

На правах рукописи

СКВОРЦОВ Евгений Дмитриевич

**КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ
В ПРОСТРАНСТВАХ МИНКОВСКОГО И (АНТИ)-ДЕ СИТТЕРА
В РАМКАХ РАЗВЕРНУТОГО ФОРМАЛИЗМА**

(01.04.02 – теоретическая физика)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. М. А. ВАСИЛЬЕВ

Москва - 2009

Оглавление

Введение	1
0.1 Место теории полей высших спинов в современной теоретической физике	1
0.2 Теории поля в пространствах размерности большей четырёх	5
0.3 Развёрнутая формулировка полевых уравнений	9
0.4 Цель и содержание поставленных задач	9
0.5 Структура диссертации	10
1 Релятивистские поля и частицы в пространстве Минковского и (анти)-де Ситтера	13
1.1 Классификация частиц	13
1.1.1 Классификация частиц в пространстве Минковского	13
1.1.2 Классификация частиц в пространстве анти-де Ситтера	15
1.1.3 Классификация частиц в пространстве де Ситтера	22
1.2 Полевые уравнения	22
1.2.1 Пространство Минковского	23
1.2.2 Пространство анти-де Ситтера	25
1.2.3 Пространство де Ситтера	26
1.3 Поля в пространстве Минковского vs. (анти)-де Ситтер	27
1.3.1 Степени свободы	27
1.3.2 Унитарность	27
1.4 К оффшельному описанию	28
1.5 Выводы	33
2 Развёрнутая формулировка	35
2.1 Общее определение	35
2.2 Связь с алгебрами Ли	37
2.3 Фоновая геометрия в рамках развёрнутого подхода	39
2.4 Линеаризованная развёрнутая система	41
2.5 Интерпретация развёрнутых систем, σ_- -когомологии	43
2.6 Примеры разворачивания. Поле спина s	50
2.6.1 Поле спина $(s + \frac{1}{2})$	55
3 Развёрнутая формулировка безмассовых полей произвольного типа симметрии в пространстве Минковского	57
3.1 Мотивация: проблемы и нерешённые вопросы метрического подхода . .	57

3.2	Построение развёрнутой формулировки	58
3.2.1	Простейший пример поля смешанного типа симметрии	58
3.2.2	Схема построения развёрнутой формулировки в общем случае	61
3.2.3	Реализация схемы в общем случае	62
3.2.4	Решение тождеств Якоби	65
3.2.5	Развёрнутая система уравнений	68
3.2.6	Вычисление σ_- -когомологий	70
3.2.7	Интерпретация σ_- -когомологий	74
3.2.8	Редукция к уравнениям Лабастиды	76
3.2.9	Степени свободы	77
3.3	Выводы	79
4	Реперная формулировка	81
4.1	Пример поля спина \mathbf{s}	81
4.2	Реперная формулировка	83
4.3	Лагранжиан	84
4.3.1	Скалярное произведение	85
4.3.2	Доказательство свойств σ_-	85
4.3.3	Действие и калибровочная инвариантность	88
4.3.4	Уравнения движения	89
4.4	Выводы	90
5	Геометрическое описание частично-безмассовых полей	91
5.1	Введение	91
5.1.1	Спин-два, гравитация	91
5.1.2	Спин- s	92
5.2	Частично-безмассовые поля спина s	94
5.2.1	Массивное поле произвольного спина	94
5.2.2	Частично-безмассовое поле спина 2	95
5.2.3	Массивное поле спина s	96
5.2.4	Частично-безмассовое поле спина \mathbf{s}	97
5.3	Ковариантное описание	98
5.4	Лоренц-ковариантное описание	103
5.5	Выводы	107
6	Обобщённые поля Янга-Миллса и калибровочные поля в $(A)dS_d$	109
6.1	Введение	109
6.2	Обобщённые поля Янга-Миллса	111
6.2.1	Редукция к реперному формализму	112
6.2.2	Редукция к метрическому формализму	116
6.3	σ_- -когомологии	117
6.3.1	Реализация σ_- для обобщённых связностей алгебры (анти)-де Ситтера	117
6.3.2	Два примера	122
6.3.3	Максимально симметричные элементы $\text{Res}_\mathfrak{h}^{\mathfrak{g}}\mathbf{X}$	123

6.3.4	Выделенные части тензорного произведения	123
6.3.5	$\text{Res}_\mathfrak{g}^{\mathfrak{g}}$ и hwp , msp	125
6.3.6	σ_- -когомологии, результат	128
6.3.7	σ_- для $\mathfrak{sl}(d+1)$	129
6.3.8	σ_- для $\mathfrak{so}(d+1)$	136
6.3.9	Замечания о Вейлевском модуле и σ_-	144
6.3.10	Некоторые примеры σ_- -когомологий	146
6.3.11	Выводы по σ_- -когомологиям	148
6.4	Пример калибровочного поля $(\mathbb{Y}(s_1, s_2), \mathbf{1}, \mathbf{1})$	149
6.5	Связь калибровочных полей и обобщённых полей Янга-Миллса	154
6.5.1	Связь с σ_- -когомологиями	156
6.5.2	Многообразие полей Янга-Миллса vs. калибровочные поля	158
6.5.3	Плоский предел	159
6.5.4	Вычисление m^2	160
6.6	К нелинейной теории	163
6.7	Выводы	165
Заключение		167
Публикации автора		169
Приложения		171
	Приложение А: Мультииндексные обозначения	171
	Приложение В: Некоторые обозначения	172
	Приложение С: Диаграммы Юнга и представления классических алгебр Ли	173
С.1	Определение диаграмм Юнга	173
С.2	Типы симметрии тензоров и диаграммы Юнга	174
С.3	Связь диаграмм Юнга с неприводимыми представлениями алгебр классической серии	175
С.4	Ограничение представлений	178
С.5	Тензорные произведения представлений	180
	Приложение D: Коэффициенты к главе 5	183

Введение

0.1 Место теории полей высших спинов в современной теоретической физике

К настоящему моменту известны четыре типа фундаментальных взаимодействий: гравитационное, сильное, слабое и электромагнитное. Все, кроме гравитационного взаимодействия, описываемого Общей теорией относительности (ОТО), были объединены в рамках так называемой Стандартной модели элементарных частиц. Многочисленные предсказания как ОТО, так и Стандартной модели находятся пока в отличном согласии с экспериментом. Поэтому наиболее важной фундаментальной проблемой физики высоких энергий представляется объединение этих двух теорий в рамках единой теории.

