sim \mathrm{Re}\,M\,,\qquad n\sim \mathrm{Im}\,M \tag{4.3.3}$$

для одной и наоборот для другой. В этой главе мы ограничимся простейшим статическим случаем (4.1.10), для которого $M=\overline{M}$.

Чтобы $C(Y|x)$ было действительным выберем $f(\xi)=\exp(\xi/2)$,

$$F_K = \exp\big(\frac{1}{2}K_{AB}Y^AY^B\big)\,. \tag{4.3.4}$$

Коэффициент $1/2$ в экспоненте (4.3.4) выбран так, что в силу (4.1.10), F_K удовлетворяет следующим соотношениям

$$F_K\star F_K = F_K\,,\qquad F_K\star\delta(y) = F_K\star\delta(\bar y)\,. \tag{4.3.5}$$

В результате, кривизна высших спинов первого порядка $C(Y|x) = M\exp\big(\frac{1}{2}K_{AB}Y^AY^B\big)\star\delta(y)$ дается выражением

$$C(Y|x) = \frac{M}{r}\exp\Big(\frac{1}{2}\varkappa^{-1}_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta + \frac{1}{2}\bar\varkappa^{-1}_{\dot\alpha\dot\beta}\bar y^{\dot\alpha}\bar y^{\dot\beta} - \varkappa^{-1}_{\alpha\gamma}v^\gamma{}_{\dot\alpha}y^\alpha\bar y^{\dot\alpha}\Big)\,, \tag{4.3.6}$$

где $\varkappa^{-1}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\varkappa^2}\varkappa_{\alpha\beta}$ и $r=\sqrt{-\varkappa^2}$. Из (4.3.6) следует, что тензоры Вейля высших спинов имеют вид

$$C_{\alpha(2n)} = \frac{M}{2^n r}(\varkappa^{-1}_{\alpha\alpha})^n\,,\qquad \bar C_{\dot\alpha(2n)} = \frac{M}{2^n r}(\bar\varkappa^{-1}_{\dot\alpha\dot\alpha})^n\,. \tag{4.3.7}$$

Эти тензоры D–типа по Петрову описывают черную дыру Шварцшильда массы M в секторе спина $s = 2$ ($n = 2$) вместе с её обобщением для высших спинов. Заметим, что тетрадо-подобные связности высших спинов, соответствующие (4.3.7), у которых одинаковое число точечных и неточечных индексов, можно показать, калибровочно эквивалентны следующему

$$W_{phys} = \frac{M}{r} h^{\alpha\dot{\alpha}} k_{\alpha\dot{\alpha}} \exp\Big(-\frac{1}{2} k_{\beta\dot{\beta}} y^{\beta} \bar{y}^{\dot{\beta}} \Big) , \tag{4.3.8}$$

что, с точностью до численных коэффициентов, воспроизводит поля Керра-Шилда высших спинов (4.1.12).

4.4 Черная дыра в нелинейной теории высших спинов

Имея решение типа Шварцшильда на свободном уровне (4.3.6), нужно проанализировать нелинейные поправки, которые могут возникать в системе (4.2.1)-(4.2.5). Специальный выбор функции (4.3.4) упрощает этот анализ, позволяя решить задачу точно.

Чтобы восстановить поле кривизны высших спинов $B(Z, Y|x)$ и вспомогательную 1-форму $S(Z, Y|x)$, сначала нужно разрешить связи (4.2.4), (4.2.5), которые образуют замкнутую подсистему уравнений. Это полностью фиксирует динамику, сводя задачу к определению потенциалов высших спинов через кривизны из уравнений (4.2.1)-(4.2.3).

4.4.1 Чернодырные вакуумы Фока

Важным свойством F_K (4.3.4) является то, что он порождает вакуум Фока в звездочной алгебре и позволяет определить подалгебру от меньшего числа осцилляторов. Действительно, введем проекторы $\Pi_{\pm AB}$

$$\Pi_{\pm AB} = \frac{1}{2}(\epsilon_{AB} \pm K_{AB}) , \qquad \Pi_{\pm A}{}^{C} \Pi_{\pm C}{}^{B} = \Pi_{\pm A}{}^{B} , \quad \Pi_{\pm A}{}^{C} \Pi_{\mp C}{}^{B} = 0 , \tag{4.4.1}$$

и операторы рождения и уничтожения $Y_{\pm A} = \Pi_{\pm A}{}^{B} Y_B$, со свойствами

$$[Y_{+A}, Y_{+B}]_{\star} = [Y_{-A}, Y_{-B}]_{\star} = 0 , \qquad [Y_{+A}, Y_{-B}]_{\star} = \Pi_{+AB} . \tag{4.4.2}$$

Тогда, F_K есть вакуум Фока, удовлетворяющий (4.3.5) и

$$Y_{-A} \star F_K = F_K \star Y_{+A} = 0 . \tag{4.4.3}$$

Кроме того, (4.3.4) ковариантно постоянен на AdS_4 пространстве, то есть $\mathcal{D}_0 F_K = 0$.

В нелинейной задаче необходимо анализировать поправки, возникающие за счет зависимости полей от Z–переменной. F_K – единственный, независящий от Z элемент звездочной алгебры (4.2.7), удовлетворяющий (4.4.3). В общем случае, звездочная алгебра содержит множество F элементов $f(Z,Y|x)$, которые удовлетворяют условиям

$$Y_{-A} \star f = f \star Y_{+A} = 0\,, \qquad f = F_K \phi(A|x)\,, \tag{4.4.4}$$

где ϕ – произвольная функция и

$$A_A = (a_\alpha, \bar{a}_{\dot\alpha}) = Y_{+A} + Z_{+A} - (Y_{-A} - Z_{-A}) = Z_A + K_A{}^B Y_B\,, \qquad [A_A, A_B]_\star = 4\epsilon_{AB}\,. \tag{4.4.5}$$

Множество F образует подалгебру в звездочной алгебре. А именно,

$$\Big(F_K\phi_1\Big) \star \Big(F_K\phi_2\Big) = F_K(\phi_1 * \phi_2)\,, \tag{4.4.6}$$

здесь мы ввели индуцированную операцию звездочного произведения $*$, действующую на подпространстве функций вида $\phi(A|x)$. Ее явный вид оказывается следующим

$$(\phi_1 * \phi_2)(A) = \int d^4U \phi_1(A + 2U_+)\phi_2(A - 2U_-)e^{2U_{+A}U_-^A}\,. \tag{4.4.7}$$

Интеграл (4.4.7) нормирован так, чтобы $1 * \phi = \phi * 1 = \phi$. Звездочка (4.4.7) ассоциативна и соответствует нормальному упорядочению операторов $(Y_{-A} - Z_{-A})$ и $(Y_{+A} + Z_{+A})$.

Заметим, что любая функция вида $\tilde{F}_K = f(Z|x) \star F_K$ удовлетворяет (4.4.3) и, следовательно, может быть представлена в виде (4.4.4). В самом деле, используя (4.2.7), легко проверить, что

$$F_K \star f(Z|x) = \frac{1}{4}F_K \int d^2v d^2\bar{v} f(A - V|x)e^{\frac{1}{2}K_{AB}V^AV^B}\,. \tag{4.4.8}$$

Для (анти)голоморфных функций еще одно интегрирование дает

$$F_K \star f(z) = \frac{1}{2r}F_K \int d^2v f(a - v)e^{\frac{1}{2}\varkappa^{-1}_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta}\,, \quad F_K \star f(\bar{z}) = \frac{1}{2r}F_K \int d^2\bar{v} f(\bar{a} - \bar{v})e^{\frac{1}{2}\bar{\varkappa}^{-1}_{\dot\alpha\dot\beta}\bar{v}^{\dot\alpha}\bar{v}^{\dot\beta}}\,. \tag{4.4.9}$$

В дальнейшем мы будем иметь дело с (анти)голоморфными функциями осцилляторов $(\bar{a}_{\dot\alpha})a_\alpha$, используя соотношения

$$[a_\alpha, f(a)]_* = 2\frac{\partial}{\partial a^\alpha}f(a)\,, \qquad \{a_\alpha, f(a)\}_* = 2(a_\alpha + \varkappa_\alpha{}^\beta\frac{\partial}{\partial a^\beta})f(a)\,, \qquad [a_\alpha, \bar{a}_{\dot\alpha}]_* = 0\,. \tag{4.4.10}$$

Звездочка (4.4.7) допускает существование операторов Клейна $\mathcal{K}$ и $\bar{\mathcal{K}}$ вида

$$\mathcal{K} = \frac{1}{r}\exp\left(\frac{1}{2}\varkappa^{-1}_{\alpha\alpha}a^{\alpha}a^{\alpha}\right), \qquad \bar{\mathcal{K}} = \frac{1}{r}\exp\left(\frac{1}{2}\bar{\varkappa}^{-1}_{\dot\alpha\dot\alpha}\bar{a}^{\dot\alpha}\bar{a}^{\dot\alpha}\right), \tag{4.4.11}$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{K}*\mathcal{K} = \bar{\mathcal{K}}*\bar{\mathcal{K}} = 1\,, \quad \{\mathcal{K}, a_\alpha\}_* = \{\bar{\mathcal{K}}, \bar{a}_{\dot\alpha}\}_* = 0\,, \quad [\mathcal{K},\bar{\mathcal{K}}]_* = [\mathcal{K},\bar{a}_{\dot\alpha}]_* = [\bar{\mathcal{K}}, a_\alpha]_* = 0 \tag{4.4.12}$$

и возникают из следующего тождества

$$F_K \star \delta(z) = F_K\mathcal{K}\,, \qquad F_K\star\delta(\bar{z}) = F_K\bar{\mathcal{K}}\,. \tag{4.4.13}$$

4.4.2 Явное решение

Основное наблюдение, позволяющее решить задачу, состоит в том, что уравнения (4.2.4) и (4.2.5) можно решить точно для 0-формы кривизны $B(Z,Y|x)$ вида

$$B = MF_K\star\delta(y) \tag{4.4.14}$$

и

$$S_\alpha = z_\alpha + F_K\sigma_\alpha(a|x)\,, \qquad \bar{S}_{\dot\alpha} = \bar{z}_{\dot\alpha} + F_K\bar\sigma_{\dot\alpha}(\bar{a}|x) \tag{4.4.15}$$

с некоторыми функциями $\sigma_\alpha(a|x)$, $\bar\sigma_{\dot\alpha}(\bar{a}|x)$, которые будут найдены позже. В рамках индуцированной звездочки, этот анзац сводит уравнения (4.2.4), (4.2.5) к двум копиям (анти)голоморфных $3d$ *деформированных осцилляторов*, рассмотренных в [94, 46] в контексте $3d$ полей высших спинов. Действительно, определяя

$$s_\alpha = a_\alpha + \sigma_\alpha(a|x)\,, \qquad \bar{s}_{\dot\alpha} = \bar{a}_{\dot\alpha} + \bar\sigma_{\dot\alpha}(\bar{a}|x) \tag{4.4.16}$$

и используя (4.2.13), (4.3.5), (4.4.10), (4.4.12) и (4.4.13) получается следующая система

$$[s_\alpha, s_\beta]_* = 2\epsilon_{\alpha\beta}(1+M\mathcal{K})\,, \qquad \{\mathcal{K}, s_\alpha\}_* = 0\,, \qquad \mathcal{K}*\mathcal{K} = 1\,. \tag{4.4.17}$$

Исторически, деформированные осцилляторы (4.4.17) в несколько ином виде впервые были введены Вигнером в [95]. M играет роль параметра деформации.