Фундаментальной задачей теории поля представляется поиск взаимодействующих (а следовательно нелинейных) теорий поля и построение на их основе последовательной квантовой теории, претендующей на описание всего круга явлений микромира. С этой точки зрения более последовательная программа состоит в том, чтобы сначала проклассифицировать все возможные релятивистские поля и построить их полевое описание, затем определить, какие возможны нелинейные теории с различным составом полей, и потом изучать вопросы квантования таких теорий, например, наличие или отсутствие аномалий. При этом класс изучаемых теорий, например, состав полей в них, может существенно отличаться от результатов, полученных на основе проведённых к настоящему времени экспериментов, поскольку часть полей может обладать массами, превышающими современные экспериментальные возможности или не взаимодействовать с видимым веществом.

В настоящее время наиболее развитой теорией, претендующей на объяснение всего круга явлений микромира, а также космологии, является теория струн. Парадигма теории струн состоит, грубо говоря, в том, что точечные объекты — элементарные частицы — заменяются протяжёнными объектами — струнами, и «размазанность» струн приводит к улучшению ультрафиолетовых свойств амплитуд рассеяния.

Хотя теория струн в начале своего развития казалась имеющей мало общего с обычной теорией поля, дальнейшие исследования показали, что они тесно связаны: AdS_d/CFT^{d-1} соответствие [1–3] связывает теорию струн в пространстве анти-де Ситтера с теорией поля на границе и позволяет использовать теорию струн как вычислительный метод для аномальных размерностей операторов в теории поля; активно развивается так называемая полевая теория струн, предложенная Виттенем в [4], которая представляет из себя формулировку теории открытых струн в полевых

терминах. Результаты полевой формулировки для замкнутых струн пока не столь впечатляющие [5–9].

Ретроспективно можно прийти к выводу о том, что переход от какой-либо линейной теории к нелинейной требует подчас кардинального пересмотра исходных принципов и приводит к появлению новых нетривиальных структур, не просматриваемых в исходной линейной теории.

Рассмотрим хорошо известные примеры, исчерпывающие на самом деле все известные примеры за пределами теории полей высших спинов. Свободное безмассовое поле спина 1 описывается уравнениями Максвелла в терминах напряжённостей $F_{\mu\nu}$ или потенциалов A_μ . Однако нелинейная теория некоторого набора безмассовых полей спина 1 с необходимостью [10] является теорией Янга-Миллса [11], приводя к тому, что исходный набор $U(1)$ невзаимодействующих полей должен составлять мультиплет, отвечающий присоединённому представлению некоторой алгебры Ли \mathfrak{g} . Требование положительности энергии приводит также к тому, что \mathfrak{g} должна быть компактной алгеброй Ли. Дальнейшее развитие теории Янга-Миллса выявило связь полей-потенциалов с хорошо известным в математике понятием связности на расслоении со структурной группой. Следует отметить, что: (1) в исходной линейной теории тесная связь с алгебрами Ли и связностями на расслоениях оказывалась скрытой; (2) нелинейная теория строится в терминах потенциалов A_μ , а не напряжённостей $F_{\mu\nu}$; (3) введение взаимодействий с материей также требует введение потенциала A_μ .

Свободное массивное поле спина 1 описывается теорией Прока. Было показано [12,13], что непротиворечивая перенормируемая нелинейная теория массивных полей спина 1 возникает в результате спонтанного нарушения калибровочных симметрий в теории Янга-Миллса, — этот факт является фундаментальным и играет ключевую роль в Стандартной модели.

Хотя в случае полей спина 2 исторически первой была построена как раз нелинейная классическая теория, более естественный путь от линейной к нелинейной также был проделан. Свободное безмассовое поле спина 2 описывается теорией Фирца-Паули [14] (уравнения Фирца-Паули получаются линеаризацией уравнений Эйнштейна над плоским фоном, и именно Фирц и Паули показали, что свободный предел теории Эйнштейна представляет собой теорию безмассового поля спина 2). Можно поставить задачу о нелинейной деформации теории Фирца-Паули. При некоторых предположениях о порядке производных было показано [15, 16], что единственной непротиворечивой деформацией является теория Эйнштейна. Что касается соответствия линейной и нелинейной теории, необходимо отметить следующее: (1) аналогично случаю полей спина 1 можно было бы начать с некоторого мультиплета полей спина 2, однако оказывается [17], что нелинейную деформацию допускает лишь теория с одним гравитоном (есть ещё одна возможность с двумя гравитонами, отвечающая комплексификации теории Эйнштейна), таким образом, не существует *a la* Янг-Миллс теорий спина 2; (2) исходное свободное поле спина 2 можно рассматривать наравне с другими полями без какого-либо отношения к геометрии пространства-времени, но в нелинейной теории поле спина 2 оказывается определяющим геометрию пространства-времени. Дальнейшие работы [18–21] выявили более тесную связь теории гравитации и теории Янга-Миллса, что будет описано подробнее ниже в разделах 2.3 и 5.1.1 настоящей диссертации. Оказалось, что, до некоторой степени, теория

гравитации есть теория Янга-Миллса с калибровочной группой, отвечающей симметриям вакуумного пространства-времени.