Аналогичные уравнения справедливы и в точечном секторе

$$[\bar{s}_{\dot\alpha}, \bar{s}_{\dot\beta}]_* = 2\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(1+M\bar{\mathcal{K}})\,, \qquad \{\bar{s}_{\dot\alpha}, \bar{\mathcal{K}}\}_* = 0\,, \qquad \bar{\mathcal{K}}*\bar{\mathcal{K}} = 1\,. \tag{4.4.18}$$

Кроме того,

$$[s_\alpha, \bar{s}_{\dot\alpha}]_* = 0\,, \quad [s_\alpha, \bar{\mathcal{K}}]_* = 0\,, \quad [\bar{s}_{\dot\alpha}, \mathcal{K}]_* = 0\,, \quad [\mathcal{K},\bar{\mathcal{K}}]_* = 0\,. \tag{4.4.19}$$

Уравнения (4.4.17)-(4.4.19) появляются вследствие (4.4.12) и (4.4.10).

Подходящий анзац для 1-формы связности высших спинов $W(Y,Z|x)$ выберем в виде

$$W = W_0 + F_K\Big(\omega(a|x) + \bar\omega(\bar a|x)\Big)\,, \tag{4.4.20}$$

где $W_0(Y|x)$ определяется из (4.2.15), а остальные члены результат явной голоморфной факторизации относительно переменных $(a_\alpha, \bar a_{\dot\alpha})$. Заметим, что (4.4.20) не имеет никаких голоморфных свойств в переменных $(y_\alpha, \bar y_{\dot\alpha})$, поскольку, как a_α, так и $\bar a_{\dot\alpha}$ смешивают y_α с $\bar y_{\dot\alpha}$ через (4.4.5).

Из (4.2.15) и (4.2.8) следует, что

$$\mathcal{D}_0\big(F_K f(A|x)\big) = F_K\Big(\hat d - \frac{1}{2}dK^{AB}\frac{\partial^2}{\partial A^A\partial A^B}\Big)f(A|x)\,, \tag{4.4.21}$$

где зависимость A_A от x учтена с помощью (3.3.9) и (4.2.16), так что дифференциал $\hat d$ в (4.4.21) учитывает только явную зависимость от x, то есть $\hat dA = 0$. Используя (4.4.21), уравнения высших спинов, которые остается решить, сводятся к следующим

$$[s_\alpha, s_\beta]_* = 2\epsilon_{\alpha\beta}(1 + M\mathcal{K})\,, \tag{4.4.22}$$

$$\mathcal{Q}s_\alpha - [\omega, s_\alpha]_* = 0\,, \tag{4.4.23}$$

$$\mathcal{Q}\omega - \omega * \wedge\omega = 0\,, \tag{4.4.24}$$

и их комплексно-сопряженным, где

$$\mathcal{Q} = \hat d - \frac{1}{2}d\varkappa^{\alpha\alpha}\frac{\partial^2}{\partial a^\alpha\partial a^\alpha}\,. \tag{4.4.25}$$

Оператор $\mathcal{Q}$ наследует у $\mathcal{D}_0$ следующие свойства

$$\mathcal{Q}\big(f(a|x) * g(a|x)\big) = \mathcal{Q}f(a|x) * g(a|x) + f(a|x) * \mathcal{Q}g(a|x)\,, \tag{4.4.26}$$

$$\mathcal{Q}^2 = 0\,, \qquad \mathcal{Q}a_\alpha = 0\,, \qquad \mathcal{Q}\mathcal{K} = 0\,. \tag{4.4.27}$$

Стоит отметить, что хотя $\mathcal{Q}$ (4.4.25) и содержит вторые производные от осцилляторов, он, тем не менее, удовлетворяет правилу Лейбница (4.4.26). Это происходит потому, что звездочное произведение (4.4.7) само зависит от x так, что действие $\hat d$ на звездочку $*$ эффективно компенсирует появление членов нарушающих (4.4.26). Заметим, что похожая конструкция недавно обсуждалась в [96] в другом контексте – определения кольца решений развернутых уравнений высших спинов (см. Приложение в [96]).

Поскольку мы рассматриваем чисто бозонный случай, связность (4.4.20), являясь чётной функцией осцилляторов a, коммутирует с оператором Клейна (4.4.11), поэтому уравнение (4.2.2) автоматически выполнено (в присутствии фермионов это было бы неверно). В следующих разделах мы решаем уравнения (4.4.22)-(4.4.24) и получаем следующий окончательный результат для черной дыры теории высших спинов:

$$S_\alpha = z_\alpha + MF_K \frac{a^+_\alpha}{r} \int_0^1 dt\, \exp\left(\frac{t}{2} \varkappa^{-1}_{\beta\beta} a^\beta a^\beta\right), \tag{4.4.28}$$

$$\bar{S}_{\dot\alpha} = \bar{z}_{\dot\alpha} + MF_K \frac{\bar{a}^+_{\dot\alpha}}{r} \int_0^1 dt\, \exp\left(\frac{t}{2} \bar\varkappa^{-1}_{\dot\beta\dot\beta} \bar{a}^{\dot\beta} \bar{a}^{\dot\beta}\right), \tag{4.4.29}$$

$$B = \frac{M}{r} \exp\left(\frac{1}{2}\varkappa^{-1}_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + \frac{1}{2}\bar\varkappa^{-1}_{\dot\alpha\dot\beta} \bar{y}^{\dot\alpha}\bar{y}^{\dot\beta} - \varkappa^{-1}_{\alpha\gamma} v^\gamma{}_{\dot\alpha} y^\alpha \bar{y}^{\dot\alpha}\right), \tag{4.4.30}$$

$$W = W_0 + \frac{M}{8r} F_K d\tau^{\alpha\alpha} a^+_\alpha a^+_\alpha \int_0^1 dt\,(1-t) \exp\left(\frac{t}{2}\varkappa^{-1}_{\beta\beta} a^\beta a^\beta\right) + c.c. + F_K \mathbf{f}_0\,, \tag{4.4.31}$$

где

$$\tau_{\alpha\alpha} \equiv \frac{\varkappa_{\alpha\alpha}}{r}\,, \tag{4.4.32}$$

$$\mathbf{f}_0 = -\frac{M}{8}(\tau_{\alpha\alpha}\omega^{\alpha\alpha} + \bar\tau_{\dot\alpha\dot\alpha}\bar\omega^{\dot\alpha\dot\alpha}) + \frac{M}{4r} h^{\alpha\dot\alpha}(v_{\alpha\dot\alpha} + k_{\alpha\dot\alpha}) \tag{4.4.33}$$

и вектор Керра-Шилда $k_{\alpha\dot\alpha}$ определен в (4.1.8). Подчеркнем, что именно анзац (4.4.20), приводящий к голоморфной факторизации относительно осцилляторов a_α и $\bar{a}_{\dot\alpha}$, позволил проинтегрировать уравнения на связность высших спинов. Заметим также, что (4.4.28) и (4.4.29) найдены не в стандартной калибровке пертурбативного анализа уравнений высших спинов [13, 33], в которой $S(Z,Y)|_{Z=0} = 0$. Следовательно, чтобы воспроизвести решение типа Керра-Шилда для безмассовых полей (4.3.8) в первом порядке по M нужно произвести соответствующее калибровочное преобразование полученного решения. В первом порядке оно имеет следующий вид $W^{can} = W + \mathcal{D}_0 g$, где $g = -\frac{1}{2}\int_0^1 dt z^\alpha S_\alpha|_{z\to tz} + c.c. + g_0(Y|x)$ и $g_0(Y|x)$ произвольно.

4.4.3 Получение решения

Как было показано, связи (4.2.4), (4.2.5) приводятся к виду уравнения (4.4.22). По аналогии со стандартным анализом теории возмущений [13, 33], в первом порядке по M получаем уравнение $\frac{\partial}{\partial a^\alpha}\sigma^\alpha = M\mathcal{K}$, которое можно решить в виде

$$\sigma^\pm_\alpha(a|x) = \frac{M}{r} a^\pm_\alpha \int_0^1 dt\, \exp\left(\frac{t}{2}\varkappa^{-1}_{\beta\beta} a^\beta a^\beta\right), \qquad a^\pm_\alpha \equiv \pi^{\pm\beta}_\alpha a_\beta\,, \tag{4.4.34}$$

где $\pi^\pm_{\alpha\beta}$ – проекторы (4.1.9). В действительности это решение удовлетворяет (4.4.22) во всех порядках, поскольку $[\sigma^\pm_\alpha, \sigma^\pm_\beta]_* = 0$. В самом деле, проекторы (4.1.9) делают антисимметричную матрицу $[\sigma^\pm_\alpha, \sigma^\pm_\beta]_*$ одномерной и, следовательно, равной нулю. Выбирая для определенности знак плюс в (4.4.34), получаем уравнения (4.4.28)-(4.4.30).

Имеем следующее важное свойство для (4.4.34)

$$\mathcal{Q}\sigma_\alpha = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial a^\alpha}\Omega^{\beta\beta}\{a_\beta, \sigma_\beta\}_*\,, \tag{4.4.35}$$

где $\Omega_{\alpha\alpha}(x)$ – $sp(2)$ плоская связность (кроме, быть может, точки $r=0$, см. (4.4.32))

$$\Omega_{\alpha\alpha} = d\tau_\alpha{}^\gamma\tau_{\gamma\alpha}\,, \qquad d\Omega_{\alpha\alpha} - \Omega_\alpha{}^\gamma \wedge \Omega_{\gamma\alpha} = 0\,. \tag{4.4.36}$$

Чтобы найти 1-форму связности высших спинов $W(Y,Z|x)$, которая отвечает уравнениям (4.4.28)-(4.4.30), начнем с анализа (4.4.23). Будем решать его по теории возмущений. В первом порядке по M имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial a^\alpha} = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}\sigma_\alpha\,. \tag{4.4.37}$$

Используя (4.4.35), связность первого порядка может быть записана в следующем замечательном виде

$$\omega(a|x) = \frac{1}{8}\Omega^{\alpha\alpha}\{a_\alpha, \sigma_\alpha\}_* + f_0 + O(M^2)\,, \tag{4.4.38}$$

где $f_0(x)$ – некоторая независящая от a_α 1-форма.