спин, масса	теория поля		структуры нелинейной теории
	линейная	нелинейная	
$1, m^2 = 0$	Электродинамика Максвелла	Янг-Миллс	алгебры Ли, связности и расслоения
$1, m^2 \neq 0$	Прока	нарушенный Янг- Миллс	
$\frac{3}{2}, m^2 = 0$	Рарита-Швингера	Супергравитация	супералгебры Ли, супер- пространства, суперсим- метрии
$2, m^2 = 0$	Фирца-Паули	Гравитация Эйнштейна- Картана-Вейля	геометрия пространства- времени и калибрование его глобальных симмет- рий
$0, \dots, \infty,$ $m^2 = 0$	Фронсдала	уравнения Васи- льева	развёрнутый формализм, алгебры высших спинов, некоммутативная геомет- рия

Ещё более интересной теорией оказалась теория безмассовых полей спина $\frac{3}{2}$, линейная версия которой была предложена Рарита и Швингером [22]. Долгое время не удавалось построить нелинейную теорию с полями данного спина. Исследования приводили к тому, что при добавлении нелинейных слагаемых распространение полей уходит со светового конуса и появляются новые степени свободы. Было сделано наблюдение [23], что проблему можно было бы решить введением поля спина 2. Однако потребовалось ещё некоторое время для того, чтобы была построена первая теория супергравитации [24]. Само понятие суперсимметрии, требующее введение новых объектов — супергрупп и супералгебр, а также пространств, где они действуют геометрическим образом, — суперпространств, оказалось крайне содержательным.

Отметим, что вопрос о введении гравитационного взаимодействия фермионных полей спина $\frac{1}{2}$ показал, что наиболее адекватными переменными теории гравитации являются поля тетрады и спин-связности, а не метрический тензор.

Наиболее общий вопрос состоит в том, чтобы выяснить какие возможны нелинейные теории, включающие в себя поля произвольного спина, — именно это и составляет предмет теории полей высших спинов, где слово «высший» означает наличие полей спина больше 2. Сама теория полей высших спинов на начальных этапах развития была связана с именами П.Дирака, В.Паули, М.Фирца, Дж. Швингера, И.Е.Тамма, В.Л. Гинзбурга, Е.С.Фрадкина и других. Наиболее существенные результаты достигнуты в теории безмассовых полей высших спинов. Аналогично безмассовым полям спина 1, $\frac{3}{2}$ и 2, безмассовые поля высших спинов оказываются калибровочными полями, обобщая Стандартную Модель и супергравитацию.

Имелось несколько классических препятствий к самой возможности существования нелинейных теорий с полями высших спинов: (а) из теоремы Колмана-Мандуллы

[25, 26] следовало, что матрица рассеяния полей высших спинов единична, т.е. никакого рассеяния нет; (б) не получалось [27, 28] построить гравитационные взаимодействия полей высших спинов — не удавалось добиться калибровочной инвариантности вершин, хотя были построены кубические вершины рассеяния самих полей высших спинов [29–36], которые содержали как высшие производные, так и некоторый размерный параметр, их обезразмеривающий. Последнее выглядело странно, так как не было понятно, чему данный размерный параметр может соответствовать. Ввиду этих трудностей не исследовались теории супергравитации с более чем $N = 8$ суперсимметриями, так как представления $N > 8$ супералгебр содержат поля со спином больше двух.

Эти трудности были преодолены в работах [37, 38], где был построен кубичный лагранжиан для полей высших спинов, включающий в себя и гравитационные взаимодействия полей¹. Ключевая идея состояла в том, чтобы отказаться от разложения над плоским фоном и рассматривать теорию над пространством анти-де Ситтера. Космологическая постоянная или радиус пространства анти-де Ситтера играет роль размерного параметра, обезразмеривающего старшие производные в лагранжиане. Отсутствие понятия S -матрицы в пространстве (анти)-де Ситтера снимало аргументы теоремы Колмана-Мандуллы. Хотя барьер и был преодолен, но кубические вершины не гарантируют существование полной теории, поскольку в кубичном приближении не деформируется алгебра симметрий линейной теории и рассмотрение четвертичных и более высоких вершин может привести к противоречиям.

Отметим, что ключевым техническим ингредиентом, позволившем записать ответ в простой форме, было обобщение тетрадной формулировки гравитации на случай полей высших спинов, для которых также были построены аналоги тетрады и спин-связности, [40]. Далее, как естественное развитие такого «тетрадного» подхода к полям высших спинов, был предложен так называемый развёрнутый подход к уравнениям движения [41–43]. Развёрнутый подход — это формулирование уравнений движения с использованием только языка дифференциальных форм (сами тетрада и спин-связность, а также поля Янга-Миллса являются дифференциальными формами степени один).

Далее были последовательно изучены в рамках развёрнутого формализма кубические вершины [42], а затем и четвертичные вершины [44]. Здесь обнаружилась ещё одна особенность, выделяющая теории с полями высших спинов, а именно: наименьший мультиплет высших спинов содержал поля всех спинов от нуля до бесконечности с кратностью один. Следует отметить работу Р.Мецаева, который в рамках конусного формализма рассмотрел четвертичные вершины [34] и показал, что необходимым условием построения совместной теории с хотя бы одним полем высшего спина является введение полей всех спинов. Это означает, например, что не существует самодействующей теории спина 3 в противоположность теориям Янга-Миллса и гравитации как теориям самодействующих полей спина 1 и спина 2. Аналогичный результат был получен в [31].

Затем в рамках развёрнутого формализма были написаны полные нелинейные уравнения полей высших спинов, включающие в себя вершины произвольного поряд-

¹Позднее было показано, что в найденных кубичных вершинах нет произвола [39].

ка [44–46]. Примечательно, что задача построения уже кубических взаимодействий без использования развёрнутого формализма оказывается чрезвычайно сложной технически, поэтому требуются либо серьёзные упрощения, связанные с подходом светового конуса [33, 35, 47–49], когда Лоренц-ковариантность становится, однако, неявной, либо компьютерные вычисления в рамках БВ-БРСТ [50, 51]. Что касается полной теории, включающей в себя все возможные вершины, то она на данный момент известна исключительно в рамках развёрнутого формализма, что и обеспечивает его актуальность.