Свойство (4.4.35), (4.4.38) позволяет найти точное решение (4.4.23). В самом деле, заметим, что первый член в (4.4.38) является линеаризованной частью $\frac{1}{8}\Omega^{\alpha\alpha}(s_\alpha * s_\alpha - a_\alpha * a_\alpha)$. Используя то, что билинейная комбинация деформированных осцилляторов

$$T_{\alpha\alpha} = s_\alpha * s_\alpha \tag{4.4.39}$$

правильно действует на s_α, $[T_{\alpha\alpha}, s_\beta]_* = 4\epsilon_{\alpha\beta}s_\alpha$, получаем точное решение (4.4.23) в следующем простом виде

$$\omega(a|x) = \frac{1}{8}\Omega^{\alpha\alpha}(s_\alpha * s_\alpha - a_\alpha * a_\alpha) + f_0\,, \quad \bar\omega(\bar a|x) = \frac{1}{8}\bar\Omega^{\dot\alpha\dot\alpha}(\bar s_{\dot\alpha} * \bar s_{\dot\alpha} - \bar a_{\dot\alpha} * \bar a_{\dot\alpha}) + \bar f_0\,. \tag{4.4.40}$$

Замечательно, что связность (4.4.40), в действительности, не содержит членов $O(M^2)$, то есть

$$\omega_2(a|x) = \frac{1}{8}\Omega^{\alpha\alpha}\sigma_\alpha * \sigma_\alpha = 0\,. \tag{4.4.41}$$

Проще всего это можно понять, если заметить, что из (4.4.23) следует

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial a^\alpha} = \frac{1}{2}[\omega_1, \sigma_\alpha]_* \tag{4.4.42}$$

и следовательно, $\pi_\alpha^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial a^\gamma}\omega_2(a|x) = 0$, то есть $\omega_2 = \omega_2(a^-|x)$. С другой стороны легко видеть, что $\omega_2(a|x)$ (4.4.41) является целой функцией осцилляторов $a^\pm$, причем

$$(a^+\frac{\partial}{\partial a^+} - a^-\frac{\partial}{\partial a^-})\omega_2(a^\pm|x) = 2\omega_2(a^\pm|x)\,. \tag{4.4.43}$$

Отсюда заключаем, что такая функция есть просто ноль. Заметим, что непосредственная проверка этого факта, которая также была проведена, является нетривиальной и приводит к интересным интегральным тождествам.

Решив (4.2.3), остается проверить, что выполнено уравнение нулевой кривизны (4.4.24), этим связность высших спинов определится окончательно. Подставляя (4.4.40) в (4.4.24) и замечая, что

$$d\Omega^{\alpha\alpha}\{a_\alpha, \sigma_\alpha\}_* = -M d\Omega^{\alpha\alpha}\tau_{\alpha\alpha} \tag{4.4.44}$$

находим

$$df_0 = \frac{M}{16} d\tau^{\alpha\gamma} \wedge d\tau_\gamma{}^\alpha \tau_{\alpha\alpha}\,. \tag{4.4.45}$$

Заметим, что правая часть в (4.4.45) совместна с $d^2 f_0 = 0$. Действительно, $d^2 f_0 = \frac{M}{16} d\tau^{\alpha\gamma} \wedge d\tau_\gamma{}^\alpha \wedge d\tau_{\alpha\alpha}$ есть просто 3-форма $3d$ объема для "триады" $E_{\alpha\alpha} = d\tau_{\alpha\alpha}$. Она, однако, является вырожденной, поскольку $\tau^{\alpha\alpha}\tau_{\alpha\alpha} = const$ и поэтому равна нулю. Заметим еще, что f_0 входит в связность (4.4.20) в виде вещественной комбинации $\mathbf{f}_0 = f_0 + \bar{f}_0$, которую можно взять в явном виде (4.4.33). Легко проверить, что (4.4.33) действительно удовлетворяет (4.4.45) плюс комплексно сопряженное слагаемое. Итак, окончательный вид связностей высших спинов получается в виде (4.4.31).

4.5 Симметрии

Глобальные симметрии статической черной дыры в четырех измерениях содержат пространственные $SO(3)$ вращения и сдвиги по времени R^1 как в геометрии асимптотического пространства Минковского, так и в AdS_4 (в действительности в его накрывающей). Инфинитезимально, они образуют алгебру $su(2) \oplus gl(1)$. Статическая черная дыра Рейснера-Нордстрема характеризуется еще и электрическим зарядом e и эквивалентна решению Шварцшильда при $e = 0$. При критическом значении заряда $e^2 = M^2$, черная дыра находится в экстремальном состоянии, характеризующимся совпадением горизонта и поверхности Коши [97], при этом она оказывается еще и суперсимметричной (БПС) [98]. Заметим, что на свободном уровне поле спина $s = 1$ в (4.4.30) является как раз напряженностью Максвелла для потенциала AdS_4 черной дыры Рейснера–Нордстрема.

В этом разделе мы проанализируем глобальные симметрии найденного статического решения чернодырного типа в теории высших спинов. Покажем, что (i) ее пространственно-временная симметрия есть $su(2) \oplus gl(1)$, (ii) решение является суперсимметричным, сохраняя четверть суперсимметрий $4d$ $\mathcal{N} = 2$ нелинейной теории высших спинов [13], наконец, (iii) имеется бесконечно-мерная (супер)симметрия высших спинов, обобщающая (i) и (ii).

4.5.1 Бозонные симметрии

Из (4.2.14) следует, что параметр остаточной глобальной симметрии данного решения $\epsilon_0(Y|x)$ удовлетворяет уравнению $\epsilon_0 \star B - B \star \tilde{\epsilon}_0 = 0$. Заметим, что все симметрии с параметрами $\epsilon_0(Z, Y|x)$ зависящими от Z спонтанно нарушены из-за зависимости от Z вакуумной части поля S. Учитывая (4.4.14), имеем

$$\epsilon_0 \star F_K - F_K \star \epsilon_0 = 0\,. \tag{4.5.1}$$

Поскольку вакуум Фока F_K удовлетворяет (4.4.3), то общее решение уравнения (4.5.1) имеет следующий вид

$$\epsilon_0(Y|x) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{0A(m),B(n)}(x)\,\underbrace{Y_+^A \star \ldots \star Y_+^A}_{m} \star \underbrace{Y_-^B \star \ldots \star Y_-^B}_{n} + c_0(x)\,. \tag{4.5.2}$$

Заметим теперь, что любой $\epsilon_0(Y|x)$ из (4.5.2) коммутирует с $F_K\phi(A|x)$, что легко видеть из (4.4.4). В результате, единственное нетривиальное условие в (4.2.14) имеет вид $d\epsilon_0 + [\epsilon_0, W_0]_\star = 0$. Оно равносильно тому, что $\epsilon_0(Y|x)$ (4.5.2) (то есть $f_{0A(m),B(n)}(x)$ и $c_0(x)$) ковариантно постоянен в AdS_4.

Максимальная конечномерная подалгебра (4.5.2) задается билинейными комбинациями осцилляторов Y_-, Y_+ и константами. В частности, она содержит генераторы алгебры $su(2) \oplus gl(1)$

$$T^{AB} = Y_+^{(A} Y_-^{B)}\,, \qquad T = Y_{-A} Y_+^A\,, \tag{4.5.3}$$

принадлежащей к классу (4.5.2). Поскольку $sp(4)$ алгебра симметрий AdS_4 пространства реализована различными билинейными комбинациями осцилляторов Y_A, то подалгебра $su(2) \oplus gl(1)$ описывает ненарушенные пространственно-временные симметрии. Таким образом, полученное решение действительно статично и сферически симметрично. Заметим, что независящий от Y постоянный параметр в (4.5.2) соответствует внутренней $u(1)$–симметрии. Полный набор параметров (4.5.2) порождает бесконечномерную алгебру глобальных симметрий черной дыры теории высших спинов.

4.5.2 Суперсимметрия

Решение (4.4.28)-(4.4.31) оказывается обладает суперсимметрией, что наиболее просто видеть, если вложить рассматриваемые бозонные уравнения в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричную систему нелинейных уравнений высших спинов [13] (см. также, [33]), которая имеет следующий вид

$$d\mathcal{W}-\mathcal{W}\star\wedge\mathcal{W}=0\,,\qquad d\mathcal{B}-[\mathcal{W},\mathcal{B}]_\star=0\,,\qquad d\mathcal{S}-[\mathcal{W},\mathcal{S}]_\star=0\,,\tag{4.5.4}$$

$$\mathcal{S}\star\mathcal{S}=dz_\alpha dz^\alpha(1+\mathcal{B}\star kv)+d\bar z_{\dot\alpha}d\bar z^{\dot\alpha}(1+\mathcal{B}\star\bar k\bar v)\,,\qquad[\mathcal{S},\mathcal{B}]_\star=0\,,\tag{4.5.5}$$

где $\mathcal{W}=\mathcal{W}(Z,Y;k,\bar k|x)$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}(Z,Y;k,\bar k|x)$ и $k,\bar k$ – внешние операторы Клейна, удовлетворяющие $k^2=\bar k^2=1$, $[k,\bar k]=[k,dx^\mu]=[\bar k,dx^\mu]=0$ и

$$kf(Z,Y;dZ;k,\bar k|x)=f(\tilde Z,\tilde Y;d\tilde Z;k,\bar k|x)k\,,\quad \bar kf(Z,Y;dZ;k,\bar k|x)=f(-\tilde Z,-\tilde Y;-d\tilde Z;k,\bar k|x)\bar k\,,\tag{4.5.6}$$

где $\tilde U_A=(-u_\alpha,\bar u_{\dot\alpha})$ для $U_A=(u_\alpha,u_{\dot\alpha})$.

Отметим, что система (4.5.4), (4.5.5) описывает двойной набор безмассовых полей, то есть каждое безмассовое поле целого и полу-целого спина входит в спектр дважды. Ее бозонный сектор состоит из двух независимых подсистем, каждая из которых описывается уравнениями (4.2.1)-(4.2.5) и возникает в результате проектирования уравнений (4.5.4), (4.5.5) с помощью следующих проекторов

$$P^\pm=\frac{1}{2}(1\pm k\bar k)\,,\qquad P^\pm P^\pm=P^\pm\,,\qquad P^\mp P^\pm=0\,.\tag{4.5.7}$$

Из (4.5.6) видно, что они коммутируют с бозонными полями, которые являются четными функциями спинорных переменных, но не коммутируют с фермионными. Таким образом, бозонная редукция системы (4.5.4), (4.5.5) описывает два независимых бозонных мира. Каждый из них несуперсимметричен, поскольку $P^\pm$ не коммутирует с фермионами. Стандартная $\mathcal{N}=2$ суперсимметрия реализуется в “диагональном мире” с метрикой $g^{nm}=\frac{1}{2}(g^{+nm}+g^{-nm})$.

Естественным чернодырым решением суперсимметричной теории является комбинация решений из каждого бозонного сектора, причем *a priori*, можно выбирать решения с независимыми $K^\pm_{AB}$. Мы же рассмотрим случай, когда $K^+_{AB}=-K^-_{AB}$ и соответствующие вакуумы Фока (4.3.4) $F^\pm_K$ имеют противоположные свойства[1] (4.4.3)

$$Y_{\mp A}F^\pm_K=F^\pm_K Y_{\pm A}=0\,,\qquad F^\pm_K=\exp\Big(\pm\frac{1}{2}K_{AB}Y^AY^B\Big)\,.\tag{4.5.8}$$

Рассмотрим бозонное решение $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории высших спинов следующего вида

$$\mathcal{W}=(P^+W^++P^-W^-)\,,\quad \mathcal{B}=\frac{1}{2}(B^+(k+\bar k)+iB^-(k-\bar k))\,,\quad \mathcal{S}=(P^+S^++P^-S^-)\,.\tag{4.5.9}$$

[1]Заметим, что хотя звездочное произведение противоположных вакуумов $F^\pm_K$ не определено (бесконечно), это не имеет значения, поскольку они живут в разных секторах $P^\pm$ и, поэтому, не пересекаются.

Заметим, что множитель i в определении $\mathcal{B}$ (4.5.5) появился вследствие условия вещественности, а имеено, в силу того, что k $\bar{k}$ комплексно сопряжены [13]. Индексы $\pm$ соответствуют решениям в секторах $P^{\pm}$, которые могут иметь разные массы $M^{\pm}$. Удобно потребовать, чтобы вакуумные поля обоих секторов совпадали: $W_0^{\pm} = W_0$, $S_0^{\pm} = S_0$. В случае, если M^+ или M^- равно нулю, то соответствующий мир является пространством AdS_4.

Параметр глобальной симметрии $\epsilon(Y; k\bar{k}|x)$ теперь зависит и от $k\bar{k} = P^+ - P^-$ и удовлетворяет условиям

$$[\mathcal{B}, \epsilon]_\star = 0\,, \qquad [\epsilon, \mathcal{S}]_\star = 0\,, \qquad d\epsilon - [\mathcal{W}, \epsilon]_\star = 0\,. \tag{4.5.10}$$

Эти условия выполнены для любого ковариантно постоянного в AdS_4 параметра ϵ, имеющего следующий вид

$$\epsilon(Y; k\bar{k}|x) = \epsilon^+_{lA}(Y) \star Y_-^A P^+ + \epsilon^-_{lA}(Y) \star Y_+^A P^- + c_0 = P^+ Y_+^A \star \epsilon^+_{rA}(Y) + P^- Y_-^A \star \epsilon^-_{rA}(Y) + c_0 \tag{4.5.11}$$

с некоторыми $\epsilon^{\pm}_{lA}(Y)$ и $\epsilon^{\pm}_{rA}(Y)$. В самом деле, например члены пропорциональные F^+P^+ аннигилируются Y_- слева, Y_+ справа, а P^- с обеих сторон.

Очевидно, что параметры глобальной симметрии вида (4.5.2) принадлежат к классу (4.5.11). Однако, теперь также возможны нечетные по Y_A параметры. В частности, имеет место глобальная суперсимметрия с AdS_4 – ковариантно постоянным спинорным параметром $\epsilon_-^A(x)$

$$\epsilon(Y; k\bar{k}|x) = \epsilon_-^A(x) P^- Y_{-A} = \epsilon_-^A(x) Y_{-A} P^+\,, \qquad D_0 \epsilon_-^A(x) = 0\,, \qquad \Pi^A_{+B}(x) \epsilon_-^B(x) = 0\,, \tag{4.5.12}$$

принадлежащим данному классу (напомним, что Y_A антикоммутируют с $k\bar{k}$). Данная глобальная суперсимметрия является четвертью от $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии и порождается частью генераторов AdS_4 вакуума $Q^1_A = Y_A$ и $Q^2_A = ik\bar{k}Y_A$ [99] (4.5.4), (4.5.5). Следовательно, алгебра симметрий найденного чернодырного решения теории высших спинов соответствует $\frac{1}{4}$ БПС – состоянию. Это является указанием того, что эта черная дыра, в действительности, экстремальна.

Ковариантно постоянные решения (4.5.11) образуют бесконечномерную подалгебру высших спинов глобальных симметрий найденного чернодырного решения.

4.6 Заключительные замечания

В данной главе предложено новое точное решение $4d$ бозонной теории высших спинов, являющееся обобщением черной дыры Шварцшильда теории относительности при учете взаимодействия бесконечного набора безмассовых полей всех целых спинов. На свободном уровне в секторе спина $s = 2$ решение содержит черную дыру Шварцшильда. То, что вклад полей высших спинов становится существенным в режиме сильных полей, проиллюстрировано замечательным свойством – нелинейные поправки взаимно сокращаются для черной дыры Шварцшильда в полной теории высших спинов, сводя нелинейные уравнения к свободным. Это свойство является аналогом для высших спинов того известного факта, что обычный анзац Керра-Шилда сводит нелинейные уравнения Эйнштейна, описывающие $4d$ черную дыру к свободным уравнения Паули-Фирца. Подчеркнем, что безмассовые поля высших спинов сами по себе не удовлетворяют свободным уравнениям в поле черной дыры, если не учитывать их взаимодействие. За это сокращение отвечает дополнительное взаимодействие между полями, благодаря членам в кривизне высших спинов (4.2.2). Им, в результате действия неабелевой операции звездочного произведения, соответствуют билинейные комбинации в связностях.

В рамках предложенной конструкции статическая черная дыра высших спинов описана с помощью вакуума Фока в звездочной алгебре вспомогательного твисторного пространства. Благодаря вакууму Фока, четырехмерные уравнения высших спинов эффективно проецируются на трехмерные, рассмотренные в [46] и описывающие массивные $3d$ поля материи, которые можно решить с помощью деформированных осцилляторов Вигнера. Масса черной дыры M совпадает с вакуумным значением $B_0 = \nu$ из [46], задающее масштаб масс в $3d$ теории взаимодействующих массивных полей. Такая редукция предполагает интересное соответствие между теорией взаимодействующих AdS_3 массивных полей с масштабом масс ν и $4d$ черной дырой высших спинов массы M, $\nu = \lambda GM$, где $-\lambda^2$ – космологическая постоянная и G – константа Ньютона. Более того, полученные результаты указывают на то, что в теории высших спинов флуктуации на фоне черной дыры описываются калибровочной теорией меньшего числа измерений. Таким образом, возникает нетривиальная схема размерной редукции аналогичная бранной картине в теории струн.

На линейном уровне, когда поля высших спинов не дают вклад в метрику, найденное решение в секторе спина $s = 2$ описывает черную дыру Шварцшильда в пространстве AdS_4 по аналогии с заряженным решением Рейснера-Нордстрема вклад метрику электрического заряда начинается со второго порядка через тензор энергии импульса. То, что решение суперсимметрично, по-видимому, означает его экстремальность.

Одной из главных задач дальнейшего исследования является изучение физических свойств полученного решения. В частности, естественен вопрос о малых флуктуациях на фоне найденной черной дыры. Анализ этой проблемы, возможно, прольет свет на такие фундаментальные понятия как горизонты, ловушечные поверхности и тому подобное применительно к черной дыре теории высших спинов. Поскольку эта теория существенно нелокальна на нелинейном уровне, включая производные более высокого порядка с ростом спина, анализ этих вопросов должен быть проведен с использованием методов выходящих за рамки анализа стандартной общей теории относительности. Например, не гарантировано, что распространение сигнала описывается уравнением геодезических кривых. Более того, в теории высших спинов в фазе с ненарушенными симметриями совсем не ясно как определить метрический тензор вне рамок линеаризованного приближения. Изучение термодинамических свойств полученного решения является также приоритетной задачей.

Применением развитых в этой главе методов могут быть обобщения стационарной черной дыры (решение Керра) в теории высших спинов в четырех измерениях. Общее, d – мерное обобщение также возможно в рамках развитого формализма как на свободном, так и на нелинейном уровне. Предварительный анализ показывает, что наш метод должен работать в различном числе измерений. Это становится особенно интересным в контексте черных колец [81], которые существуют в $d \geq 5$. Последней, но не менее важной, задачей является изучение суперсимметричных чернодырных решений в теории высших спинов.

Результаты данной главы изложены в работе [104].

Заключение

Ниже сформулированы основные результаты предлагаемой диссертации.

1. Найден общий вид вакуумных калибровочных полей в обобщенном AdS суперпространстве, ассоциированном с группой $OSp(L, M)$. Это позволило нам описать динамику свободных безмассовых полей в обобщенном AdS пространстве-времени и найти законы их (обобщенных)конформных преобразований и преобразований высших спинов. Найдено в явном виде общее решение полевых уравнений. Результаты получены с помощью звездочной реализации ортосимплектических суперарлгебр.

2. Показано, что БТЗ черная дыра является точным решением калибровочной теории полей высших спинов в трехмерном пространстве-времени. Используя формализм звездочной алгебры, лежащий в основе теории высших спинов, найдены решения для безмассовых полей в метрике черной дыры. Обнаружено, что при некотором условии квантования на массу и угловой момент черной дыры, метрика имеет дополнительные симметрии, связанные с бесконечномерной алгеброй высших спинов.

3. Предложена развернутая формулировка AdS_4 черной дыры, характеризуемой массой, НУТ-зарядом, электрическим и магнитными зарядами и двумя кинематическими параметрами, один из которых является угловым моментом. Найден интегрирующий поток, который связывает полученную развернутую систему черной дыры с условием ковариантного постоянства AdS_4 параметра глобальной симметрии. Предложенная формулировка приводит к координатно-независимому описанию метрики черной дыры в AdS_4. Её заряды отождествлены с эволюционными параметрами интегрирующих потоков, а кинематические параметры – с первыми интегралами развернутой системы уравнений, которые выражаются через инварианты AdS_4 параметра глобальной симметрии. Показано, как с помощью предложенного метода воспроизводятся различные извест-

ные метрики черных дыр, включая метрику Картера и Керра-Ньюмена. Свободные калибровочные параметры позволяют выбирать различные представления метрики, такие как представление Керра-Шилда, двойное представление Керра-Шилда или обобщенное Картера-Плебанского, в координатно-независимом виде.