Следует подчеркнуть, что «обычные» теории полей младших спинов автоматически включаются в теорию полей высших спинов; так, например, возникают обычные теории супергравитации (в исключительных размерностях) или (супер) Янга-Миллса.

Именно калибровочная симметрия накладывает ограничения на теорию, полностью определяя как свободную, так и нелинейную (т.е. взаимодействующую) теорию. Калибровочные теории с ненарушенной калибровочной симметрией описывают безмассовые поля. Теории с массивными полями могут быть получены из безмассовых путём хорошо известного механизма Хиггса, как это происходит в Стандартной модели. Конкретный механизм генерации масс в теории полей высших спинов ещё предстоит разработать.

В настоящее время существуют указания на конечность $N = 8$ супергравитации [52, 53], что, если подтвердится, будет говорить в пользу сокращения возможных аномалий и в теории высших спинов, возрождая одну из исходных мотиваций изучения теорий с полями высших спинов как теорий с высшими симметриями, приводящими посредством тождеств Уорда к сокращению аномалий. Также последние исследования [54–57] показывают, что теория гравитации сама по себе может оказаться непертурбативно перенормируемой, что внушает ещё больший оптимизм в отношении теории высших спинов, содержащей в себе и теорию гравитации.

Не вызывает сомнения, что теория полей высших спинов тесно связана с теорией струн²: хорошо известно [59–63], что в пределе нулевого натяжения $\alpha'^{-1} \rightarrow 0$ теория струн приводит к теории безмассовых полей высших спинов. Поэтому некоторая теория высших спинов должна отвечать ненарушенной фазе теории струн, из которой уже посредством некоторого нарушения симметрий высших спинов получается сама теория струн [64–67]. Это говорит в пользу того, что именно теория высших спинов может быть искомой фундаментальной теорией, объединяющей все взаимодействия.

0.2 Теории поля в пространствах размерности большей четырёх

По многим причинам в течении последних нескольких десятков лет постоянно возрастает интерес к теориям поля в пространствах, имеющих размерность отличную от четырёх. Так, например, теория суперструн непротиворечива в размерности десять.

²Следует отметить недавнюю работу [58], в которой в рамках RNS подхода были построены вершинные операторы для некоторых полей высших спинов.

Переход к обычному четырёхмерному пространству осуществляется с помощью механизма компактификации, когда лишние измерения предполагаются имеющими малый размер и потому не детектируемыми в обычных экспериментах, или с помощью теории бран, в которой предполагается, что материя живёт на некотором трёхмерном подпространстве (бране) многомерного пространства. Многомерность пространства может сказываться как на малых расстояниях, сравнимых с радиусом лишних измерений, так и на космологических масштабах.

Со времён работы Вигнера 1939 года [68] было осознано, что классические не взаимодействующие (линейные) релятивистские поля в некотором пространстве-времени (в оригинальной работе [68] рассматривалось четырёхмерное пространство Минковского M_4) находятся в тесной связи с группой \mathfrak{G} симметрий данного пространства-времени. А именно, элементарные релятивистские поля реализуют неприводимые представления \mathfrak{G} . Как хорошо известно [68], неприводимые бесконечномерные представления группы движений четырёхмерного пространства Минковского, т.е. группы Пуанкаре $ISO(d-1, 1)$, характеризуются двумя параметрами: массой и спином. Физические соображения, выражающиеся в требовании унитарности представлений, приводят к тому, что масса должна быть неотрицательной действительной величиной. Спин может принимать целые или полуцелые неотрицательные значения.

Классификация релятивистских полей в пространстве Минковского размерности большей четырёх также хорошо известна [69]. Поля по-прежнему характеризуются неотрицательным числом, имеющим смысл массы частицы. Однако понятие спина значительно усложняется. Спин частицы, живущей в многомерном пространстве Минковского, характеризуется не одним (полу)целым числом, а последовательностью таких чисел, которые задают тензор физических поляризаций частицы.

Тот факт, что тензор физических поляризаций определяется несколькими числами, связан с тем, что в пространствах большей размерности неприводимые тензоры наиболее общего вида не сводятся к только симметричным или антисимметричным, а имеют так называемую симметрию смешанного типа. Спиновые степени свободы в d -мерном пространстве Минковского характеризуются представлениями малой алгебры Вигнера, которая есть $\mathfrak{so}(d-1)$ для массивных полей и $\mathfrak{so}(d-2)$ для безмассовых, большинство неприводимых тензоров которых имеют смешанный тип симметрии в $d > 4$ для массивных полей и в $d > 5$ для безмассовых.

Неприводимые тензоры смешанного типа симметрии (анти)симметричны по некоторым тензорным индексам и удовлетворяют также некоторым дополнительным условиям. Типы неприводимых тензоров могут быть описаны с помощью удобного графического представления — диаграмм Юнга. Использование диаграмм Юнга значительно облегчает исследование полей смешанного типа симметрии и представление результатов, поскольку выражения даже для простейших операций, например, взятия производной с учётом последующей проекции на определённый тип симметрии, значительно усложняются в обычной тензорной записи.

Аналогично тому, что скалярные частицы (т.е. имеющие нулевой спин) описываются скалярными полями; фотоны, имеющие спин равный единице, описываются векторными полями (т.е. тензорными полями первого ранга); гравитон, имеющий спин равный двум, описывается симметричным тензором второго ранга, имеющим смысл метрики; частица произвольного спина в многомерном пространстве описыва-

вается некоторым тензорным полем, ранг которого связан со спином, а тензорные индексы имеют, вообще говоря, смешанный тип симметрии. Обычные поля спина s с более общей точки зрения полей смешанного типа симметрии описываются полностью симметричными тензорными полями.

На полевом языке «протяжённость» струн проявляется в том, что их спектр содержит бесконечное число всё более массивных возбуждений, отвечающих полям произвольного спина. Мерой квадрата массы является струнное натяжение $\frac{1}{\alpha'}$. Стоит отметить, что спектр теории струн содержит массивные возбуждения полей всех спинов, включая в себя и всевозможные поля смешанного типа симметрии [70, 71], что также делает актуальным изучение таких полей. Исследования взаимодействий полей произвольного спина должны пролить свет на вопросы теории струн и на её взаимосвязь с теорией поля.

Наибольшую важность представляют теории поля в максимально симметричных пространствах: пространстве Минковского, пространствах де Ситтера и анти-де Ситтера, которые являются решениями уравнений Эйнштейна с нулевой, положительной и отрицательной космологической постоянной соответственно. Пространство (анти)-де Ситтера имеет особую важность для теории высших спинов, а также для теории струн, так как непротиворечивые нелинейные теории высших спинов требуют ненулевой космологической постоянной. Последнее не означает, что теория высших спинов не имеет смысла в пространстве Минковского, а требует, чтобы симметрии полей высших спинов были нарушены до взятия предела нулевой космологической постоянной.

По сравнению с «обычными» симметричными или антисимметричными полями особенность безмассовых полей смешанного типа симметрии в пространстве Минковского состоит в том, что в закон калибровочных преобразований входит не один калибровочный параметр (если считать их по типу симметрии), а некоторое их число, связанное со спином поля.

Изучение теории поля в присутствии космологической постоянной преподнесло ряд сюрпризов:

(1) оказалось, что понятие безмассовости в пространстве (анти)-де Ситтера слегка размыто, поскольку космологическая постоянная сама может играть роль массового параметра, и явление безмассовости должно определяться в терминах калибровочной симметрии, появление которой у уравнений движения приводит к соответствующему уменьшению числа степеней свободы [72–74];

(2) многообразии калибровочных полей значительно расширяется:

(2а) появляются так называемые частично-безмассовые поля [75–88], характеризующиеся тем, что, будучи неприводимыми, имеют число степеней промежуточное между массивными и безмассовыми полями. Явление частичной-безмассовости имеет место и для обычных полей спина s . С полем спина s ассоциировано семейство из $(s - 1)$ частично-безмассовых полей, степени свободы которых интерполируют между массивным и безмассовым полями спина s . Например в $d = 4$ массивный, частично-безмассовый и безмассовый гравитоны имеют 5, 4 и 2 степени свободы, отвечающие поляризациям $\pm 2, \pm 1, 0, \pm 2, \pm 1$ и ± 2 соответственно. С формальной точки зрения безмассовое поле спина s естественно объединяется с частично-безмассовыми полями спина s в одно семейство калибровочных полей спина s .

(26) оказалось [72], что для поля смешанного типа симметрии имеется, вообще говоря, несколько возможных деформаций из пространства Минковского в (анти)-де Ситтер, т.е. в (анти)-де Ситтере существует несколько неэквивалентных безмассовых полей с одним и тем же спином, причём количество таких полей равно количеству калибровочных параметров для безмассового поля данного спина в пространстве Минковского. Суть в том, что появлению некоторой калибровочной симметрии в уравнениях движения для массивного поля какого-либо спина отвечает определённое «критическое» значение параметра массы, выраженное в единицах космологической постоянной Λ . В пространстве Минковского $\Lambda = 0$ и критические значения массы для всех калибровочных симметрий совпадают, однако в пространстве (анти)-де Ситтера, где $\Lambda \neq 0$, это не так, и одновременно можно добиться инвариантности уравнений относительно только одной (но любой) калибровочной симметрии. Это, в частности, приводит к тому, что безмассовые поля смешанного типа симметрии имеют больше степеней свободы в пространстве (анти)-де Ситтера, чем в пространстве Минковского [74].

Следует сказать: что касается полей произвольного спина, представляющих случай общего положения в многомерных пространствах и потому имеющих, вообще говоря, смешанный тип симметрии, то их теория пока находится на начальном этапе развития, хотя соответствующие усилия прилагаются с момента появления интереса к теориям поля в многомерных пространствах [89, 90]. Хотя классификация их и известна, но необходимо сначала построить соответствующее теоретико-полевое описание свободной теории, а затем исследовать вопрос введения взаимодействий. Изучение даже линейной теории в рамках многих подходов оказывается слишком сложной задачей, не говоря уже о построении нелинейной теории.

Наиболее распространённым подходом к описанию полей смешанного типа симметрии до некоторого момента был так называемый *метрический* подход [89, 90], поля в котором представлялись мировыми тензорами, аналогичными метрическому тензору $g_{\mu\nu}$ теории гравитации. Здесь следует выделить подход [91–94], который впоследствии привёл к появлению *реперного (тетрадного)* подхода к полям смешанного типа симметрии. Также представляет интерес метрический подход [59, 62, 95–97]. Поля в данном подходе представляются мировыми тензорами, на которые не наложено никаких следовых условий, т.е. алгебраических условий, вовлекающих фоновую метрику. Достоинством данного подхода является тесная связь с пределом нулевого натяжения теории струн [59–63], который прямо приводит к безмассовым тензорным полям без следовых условий. Однако в рамках данного подхода пока получены только свободные лагранжианы [98–101].

Среди других подходов к описанию полей высших спинов следует отметить *БРСТ* подход, последовательно развиваемый в работах [102–120]. Достоинство БРСТ подхода состоит в том, что он тесно связан с теорией струн. Касательно теории со взаимодействиями пока в рамках данного подхода известно немного [121–124].

В рамках подхода светового конуса Р.Мецаевым получена классификация кубических вершин полей смешанного типа симметрии [35, 47, 125, 125], что является первым шагом к теории взаимодействующих полей и даёт основания считать, что таковые полные нелинейные теории действительно существуют [126].

0.3 Развёрнутая формулировка полевых уравнений

Основным методом, используемым в настоящей диссертации, является развёрнутая формулировка полевых уравнений [41–43].