4. Получено точное статическое сферически-симметричное решение нелинейной бозонной калибровочной теории высших спинов в четырех измерениях, сохраняющее четверть суперсимметрий $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной $4d$ теории высших спинов. В пределе слабого поля решение описывает в секторе спина $s = 2$ AdS_4 черную дыру Шварцшильда, а также безмассовые возбуждения типа Керра-Шилда для всех полей целого спина.

Диссертация основана на работах [100]-[104] из списка литературы.

В заключение я бы хотел выразить искреннюю признательность своему научному руководителю Михаилу Андреевичу Васильеву, на чьих идеях основана вся предлагаемая диссертация. Я рад, что у меня есть возможность учиться у него и работать вместе с ним. Также, я благодарен своему соавтору А.С. Матвееву, внесшего весомый вклад в работы на, которых основаны вторая и третья главы диссертации. Наконец, я бы хотел поблагодарить всех сотрудников Отделения Теоретической Физики им. И.Е. Тамма за создание прекрасной атмосферы дружелюбия в отделе.

Приложение I. Явный вид гомоморфизма группы $Sp(M)$ в звездочной алгебре

Покажем, что формула

$$g(U) = \frac{2^{\frac{M}{2}}}{\sqrt{\det \|U+1\|}} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{U-1}{U+1}\right)^{\alpha\beta} \alpha_\alpha \alpha_\beta\right) \tag{I.1}$$

соответствует закону умножения группы $Sp(M)$, то есть (1.1.20) действительно удовлетворяет уравнению (1.1.19). Ищем $U(f)$ в виде

$$U(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^n \,, \tag{I.2}$$

где a_n некоторые коэффициенты. Следовательно $U(f_1)U(f_2) = \sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_m a_n f_1^m f_2^n$. Поскольку это выражение содержит все f_1 слева, а f_2 справа, мы должны найти такую функцию $U(f)$, что $U(f_1 \circ f_2)$ содержит f_1 и f_2 в правильной последовательности. Имеем

$$U(f_1 \circ f_2) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n ((f_1 f_2)^n (1+f_1) - (f_2 f_1)^n (1+f_2))\}^m \,. \tag{I.3}$$

Все члены, соответствующие неправильному порядку, должны быть равны нулю. Анализ первых нескольких членов $U(f_1 \circ f_2)$ подсказывает вид коэффициентов $a_n = \{a_0, a, a, a, ...\}$, то есть

$$U(f) = a_0 - a + \frac{a}{1-f} \,. \tag{I.4}$$

Подстановка $U(f)$ в уравнение $U^2(f) = U(f \circ f)$ фиксирует $a_0 = 1, a = 2$, таким образом

$$U(f) = \frac{1+f}{1-f} \,. \tag{I.5}$$

Чтобы доказать, что полученное решение действительно удовлетворяет уравнению (1.1.19), нужно проверить тождество

$$(1 + f_1 \circ f_2)\frac{1-f_2}{1+f_2} = (1 - f_1 \circ f_2)\frac{1+f_1}{1-f_1} \tag{I.6}$$

эквивалентное соотношению

$$\begin{gathered}\{1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n ((f_2 f_1)^n (1+f_2) - (f_1 f_2)^n (1-f_1))\}(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m f_2^m) = \\ \{1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n ((f_2 f_1)^n (1+f_2) - (f_1 f_2)^n (1-f_1))\}(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} f_1^m) \,,\end{gathered} \tag{I.7}$$

которое проверяется элементарно.

Предэкспоненциальный множитель решает уравнение

$$\frac{r(U_1)r(U_2)}{\sqrt{\det\|f_1f_2+1\|}} = r(U_1U_2)\,, \tag{I.8}$$

что становится очевидным после подстановки (1.1.20)

$$\frac{2^{\frac{M}{2}}}{\sqrt{\det\|U_1+1\|}}\cdot\frac{2^{\frac{M}{2}}}{\sqrt{\det\|U_2+1\|}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\det\left\|\frac{U_1-1}{U_1+1}\frac{U_2-1}{U_2+1}+1\right\|}} = \frac{2^{\frac{M}{2}}}{\sqrt{\det\|U_1U_2+1\|}}\,. \tag{I.9}$$

Этим завершаем доказательство формулы (1.1.20). Доказательство для суперсимметричного случая аналогично.

Приложение II. Вспомогательные вычисления

II.a Действие оператора (момента) импульса на скалярное поле

Для того, чтобы найти действие генераторов $L_{\alpha\beta}$ и $P_{\alpha\beta}$ на скалярное поле на массовой оболочке, рассмотрим производящий параметр вида

$$\xi = \exp(a_\alpha\mu^\alpha + b_\alpha\eta^\alpha)$$

с постоянными источниками μ_α и η_α. Как показано в разделе 1.3, генераторы глобальных симметрий получаются из (2.4.2)

$$\epsilon = \exp(a_\alpha\hat{\mu}^\alpha + b_\alpha\hat{\eta}^\alpha)\,, \tag{II.a.1}$$

где

$$\hat{\mu}_\alpha = \frac{1}{2}(W_1^{-1}+W_2)_\alpha{}^\beta\mu_\beta + \frac{1}{2}(W_1^{-1}-W_2)_\alpha{}^\beta\eta_\beta\,, \tag{II.a.2a}$$

$$\hat{\eta}_\alpha = \frac{1}{2}(W_1^{-1}+W_2)_\alpha{}^\beta\eta_\beta + \frac{1}{2}(W_1^{-1}-W_2)_\alpha{}^\beta\mu_\beta\,. \tag{II.a.2b}$$

Дифференцирование по источникам μ_α, η_α дает генераторы глобальных симметрий пространства AdS_3

$$\epsilon^P_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^\alpha\partial\mu^\beta} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^\alpha\partial\eta^\beta}\right)\epsilon\Big|_{\substack{\mu=0\\ \eta=0}}\,, \tag{II.a.3a}$$

$$\epsilon^L_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^\alpha\partial\eta^\beta} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^\alpha\partial\mu^\beta}\right)\epsilon\Big|_{\substack{\mu=0\\ \eta=0}}\,. \tag{II.a.3b}$$

Используя (2.5.11) и выполняя звездочное умножение, получаем

$$\delta|C(b|X)\rangle = \epsilon \star |0\rangle\langle 0| = \exp(b_\alpha \hat{\eta}^\alpha + \frac{1}{2}\hat{\mu}_\alpha \hat{\eta}^\alpha) C(b+\hat{\mu}|X) \star |0\rangle\langle 0|, \tag{II.a.4}$$

откуда

$$\delta C(b|X) = C(b+\hat{\mu}|X) \exp(b_\alpha \hat{\eta}^\alpha + \frac{1}{2}\hat{\mu}_\alpha \hat{\eta}^\alpha)\,. \tag{II.a.5}$$

В результате из (II.a.3) и (II.a.5) получаем следующее действие AdS изометрий на скалярном поле $C(X)$

$$\delta^P_{\alpha\beta} C(X) = \left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^\alpha \partial\mu^\beta} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^\alpha \partial\eta^\beta}\right) \left(C(\hat{\mu}|X) e^{\frac{1}{2}\hat{\mu}_\gamma \hat{\eta}^\gamma}\right)\Big|_{\substack{\mu=0\\ \eta=0}}\,, \tag{II.a.6a}$$

$$\delta^L_{\alpha\beta} C(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^\alpha \partial\eta^\beta} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^\alpha \partial\mu^\beta}\right) \left(C(\hat{\mu}|X) e^{\frac{1}{2}\hat{\mu}_\gamma \hat{\eta}^\gamma}\right)\Big|_{\substack{\mu=0\\ \eta=0}} \tag{II.a.6b}$$

или

$$\delta^P_{\alpha\beta} C(X) = \frac{1}{2}\left(W_{1\,\alpha}{}^\gamma W_{1\,\beta}{}^\delta + (W_2^{-1})_\alpha{}^\gamma (W_2^{-1})_\beta{}^\delta\right) \frac{\partial^2 C(\mu|X)}{\partial\mu^\gamma \partial\mu^\delta}\Big|_{\mu=0}\,, \tag{II.a.7a}$$

$$\delta^L_{\alpha\beta} C(X) = \frac{1}{4}\left(W_{1\,\alpha}{}^\gamma W_{1\,\beta}{}^\delta - (W_2^{-1})_\alpha{}^\gamma (W_2^{-1})_\beta{}^\delta\right) \frac{\partial^2 C(\mu|X)}{\partial\mu^\gamma \partial\mu^\delta}\Big|_{\mu=0}\,. \tag{II.a.7b}$$

Наконец, используя уравнения движения (2.5.6) для скалярного поля, имеем

$$dC(X) = \frac{1}{4} h^{\alpha\beta}\, \frac{\partial^2 C(\mu|X)}{\partial\mu^\alpha \partial\mu^\beta}\Big|_{\mu=0}\,, \tag{II.a.8}$$

что эквивалентно

$$2h^n{}_{,\alpha\beta}\partial_n C(X) = \frac{\partial^2 C(\mu|X)}{\partial\mu^\alpha \partial\mu^\beta}\Big|_{\mu=0}\,. \tag{II.a.9}$$

Используя (2.3.7) и принимая во внимание (2.3.11), подстановкой (II.a.9) в (II.a.7) получаем действие генераторов AdS изометрий на скалярное поле в следующем виде

$$\delta^P_{\alpha\beta} C(X) = (\partial_m S_{\alpha\gamma} S_\beta{}^\gamma - \partial_m S_{\gamma\alpha} S^\gamma{}_\beta) g^{mn} \partial_n C(X), \tag{II.a.10a}$$

$$\delta^L_{\alpha\beta} C(X) = \frac{1}{2}(\partial_m S_{\alpha\gamma} S_\beta{}^\gamma + \partial_m S_{\gamma\alpha} S^\gamma{}_\beta) g^{mn} \partial_n C(X). \tag{II.a.10b}$$