Преимущество метода разворачивания состоит в том, что он позволяет контролировать калибровочную инвариантность и физические степени свободы крайне простым способом, что даёт возможность искать нелинейные теории, т.е. теории со взаимодействующими полями, как деформации линейной развёрнутой системы уравнений, при этом теория автоматически оказывается застрахованной от таких неприятностей как, например, изменение числа степеней свободы при нелинейных деформациях. В основе развёрнутого подхода лежит глубокая математическая структура — свободные дифференциальные алгебры [127–130], частным случаем которых являются обычные алгебры Ли, используемые в теориях типа Янга-Миллса. Также использование языка дифференциальных форм делает подход координатно-независимым, что особенно полезно при работе с теориями, включающими в себя гравитацию. В частности, все рассуждения в диссертации проходят в произвольной системе координат.

Немаловажно, что реперный (или тетрадный) подход к гравитации оказывается автоматически встроен в развёрнутый формализм. А именно: первые два поля, входящие в набор полей для развёрнутого описания теории безмассового поля спина 2, представляют собой тетраду и спин-связность. Аналогично, поле Янга-Миллса, понимаемое как один-форма, является первым полем из развёрнутой формулировки спина 1.

Ещё следует отметить и тот факт, что вычисления в развёрнутом или реперном подходах заметно проще аналогичных вычислений в рамках метрического формализма, поскольку поля являются дифференциальными формами со значениями в неприводимых представлениях, и поэтому существует гораздо меньше способов написать анзацы для, например, лагранжиана.

Разные сопутствующие вопросы, например, о сохраняющихся токах или лагранжианах [131], допускают чёткую постановку в рамках развёрнутого подхода — для нахождения сохраняющихся токов необходимо вычислить когомологии некоторого оператора, определяющего развёрнутую систему уравнений.

0.4 Цель и содержание поставленных задач

Темой настоящей диссертации является построение развёрнутой формулировки для полей произвольного спина, т.е., вообще говоря, смешанного типа симметрии, в пространствах Минковского и (анти)-де Ситтера произвольной размерности. Построение теории полей произвольного типа симметрии производится именно в рамках развёрнутого подхода, поскольку он оказался наиболее плодотворным в задаче о нелинейной теории полей спина s .

Случай полностью симметричных безмассовых полей (полей спина s) был всесторонне разобран в литературе, как в частных размерностях [43, 45, 132–146], допускающих спинорные реализации, так и в произвольной размерности простран-

ства [46, 147–149].

В случае полей смешанного типа симметрии в пространстве Минковского результаты по развёрнутой формулировке в литературе отсутствовали. А в случае полей смешанного типа симметрии в пространстве (анти)-де Ситтера имелись следующие результаты: в [150] был разобран в рамках реперного формализма случай безмассовых полей, спин которых определялся двустолбцовой диаграммой Юнга; в [151] были разобраны поля в AdS_5 , при этом существенно использовалась спинорная реализация генераторов алгебры симметрии AdS_5 ; наиболее общий результат [152], где обсуждалась реперная формулировка, относился к безмассовым полям первого семейства (напомним, что в $(A)dS_d$ с каждым спином ассоциируется несколько семейств полей).

Наиболее важными с точки зрения развёрнутой формулировки полей смешанного типа симметрии были работы Ю.М.Зиновьева [91–94], в которых, несмотря на метрический формализм, уже можно было узнать некоторые структуры, характерные для реперного подхода. Дальнейшее развитие, уже в рамках реперного подхода, было осуществлено в работах [85, 88, 153].

Следует отметить, что для случая симметричных полей деформация из Минковского в (анти)-де Ситтер и, наоборот, взятие плоского предела полей в (анти)-де Ситтере, были гладкими операциями. Развёрнутые формулировки для симметричных полей в пространствах Минковского и (анти)-де Ситтера отличались лишь слагаемыми пропорциональными космологической постоянной, в частности, спектр полей для обеих формулировок совпадает. Такой простой картины не следует ожидать для полей смешанного типа симметрии ввиду уже упомянутой нетривиальности деформации последних из плоского пространства в (анти)-де Ситтер [74]. Действительно, как будет показано, спектр полей кардинально различается.

Что касается частично-безмассовых полей, то в рамках развёрнутого подхода первые результаты были получены в работах, вошедших в данную диссертацию.

0.5 Структура диссертации

Диссертация состоит из семи глав и приложения:

в Главе 1 рассматривается проблема классификации релятивистских полей в пространствах Минковского и (анти)-де Ситтера. Основное утверждение касается полной классификации полей в пространстве (анти)-де Ситтера;

в Главе 2 даётся определение развёрнутого формализма и находятся сведения, необходимые для понимания последующих глав;

в Главе 3 строится развёрнутая формулировка для безмассовых полей произвольного спина в пространстве Минковского;

в Главе 4 на основе результатов предыдущей главы выводится реперная формулировка для безмассовых полей произвольного спина в пространстве Минковского, строится лагранжиан;

в Главе 5 рассматривается достаточно простой и показательный случай обобщённых полей Янга-Миллса, с помощью которого можно построить простое геометрическое описание для частично-безмассовых полей спина s ;

в Главе 6 всесторонне изучается общий случай обобщённых полей Янга-Миллса:

основные технические результаты, позволяющие связать обобщённые поля Янга-Миллса с калибровочными полями в рамках метрического формализма, заключаются в нахождении σ -когомологий и вычислении массовоподобного слагаемого в уравнениях. В этой же главе находится заключение, содержащее соображения относительно дальнейших исследований, направленных на построение нелинейной теории полей произвольного спина.

В приложениях собраны различные обозначения, например, мультииндексные обозначения, используемые в данном тексте, а также для удобства чтения в Приложении С собраны все необходимые факты о диаграммах Юнга, их отношении к классификации неприводимых (спин)-тензоров и некоторые другие утверждения из теории представлений.

Основные результаты диссертации перечислены в Заключении, после которого находится список публикаций автора.

Ссылки на работы автора заключены в фигурные скобки, например, {2}, тогда как ссылки на работы других авторов заключены в квадратные скобки, например, [56], и относятся к списку литературы в конце диссертации.

Глава 1

Релятивистские поля и частицы в пространстве Минковского и (анти)-де Ситтера

1.1 Классификация частиц

1.1.1 Классификация частиц в пространстве Минковского

Пространство Минковского \mathcal{M}_d определяется как однородное пространство $\mathfrak{G} = \mathcal{ISO}(d-1, 1)/\mathfrak{H} = SO(d-1, 1)$ группы Пуанкаре $\mathcal{ISO}(d-1, 1)$ по группе Лоренца $SO(d-1, 1)$.

Согласно знаменитой работе Вигнера [68], совмещение постулатов специальной теории относительности с принципами квантовой механики требует, чтобы на гильбертовом пространстве состояний реализовывалось унитарное представление группы симметрии пространства-времени, т.е. группы Пуанкаре $\mathcal{ISO}(d-1, 1)$. В отсутствие взаимодействий достаточно ограничиться неприводимыми представлениями, которые и принято называть элементарными частицами.

Нам будет удобно говорить о представлениях соответствующих алгебр, а не групп. В стандартном базисе генераторов трансляций P_a и Лоренцевых вращений L_{ab} коммутационные соотношения алгебры Пуанкаре $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$ имеют вид

$$[P_a, P_b] = 0, \tag{1.1}$$

$$[P_a, L_{bc}] = \eta_{ac}P_b - \eta_{ab}P_c, \tag{1.2}$$

$$[L_{ab}, L_{cd}] = \eta_{ad}L_{bc} - \eta_{bd}L_{ac} - \eta_{ac}L_{bd} + \eta_{bc}L_{ad} \tag{1.3}$$

Поскольку подалгебра Лоренца алгебры Пуанкаре некомпактна, из требования унитарности следует, что представления, ассоциируемые с элементарными частицами, бесконечномерны.

Неприводимые унитарные представления группы Пуанкаре $\mathcal{ISO}(3, 1)$ четырёхмерного пространства Минковского были построены [68]. Представления строятся методом индуцирования, который может быть прямо обобщён на случай пространства Минковского произвольной размерности d , группа движений которого $\mathcal{ISO}(d-1, 1)$ (соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$).

Алгебра трансляций P_a — абелева, поэтому все её неприводимые унитарные представления одномерны. Зафиксировав значение оператора казимира $P_c P^c = m^2$, который имеет интерпретацию массы частицы, с учётом Лоренц-инвариантности теории, можно ограничиться рассмотрением степеней свободы частицы для какого-либо фиксированного значения P_a , после чего применение преобразований Лоренца позволяет получить вид состояния частицы для любого другого значения P_a , такого что $P_c P^c = m^2$. Требование отсутствия тахионов влечёт $m^2 \geq 0$. После фиксации P_a , степени свободы связаны с теми остаточными преобразованиями из алгебры Пуанкаре, которые оставляют P_a на месте. Такие преобразования образуют алгебру Ли, называемую малой алгеброй Вигнера. Для случая $m^2 > 0$ массивной частицы малая алгебра есть $\mathfrak{so}(d-1)$, а для случая $m^2 = 0$ безмассовой частицы малая алгебра есть $\mathfrak{iso}(d-2)$.

Таким образом, спиновые степени свободы массивной частицы классифицируются согласно неприводимым унитарным представлениям малой алгебры Вигнера $\mathfrak{so}(d-1)$, которая есть алгебра вращений Евклидова пространства. Неприводимые конечномерные унитарные представления $\mathfrak{so}(d-1)$ суть неприводимые тензоры или спин-тензоры.

Требование конечности числа внутренних степеней свободы частицы в случае безмассовых частиц оказывается ограничительным. Малая алгебра для них есть $\mathfrak{iso}(d-2)$, т.е. алгебра движений Евклидова пространства, которая ввиду некомпактности не имеет конечномерных унитарных представлений, если трансляции $\mathfrak{iso}(d-2)$ реализуются нетривиальным образом. Поэтому эффективно $\mathfrak{iso}(d-2)$ сводится к $\mathfrak{so}(d-2)$, т.е. тоже ортогональной алгебре, но размерности на единицу меньше чем для массивных частиц.

Получаем, что представления $\mathcal{ISO}(d-1, 1)$ характеризуются двумя типами параметров: массой m^2 и спином \mathbf{S} , где спин \mathbf{S} определяет неприводимое представление $\mathfrak{so}(d-1)$, если $m^2 > 0$, и неприводимое представление $\mathfrak{so}(d-2)$, если $m^2 = 0$. В случае четырёхмерного пространства Минковского \mathbf{S} задаётся одним (полу)целым неотрицательным числом, спином. Если $d > 4$, то спинов может быть много, что отвечает полям смешанного типа симметрии.

Поскольку спиновые степени свободы характеризуются неприводимыми конечномерными представлениями ортогональных алгебр, остановимся кратко на их классификации. Отсылая за подробными разъяснениями к Приложению С, лишь отметим, что неприводимые представления алгебр классической серии, в частности алгебры $\mathfrak{so}(n)$, удобно классифицировать разбиениями целых чисел вида $s = s_1 + \dots + s_n$ на суммы невозрастающих положительных чисел s_i , $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n > 0$. Такие разбиения удобно обозначать графически диаграммами Юнга, которые состоят из выровненных по правому краю рядов клеток, i -ый ряд содержит s_i клеток. В тексте диаграммы Юнга обозначаются жирным шрифтом, например, \mathbf{X} , \mathbf{S} , а определяются выражениями вида $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$ (\mathbb{Y} от Young). Диаграмма Юнга характеризует тип симметрии неприводимого (спин)-тензора относительно перестановок индексов. Так, например, симметричным тензорам ранга s отвечает диаграмма Юнга из одной строки длины s , $\mathbb{Y}(s)$, а полностью антисимметричным тензорам ранга p отвечает диаграмма Юнга из одного столбца высоты p , $\mathbb{Y}(1, \dots, 1)$. Все остальные типы диаграмм отвечают (спин)-тензорам так называемого *смешанного типа сим-*