II.b Звездочные произведения

Здесь собраны некоторые полезные формулы, которые использовались на протяжении второй главы

$$\begin{aligned}
a_\alpha a_\beta \star f(a,b) &= a_\alpha a_\beta f(a,b) + \frac{1}{2}\left(a_\alpha \frac{\partial}{\partial b^\beta} + a_\beta \frac{\partial}{\partial b^\alpha}\right) f(a,b) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial b^\alpha \partial b^\beta} f(a,b),\\
b_\alpha b_\beta \star f(a,b) &= b_\alpha b_\beta f(a,b) + \frac{1}{2}\left(b_\alpha \frac{\partial}{\partial a^\beta} + b_\beta \frac{\partial}{\partial a^\alpha}\right) f(a,b) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial a^\alpha \partial a^\beta} f(a,b),\\
a_\alpha b_\beta \star f(a,b) &= a_\alpha b_\beta f(a,b) + \frac{1}{2}\left(a_\alpha \frac{\partial}{\partial a^\beta} + b_\beta \frac{\partial}{\partial b^\alpha}\right) f(a,b) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial a^\beta \partial b^\alpha} f(a,b).
\end{aligned} \tag{II.b.1}$$

Вычислим производящую функцию (2.7.12). Согласно схеме, описанной в главе 2.5,

$$|C(b|X)\rangle = g^{-1}(a,b|HW_1,W_2)\star C(b)\star|0\rangle\langle 0|\Big|_{\substack{\alpha=1\\ \beta=0}}\,, \qquad \text{(II.b.2)}$$

где $C(b)$ определена в (2.7.11). Прямое вычисление довольно громоздкое. Для его упрощения удобнее избавиться от лоренцевого члена в калибровочной функции $g(a,b|HW_1,W_2)$. А именно, с помощью (2.4.7) и (2.4.8) можно переписать (II.b.2) в виде

$$|C(b|X)\rangle = \Lambda^{-1}(a,b|V)\star g^{-1}(a,b|HW_1V,V^{-1}W_2)\star C(b)\star|0\rangle\langle 0|\Big|_{\substack{\alpha=1\\ \beta=0}}\,. \qquad \text{(II.b.3)}$$

Выберем матрицу преобразования Лоренца $V_{\gamma\delta}$ так, чтобы $HW_1V = V^{-1}W_2 = \sqrt{S}$. Тогда калибровочная функция примет вид

$$g_0(a,b|S) = g(a,b|\sqrt{S},\sqrt{S}) = \frac{4}{\det||\sqrt{S}+1)||}\exp\Big(-\Pi^{\alpha\beta}(\sqrt{S})(a_\alpha a_\beta + b_\alpha b_\beta)\Big)\,, \qquad \text{(II.b.4)}$$

где $S_{\gamma\delta}$ определена в (2.4.14). Таким образом, используя (2.5.12), перепишем производящую функцию как

$$|C(b_\gamma|X)\rangle = |C_0((V_0^{-1})_\gamma{}^\delta b_\delta|X)\rangle\,, \qquad \text{(II.b.5)}$$

где V_0 — матрица преобразования Лоренца, вычисленная при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, имеет следующий вид

$$V_{0\,\gamma\delta} = -\sqrt{\frac{(u+x)(y-v)}{2(u+1)}}\begin{pmatrix} \mu(r) & \mu(r)\frac{x-u-1}{y-v} \\ \eta(r)(u-x) & \eta(r)\frac{(u-x)(u+x+1)}{y-v}\end{pmatrix}\,, \qquad \text{(II.b.6)}$$

а

$$|C_0(b|X)\rangle = g_0^{-1}(a,b|S)\star C(b)\star|0\rangle\langle 0|\Big|_{\substack{\alpha=1\\ \beta=0}}\,.$$

Для звездочного произведения гауссовых экспонент вида

$$F(b)\star|0\rangle\langle 0| = \sqrt{\det||1-f^2||}e^{f^{\alpha\beta}(a_\alpha a_\beta + b_\alpha b_\beta)}\star e^{m_{\gamma\delta}b^\gamma b^\delta + n_\gamma b^\gamma}\star|0\rangle\langle 0|, \qquad \text{(II.b.7)}$$

используя (2.2.4), после простого гауссового интегрирования получаем

$$F(b) = \sqrt{\frac{\det||1-f^2||}{\det(A)}}\exp\Bigg(\left[(f^{-1}+2m)\frac{1}{f+f^{-1}+4m}(f+2m)-m\right]_{\alpha\beta}b^\alpha b^\beta$$
$$+\left[\frac{1}{f+f^{-1}+4m}(f^{-1}-f)\right]_{\alpha\beta}n^\alpha b^\beta + \left[\frac{1}{f+f^{-1}+4m}\right]_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta\Bigg)\,, \qquad \text{(II.b.8)}$$

где

$$(f^{-1})_\alpha{}^\beta f_\beta{}^\gamma = \delta_\alpha{}^\gamma$$

и
$$A_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + f_\alpha{}^\gamma f_{\gamma\beta} + 4 f_\alpha{}^\gamma m_{\gamma\beta}.$$
Используя (2.7.11), (II.b.4) и (II.b.8), имеем
$$C_0(b|X,\alpha,\beta) = \left(\frac{\beta}{y-v}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds \int dw\, s^{2P-\frac{1}{2}} w^{2Q-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u+x}{4(y-v)}s^2 - \beta^2 \frac{u-x}{y-v} w^2 + \frac{\beta}{y-v} sw}$$
$$\times \exp\left(B_{\gamma\delta}\, b^\gamma b^\delta + \frac{A_\gamma b^\gamma}{(y-v)\sqrt{2(\alpha u - \beta y + 1)}} \right) \qquad \text{(II.b.9)}$$
с
$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 2\beta(\alpha(y-v) + \beta(x-u))w + (\beta + y - v)s \\ 2\beta(\alpha(x-u) + \beta(y-v) - 1)w + (u + x + \alpha)s \end{pmatrix}$$
и
$$B_{\gamma\delta} = \frac{\beta}{y-v} m_{\gamma\delta} + \frac{y-v+\beta}{2(y-v)(\alpha u - \beta y + 1)} S_{(\gamma\delta)}\,,$$
где скобки означают симметризацию по индексам.

Делая замену переменной интегрирования $\beta w \to w$ (β-зависимый фактор включаем в константу интегрирования) и полагая после этого $\alpha = 1$, $\beta = 0$, получаем
$$C_0(b|X) = (y-v)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds \int dw\, s^{2P-\frac{1}{2}} w^{2Q-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u+x}{4(y-v)}s^2 - \frac{u-x}{y-v} w^2 + \frac{1}{y-v} sw} \cdot e^{\hat{B}_{\gamma\delta}\, b^\gamma b^\delta}$$
$$\times \exp\left(\frac{b^1(2w+s)(y-v) + b^2(s(u+x+1) + 2w(x-u-1))}{(y-v)\sqrt{2(u+1)}} \right), \qquad \text{(II.b.10)}$$
где
$$\hat{B}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{y-v}{u+1} & \frac{x}{u+1} \\ \frac{x}{u+1} & -\frac{y+v}{u+1} - \frac{2}{y-v} \end{pmatrix}.$$
Производя преобразование Лоренца (II.b.5) и используя БТЗ координаты (2.1.9), в результате имеем (2.7.12).

Отметим также удобную параметризацию для $Sp(2)$ матрицы $S_{\alpha\beta}$
$$S_{\alpha\beta} = \cosh(p)\varepsilon_{\alpha\beta} + \sinh(p)\varkappa_{\alpha\beta}\,,$$
где $\varkappa_{\alpha\beta} = \varkappa_{\beta\alpha}$ и $\frac{1}{2}\varkappa_{\alpha\beta}\varkappa^{\alpha\beta} = -1$. Легко видеть, что n-ая степень S равна
$$(S^n)_{\alpha\beta} = \cosh(np)\epsilon_{\alpha\beta} + \sinh(np)\varkappa_{\alpha\beta}\,.$$
Следовательно,
$$(\sqrt{S})_{\alpha\beta} = \cosh\left(\frac{p}{2}\right)\varepsilon_{\alpha\beta} + \sinh\left(\frac{p}{2}\right)\varkappa_{\alpha\beta}\,.$$
Кроме того, для матрицы $\Pi = \frac{\sqrt{S}-1}{\sqrt{S}+1}$ имеем
$$\Pi_{\alpha\beta} = \tanh\left(\frac{p}{4}\right)\varkappa_{\alpha\beta}\,.$$

Приложение III. Спинорные обозначения третьей и четвертой главы

Заглавные латинские буквы $A, B, \ldots$ нумеруют $Sp(4)$ векторные (то есть $4d$ Майорана-спинорные) индексы, $A, B, \ldots = 1, \ldots, 4$. Индексы $i, j, \ldots = 1, \ldots, 4$ являются мировыми (база), а $a, b, \ldots = 1, \ldots, 4$ – касательными (слой). Заглавные латинские индексы из середины алфавита $I, J, \ldots = 1, \ldots, 4$ используются, чтобы нумеровать базисные нулевые векторы в разложении интегрирующего потока. Фоновые AdS_4 величины третьей главы отличаются от чернодырных отсутствием шляпок.

Четырехмерный анализ существенно упрощается при использовании спинорного языка. Векторные обозначения переводятся в спинорные и наоборот с помощью σ–матриц ($\sigma^0_{\alpha\dot\alpha}$ – единичная матрица, а $\sigma^{1,2,3}_{\alpha\dot\alpha}$ – матрицы Паули), которые удовлетворяют следующим соотношениям

$$\eta_{ab}\,\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\sigma^b_{\beta\dot\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,, \tag{III.1}$$

причем индексы $\alpha, \dot\alpha = 1, 2$ переводятся друг в друга при комплексном сопряжении $\alpha \leftrightarrow \dot\alpha$. Для вектора Лоренца V_a имеем

$$V_{\alpha\dot\alpha} = (\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}V_a\,, \quad V_a = \frac{1}{2}(\sigma_a)^{\alpha\dot\alpha}V_{\alpha\dot\alpha}\,. \tag{III.2}$$

Спинорные индексы поднимаются и опускаются с помощью $sp(2)$ антисимметричного тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$

$$\xi_\alpha = \xi^\beta\varepsilon_{\beta\alpha}\,, \quad \xi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta\,, \qquad \bar\xi_{\dot\alpha} = \bar\xi^{\dot\beta}\varepsilon_{\dot\beta\dot\alpha}\,, \quad \bar\xi^{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\xi_{\dot\beta}\,, \tag{III.3}$$

где $\varepsilon_{12} = \varepsilon^{12} = 1$, $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$, $\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}$.

Лоренц-неприводимое спинорное представление тензоров Максвелла и Вейля F_{ab} и C_{abcd} выглядит, соответственно, следующим образом

$$F_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}\bar F_{\dot\alpha\dot\beta} + \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}F_{\alpha\beta}\,, \qquad C_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta\gamma\dot\gamma\delta\dot\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}\bar C_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta} + \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\dot\gamma\dot\delta}C_{\alpha\beta\gamma\delta}\,, \tag{III.4}$$

где предполагается симметризация по индексам обозначенным одной буквой. $F_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и их сопряжения являются полностью симметричными мультиспинорами.

Определим дуальность Ходжа между P_{ij} и $*P_{ij}$ следующим образом

$$*P_{ij} = \frac{\sqrt{-g}}{2}\varepsilon_{ijkl}P^{kl}, \tag{III.5}$$

где g – детерминант метрики, а ε^{abcd} – символ Леви-Чивита ($\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$). В спинорном виде это эквивалентно соотношению

$$*P_{\alpha\alpha} = -iP_{\alpha\alpha}, \qquad *\bar P_{\dot\alpha\dot\alpha} = i\bar P_{\dot\alpha\dot\alpha}\,. \tag{III.6}$$

Заметим, что $P_{\alpha\alpha}, \bar{P}_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}$ отвечают (анти)самодуальным частям $P^{\pm}_{ij}$ антисимметричного тензора P_{ij} вида

$$P^{\pm}_{ij} = \frac{1}{2}(P_{ij} \pm i *P_{ij}). \tag{III.7}$$

AdS_4 спинорные индексы $A, B, \ldots$ объединяют левые и правые индексы спиноров Вейля $A = (\alpha, \dot{\alpha})$. Они поднимаются и опускаются $sp(4)$ формой

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \tag{III.8}$$

Приложение IV. Векторный вид развернутых уравнений для AdS_4

В векторных обозначениях развернутая AdS_4 система имеет вид

$$D_i V_j = \varkappa_{ij}, \tag{IV.1}$$

$$D_k \varkappa_{ij} = \lambda^2 (g_{kj} V_i - g_{ki} V_j). \tag{IV.2}$$

Введем антисимметричный тензор $F_{ij} = F^+_{ij} + F^-_{ij}$ соотношениями

$$\varkappa^+_{ij} = \rho F^+_{ij}, \quad \varkappa^-_{ij} = \bar{\rho} F^-_{ij}, \tag{IV.3}$$

где

$$\rho = -\lambda^2 G^{-3}, \quad \bar{\rho} = -\lambda^2 \bar{G}^{-3}, \tag{IV.4}$$

и

$$F^+_{ij} F^{+ij} = -G^4, \quad F^-_{ij} F^{-ij} = -\bar{G}^4, \tag{IV.5}$$

где $\pm$ обозначают (анти)самодуальные части соответствующих 2-форм. Легко проверить, что F_{ij} удовлетворяет уравнениям Максвелла и тождествам Бианки

$$D_k F^k{}_i = 0, \quad D_{[i} F_{jk]} = 0. \tag{IV.6}$$

Тогда систему (IV.1), (IV.2) можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$D_i V_j = \rho F^+_{ij} + \bar{\rho} F^-_{ij}, \tag{IV.7}$$

$$D_k F^+_{ij} = V^p C^+_{pkij}, \tag{IV.8}$$

$$D_k F^-_{ij} = V^p C^-_{pkij}, \tag{IV.9}$$

где $C^{\pm}_{ijkl}$ – следующие квадратичные комбинации тензоров $F^{\pm}_{ij}$

$$C^+_{ijkl} = -G^{-1} \left(2F^+_{ij} F^+_{kl} + F^+_{ik} F^+_{jl} - F^+_{il} F^+_{jk} + \frac{G^4}{4} \left(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk} \right) \right), \tag{IV.10}$$

$$C^{-}_{ijkl} = -\bar{G}^{-1}\left(2F^{-}_{ij}F^{-}_{kl} + F^{-}_{ik}F^{-}_{jl} - F^{-}_{il}F^{-}_{jk} + \frac{\bar{G}^4}{4}\left(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\right)\right). \tag{IV.11}$$

Заметим, что $C^{\pm}_{ijkl}$ описывают (анти)самодуальные части тензора Вейля черной дыры.

Проекторы Киллинга (3.3.23) в векторной форме имеют вид

$$\Pi^{\pm}_{ij} = \frac{1}{2}g_{ij} \pm G^{-2}F^{+}_{ij}, \tag{IV.12}$$

$$\bar{\Pi}^{\pm}_{ij} = \frac{1}{2}g_{ij} \pm \bar{G}^{-2}F^{-}_{ij}. \tag{IV.13}$$

Они обладают следующими свойствами

$$\Pi^{\pm j}_{i}\Pi^{\pm}_{jk} = \Pi^{\pm}_{ik}, \quad \Pi^{\pm j}_{i}\Pi^{\mp}_{jk} = 0, \tag{IV.14}$$

$$\bar{\Pi}^{\pm j}_{i}\bar{\Pi}^{\pm}_{jk} = \bar{\Pi}^{\pm}_{ik}, \quad \bar{\Pi}^{\pm j}_{i}\bar{\Pi}^{\mp}_{jk} = 0. \tag{IV.15}$$

Взаимно ортогональные нулевые векторы Керра-Шилда (3.3.37)–(3.3.38) – суть проекции вектора Киллинга

$$k_i = \frac{1}{(V^{+}V^{-})}V^{-}_{i}, \qquad n_i = \frac{1}{(V^{+}V^{-})}V^{+}_{i}, \tag{IV.16}$$

$$l^{+-}_{i} = \frac{1}{(V^{+-}V^{-+})}V^{+-}_{i}, \qquad l^{-+}_{i} = \frac{1}{(V^{+-}V^{-+})}V^{-+}_{i}, \tag{IV.17}$$

где $(AB) = A_iB^i$ и

$$V^{-}_{i} = \Pi^{-j}_{i}\bar{\Pi}^{-}_{jk}V^{k}, \qquad V^{+}_{i} = \Pi^{+j}_{i}\bar{\Pi}^{+}_{jk}V^{k}, \tag{IV.18}$$

$$V^{+-}_{i} = \Pi^{+j}_{i}\bar{\Pi}^{-}_{jk}V^{k} \qquad V^{-+}_{i} = \Pi^{-j}_{i}\bar{\Pi}^{+}_{jk}V^{k}. \tag{IV.19}$$

Заметим также, что

$$\Pi_{i}{}^{j}\bar{\Pi}_{jk} = \bar{\Pi}_{i}{}^{j}\Pi_{jk}. \tag{IV.20}$$

Векторы $k_i, n_i, l^{+-}_i, l^{-+}_i$ (IV.16), (IV.17) задают четыре геодезические конгруэнции

$$k^jD_jk_i = 0, \quad n^jD_jn_i = 0, \quad l^{+-j}D_jl^{+-}_i = 0, \quad l^{-+j}D_jl^{-+}_i = 0. \tag{IV.21}$$

Теперь можно убедится, что совместность системы Киллинга–Максвелла (IV.7)–(IV.8) требует того, чтобы функция ρ была вида (3.4.2). Соответствующий тензор Римана

$$\begin{aligned}R_{ijkl} =&\lambda^2(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) + 2(e^2 + \mathrm{g}^2)(g_{ik}T_{jl} + g_{jl}T_{ik} - g_{il}T_{jk} - g_{jk}T_{il})\\ &+ 6(\mathcal{M} - 2(e^2 + \mathrm{g}^2)\bar{G})C^{+}_{ijkl} + 6(\overline{\mathcal{M}} - 2(e^2 + \mathrm{g}^2)G)C^{-}_{ijkl},\end{aligned} \tag{IV.22}$$

где тензор энергии-импульса T_{ij} имеет следующий простой вид

$$T_{ij} = 2F^{+}_{ik}F^{-k}_{j} = 2F^{-}_{ik}F^{+k}_{j}. \tag{IV.23}$$

Переписывая (3.3.45) в векторных обозначениях, имеем

$$
\begin{aligned}
F_{ij}k^j &= -\frac{G^2+\bar{G}^2}{2}k_i, \quad F_{ij}n^j = \frac{G^2+\bar{G}^2}{2}n_i, &\text{(IV.24)}\\
F_{ij}l^{+-j} &= \frac{G^2-\bar{G}^2}{2}l_i^{+-}, \quad F_{ij}l^{-+j} = -\frac{G^2-\bar{G}^2}{2}l_i^{-+} &\text{(IV.25)}
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
*F_{ij}k^j &= \frac{i(G^2-\bar{G}^2)}{2}k_i, \quad *F_{ij}n^j = \frac{i(G^2-\bar{G}^2)}{2}n_i, &\text{(IV.26)}\\
*F_{ij}l^{+-j} &= -\frac{i(G^2+\bar{G}^2)}{2}l_i^{+-}, \quad *F_{ij}l^{-+j} = \frac{i(G^2+\bar{G}^2)}{2}l_i^{-+}. &\text{(IV.27)}
\end{aligned}
$$

Литература

[1] D.Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, S. Ferrara, *Phys. Rev.* **D 13**, 3214 (1976).

[2] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press (1987).

[3] C. Fronsdal, *Phys.Rev.* **D 18** (1978) 3624.

[4] C. Aragone and S. Deser, Nuovo Cim. A **3** (1971) 709; Nuovo Cim. B **57** (1980) 33. C. Aragone and S. Deser, Phys. Lett. B **86** (1979) 161.

[5] S.R. Coleman, J. Mandula, *Phys. Rev.* **159**, 1251 (1967).

[6] E.S. Fradkin, M.A. Vasiliev, *Phys.Lett.* **B 189** (1987) 89.

[7] E.S. Fradkin, M.A. Vasiliev, *Nucl.Phys.* **B 291** (1987) 141.

[8] J.M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231

[9] B. Sundborg, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **102** (2001) 113

[10] I.R. Klebanov, A.M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **550** (2002), 213;

[11] S. Giombi, Xi Yin, *Higher Spin Gauge Theory and Holography: The Three-Point Functions* e-Print: `arXiv:0912.3462` [hep-th]

[12] M.A. Vasiliev, Phys. Lett. **B243** 378-382 (1990)

[13] M.A. Vasiliev, *Phys. Lett.* **B285** (1992) 225.

[14] M.A. Vasiliev, Phys. Lett. **B567** 139-151 (2003), `hep-th/0304049`

[15] M.A. Vasiliev, *Phys.Rev.* **D 66** (2002) 066006, hep-th/0106149.

[16] M.A. Vasiliev, *Relativity, Causality, Locality, Quantization and Duality in the* $Sp(2M)$ *Invariant Generalized Space-Time*, Contribution to the Marinov's Memorial Volume, M.Olshanetsky and A.Vainshtein Eds, World Scientific , hep-th/0111119.

[17] C. Fronsdal, Massless Particles, Ortosymplectic Symmetry and Another Type of Kaluza-Klein Theory, Preprint UCLA/85/TEP/10, in Essays on Supersymmetry, Reidel, 1986 (Mathematical Physics Studies, v.8).

[18] J. Bekenstein, *Lett. Nuov. cimento* **4** (1972) 737, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 2333, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3292

[19] S. Hawking, *Phys. Rev. Lett.* **26**, (1971) 1344

[20] A. Strominger, C. Vafa, *Phys. Lett.* **B** 379: 99-104, (1996)

[21] A. Strominger, JHEP **9802**, 009 (1998)

[22] J.L. Cardy, *Nucl. Phys.* B270, 186 (1986)

[23] I. Bandos, J. Lukierski and D. Sorokin, *Phys.Rev.* **D61** (2000): 045002, hep-th/9904109.

[24] I. Bandos, J. Lukierski, C. Preitschopf, D. Sorokin, *Phys.Rev.* **D61** (2000) 065009, hep-th/9907113.

[25] M. Plyushchay, D. Sorokin and M. Tsulaia, *JHEP* **0304** (2003) 013, hep-th/0301067

[26] I.Bars, C.Deliduman and J.Minic, *Phys.Lett.* **B466** (1999) 135-143, hep-th/9906223.

[27] I.Bars and M.Günaydin, *Commun.Math.Phys.* **91** (1983) 31.

[28] O.V. Shaynkman and M.A. Vasiliev, *Theor. Math. Phys.* **128** (2001) 1155-1168; (*Teor. Mat. Fiz.* **128** (2001) 378-394), hep-th/0103208.

[29] K.I. Bolotin and M.A. Vasiliev, *Phys.Lett.* **B479** (2000) 421-428, hep-th/0001031.

[30] I. Todorov and G. Mack, *Phys.Rev.* **D 6**: 1764-1787, 1973.

[31] A.O. Barut and R. Raczka Theory of Group Representations and Applications, *PWN-Polish scientific publishers Warszawa 1977*

[32] M.A. Vasiliev, *Fortschr.Phys.* **36** (1988) 33.

[33] M.A. Vasiliev, *Higher Spin Gauge Theories: Star Product and AdS Space*, Contributed article to Golfand's Memorial Volume "Many faces of the superworld", ed. by M. Shifman, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore, 2000, hep-th/9910096.

[34] A. Staruszkiewicz, *Acta Phys. Polon.* **24** (1963) 734

[35] H. Leutwyler, *Nuovo Cim.* **42** (1966) 159

[36] S. Deser, R. Jackiw, and G. 't Hooft, *Annals Phys.* **152** (1984) 220

[37] S. Deser and R. Jackiw, *Annals Phys.* **153** (1984) 405; *Commun.Math.Phys.* **118** (1988) 495

[38] G. 't Hooft, *Commun.Math.Phys.* **117** (1988) 685

[39] A. Achúcarro and P. K. Townsend, *Phys.Lett.* **B180** (1986) 89

[40] E. Witten, *Nucl.Phys.* **B311** (1988) 46; *Nucl. Phys.* **B323** (1989) 113; *Commun.Math.Phys.* **137** (1991) 29

[41] S. Carlip, *J.Korean Phys.Soc.* **28** (1995) S447-S467, gr-qc/9503024

[42] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Phys.Rev.Lett.* **69** (1992) 1849, hep-th/9204099

[43] D. Ida, *Phys.Rev.Lett.* **85** (2000) 3758, gr-qc/0005129

[44] M. Banados, M.Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Phys.Rev.* **D48** (1993) 1506, gr-qc/9302012

[45] M.A. Vasiliev, *Mod.Phys.Lett.* **A7** (1992) 3689-3702

[46] S.F. Prokushkin and M.A. Vasiliev, *Nucl.Phys.* **B545** (1999) 385, hep-th/9806236

[47] E. Sezgin and P. Sundell, Nucl. Phys. **B762** 1-37 (2007), `hep-th/0508158`

[48] K. Ghoroku and A. L. Larsen, *Phys.Lett.* **B328** (1994) 28-35, hep-th/9403008

[49] I. Ichinose and Y. Satoh, *Nucl.Phys.* **B447** (1995) 340, hep-th/9412144

[50] S. Das and A. Dasgupta, *JHEP* **9910** (1999) 025, hep-th/9907116

[51] *The collected mathematical papers of Arthur Cayley*, Cambridge University Press, pp. 332–336

[52] D. Birmingham, I. Sachs and S.N. Solodukhin, *Phys.Rev.Lett.* **88** (2002) 151301, hep-th/0112055

[53] M.A. Vasiliev, *Class.Quant.Grav.* **8** (1991) 1387

[54] I.S. Gradshtein and I.M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums, series and products*, Fiz.Mat.Lit., Moscow, 1963.

[55] J. Gamboa and F. Méndez, *Class.Quant.Grav.* **18** (2001) 225-232, hep-th/0006020

[56] S. Lepe, F. Méndez, J. Saavedra and L. Vergara, *Class.Quant.Grav.* **20** (2003) 2417-2428, hep-th/0302035

[57] J. Troost, *JHEP* **0209** (2002) 041, hep-th/0206118

[58] N.A Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, Providence, American Mathematical Society, 1968

[59] O. Coussaert, M. Henneaux, *Phys.Rev.Lett.* **72** (1994) 183-186, hep-th/9310194

[60] M.A. Vasiliev, Ann. Phys. (NY) **190** (1989) 59

[61] M.A. Vasiliev, Phys. Lett. **B285** (1992) 225

[62] M.A. Vasiliev, Int. J. Mod. Phys. **D5** (1996) 763-797

[63] D. Sorokin, *Introduction to the classical theory of higher spins*, [hep-th/0405069]

[64] X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla and M.A. Vasiliev, *Nonlinear higher spin theories in various dimensions*, Proceedings of the First Solvay Workshop on Higher-Spin Gauge Theories (Brussels, May 2004), [hep-th/0503128]

[65] A. Sagnotti, E. Sezgin and P. Sundell, "On Higher Spins with a Strong $Sp(2,\mathbb{R})$ Condition," Proceedings of the First Solvay Workshop on Higher-Spin Gauge Theories (Brussels, May 2004), [hep-th/0501156]

[66] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt and M.A.H. MacCallum, *Exact solutions of Einstein's field equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980

[67] B. Carter, Commun. Math. Phys. **10** (1968) 280

[68] B. Carter, Phys. Rev. **174** (1968) 1559

[69] J.F. Plebański, Ann. Phys. (NY) **90** (1975) 196

[70] M.A. Vasiliev, Nucl.Phys. **B616** (2001) 106-162; Erratum-ibid. **B652** (2003) 407

[71] E.T. Newman and A.I. Janis, J. Math. Phys. **6** (1965) 915; E.T. Newman, E. Couch, R. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash and R. Torrence, J. Math. Phys. **6** (1965) 918

[72] A.Z. Petrov, *The classification of spaces defining gravitational fields*, Scientific Proceedings of Kazan State University **114** (1954) 55

[73] R.P. Kerr and A. Schild, Proc. Symp. Appl. Math. **17** (1965) 199

[74] B. Carter, J. Math. Phys. **28** (1987) 1535

[75] A. Papapetrou, Ann. Inst. H. Poincaré **A4** (1966) 83

[76] R.H. Boyer and R.W. Lindquist, J. Math. Phys. **8** (1967) 265

[77] B. Carter, Commun. Math. Phys. **17** (1970) 233

[78] Z.-W. Chong, G.W. Gibbons, H. Lu and C.N. Pope, Phys. Lett. **B609** (2005) 124-132

[79] G.W. Gibbons, H. Lu, D.N. Page and C.N. Pope, J. Geom. Phys. **53** 49-73 (2005), `hep-th/0404008`

[80] R.R. Metsaev, *Arbitrary spin massless bosonic fields in d-dimentional anti-de Sitter space*, [hep-th/9810231]

[81] R. Emparan and H.S. Reall, Phys. Rev. Lett. **88** 101101 (2002), `hep-th/0110260`

[82] V. Pravda and A. Pravdova, Gen. Rel. Grav **37** (2005) 1277-1287

[83] V. Frolov and D. Kubiznak, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 011101

[84] M. Plyushchay, D. Sorokin and M. Tsulaia, *GL flatness of* $OSp(1|2n)$ *and higher spin field theory from dynamics in tensorial spaces*, [`hep-th/0310297`]

[85] K. Yano, Ann. Math. **55** (1952) 328

[86] V.P. Frolov and D. Kubiznak, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 154005

[87] J.F. Plebański and M. Demiański, Ann. Phys. (NY) **98** (1976) 98-127

[88] M.A. Vasiliev, Phys. Lett. **B285** 225 (1992)

[89] A.K.H. Bengtsson, I. Bengtsson and L. Brink, Nucl. Phys. **B227** 31 (1980) Nucl. Phys. **B227** 41 (1980)

[90] F.A. Berends, G.J.H. Burgers and H. Van Dam, Z. Phys. **C24** 247 (1984); Nucl. Phys. B **260** 295 (1985)

[91] E. Sezgin and P. Sundell, JHEP 0207:055 (2002), `hep-th/0205132`

[92] C. Iazeolla, E. Sezgin and P. Sundell, Nucl. Phys. **B791** 231-264 (2008), `arXiv:0706.2983[hep-th]`

[93] F.A. Berezin and M.A. Shubin, *"Schrödinger Equation"*, Moscow University Press (Moscow, 1983)

[94] M.A. Vasiliev, Int. J. Mod. Phys. **A6** 1115 (1991)

[95] E. Wigner, Phys. Rev. **D77** 711 (1950)

[96] O.A. Gelfond and M.A. Vasiliev, JHEP **0903** 125 (2009), `arXiv:0801.2191[hep-th]`

[97] R.M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, (1984)

[98] G.W. Gibbons and C.M. Hull, Phys. Lett. **B109** 190-194 (1982)

[99] E.S. Fradkin and M.A. Vasiliev, Mod. Phys. Lett. **A3** 2983 (1988)

Публикации автора

[100] V.E. Didenko and M.A. Vasiliev, *J.Math.Phys.* **45** (2004) 197-215, hep-th/0301054

[101] V. E. Didenko, A. S. Matveev and M. A. Vasiliev, Theor. Math. Phys. **153** 1487 (2007) [Teor. Mat. Fiz. **153** 158 (2007)], `hep-th/0612161`

[102] V.E. Didenko, A.S. Matveev, and M.A. Vasiliev, Phys. Lett. **B665** 284 (2008), `arXiv:0801.2213[hep-th]`

[103] V.E. Didenko, A.S. Matveev, and M.A. Vasiliev, *Unfolded Dynamics and Parameter Flow of Generic AdS_4 Black Hole*, `arXiv:0901.2172[hep-th]`

[104] V.E. Didenko, M.A. Vasiliev, Phys. Lett. **B682** 305-315 (2009), `arXiv:0906.3898[hep-th]`