метрии. В общем случае ранг тензора, определяемого некоторой диаграммой Юнга, равен количеству клеток в ней. Для ортогональной алгебры $\mathfrak{so}(n)$ количество строк (чисел s_i в разбиении ранга s) в диаграмме должно не превосходить¹ $[n/2]$. Это легко понять, так как поведение некоторого объекта при вращениях задаётся его поведением относительно независимых вращений, которыми могут быть выбраны вращения в плоскостях, натянутых на пары $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_4\}$ и т.д. ортогональных базисных векторов e_k , $k = 1, \dots, n$.

В случае четырёхмерного пространства Минковского, учитывая, что малая алгебра Вигнера для массивных полей есть $\mathfrak{so}(3)$, заключаем, что спиновые степени свободы определяются однорядной диаграммой Юнга, т.е. одним числом. Для безмассовых полей малая алгебра $\mathfrak{so}(2)$ не является простой, и указанная выше классификация не полна в том смысле, что существуют не только однозначные (тензорные) и двузначные (спинорные) представления $\mathfrak{so}(2)$, но и так называемые анионные представления. Последние не имеют отношения к классификации частиц в 4-х измерениях, поэтому формально результат об определении спина одним (полу)целым числом остаётся справедливым и для безмассовых частиц. В общем случае $d > 4$ спин задаётся некоторой диаграммой Юнга. Таким образом спин в пространстве с $d > 4$ есть не одно число, а набор чисел (спинов).

Классификация неприводимых представлений ортогональных алгебр важна не только для определения спиновых степеней свободы, но также будет активно использоваться при полевом описании, поскольку поля, спин которых есть некоторый тензор малой алгебры Вигнера, будут описываться потенциалами, которые также являются тензорами, но уже алгебры Лоренца или алгебры (анти)-де Ситтера. Потенциал поля, как тензор, характеризуется своей диаграммой Юнга, и важно разделять понятия спин как характеристику бесконечномерного унитарного представления алгебры симметрий пространства-времени и спин как характеристику конечномерного неунитарного представления, определяющего тензорный тип потенциала поля.

Также существуют представления с так называемым непрерывным спином [68, 154]. Они соответствуют тем «безмассовым» полям $P_c P^c = 0$, для которых трансляции малой алгебры Вигнера $\mathfrak{iso}(d-2)$ представлены нетривиальным образом. Поэтому частицы с непрерывным спином имеют бесконечное число степеней свободы и, как правило, исключаются из рассмотрения. Интересный результат был получен в [154], где было показано, что представления с непрерывным спином могут пониматься как предел бесконечно большого спина безмассовых полей.

1.1.2 Классификация частиц в пространстве анти-де Ситтера

Пространство анти-де Ситтера AdS_d определяется как однородное пространство $\mathfrak{G} = SO(d-1, 2)/\mathfrak{H} = SO(d-1, 1)$. Алгеброй Ли его симметрий является алгебра $\mathfrak{so}(d-1, 2)$. В стандартном базисе коммутационные соотношения для $\mathfrak{so}(d-1, 2)$ -вращений M_{AB}

¹Диаграммы с большим числом строк либо определяют представления эквивалентные диаграммам с числом строк меньше $[n/2]$, либо вообще отвечают тензорам тождественно равным нулю, см. Приложение С.

имеют вид

$$[M_{AB}, M_{CD}] = \eta_{AD}M_{BC} - \eta_{BD}M_{AC} - \eta_{AC}M_{BD} + \eta_{BC}M_{AD}. \quad (1.4)$$

Последние можно переписать, выделив явно генераторы Лоренцевых вращений $L_{ab} = M_{ab}$ и трансляций² $P_a = \lambda M_{a\bullet}$, где λ есть обратный радиус пространства,

$$[P_a, P_b] = \pm \lambda^2 L_{ab}, \quad (1.5)$$

$$[P_a, L_{bc}] = \eta_{ac}P_b - \eta_{ab}P_c, \quad (1.6)$$

$$[L_{ab}, L_{cd}] = \eta_{ad}L_{bc} - \eta_{bd}L_{ac} - \eta_{ac}L_{bd} + \eta_{bc}L_{ad}. \quad (1.7)$$

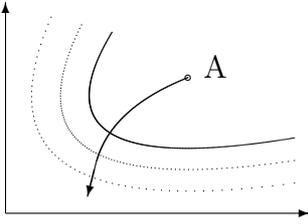
Коммутационные соотношения для генераторов алгебры симметрий пространства де Ситтера имеют аналогичный вид, (отрицательный) положительный знак в (1.5) отвечает случаю (анти)-де Ситтера.

Дискретные серии представлений

Как было показано Хариш-Чандрой в [155], некомпактная простая группа Ли \mathfrak{G} имеет представления старшего веса (ограниченной энергии), если фактор пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ по максимальной компактной подгруппе \mathfrak{K} является симметрическим эрмитовым пространством, что верно для широкого класса некомпактных вещественных форм классических групп Ли и некоторых некомпактных форм групп Ли исключительной серии³. В частности, это верно для вещественной формы $SO(d-1, 2)$ группы $SO(d+1, \mathbb{C})$. Алгебра Ли \mathfrak{g} таких некомпактных групп обладает три-градуированным разложением (структурой Йордана) по отношению к максимальной компактной подалгебре \mathfrak{g}_0

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+, \quad [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\pm] \subset \mathfrak{g}_\pm, \quad [\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-] \subset \mathfrak{g}_0, \quad [\mathfrak{g}_\pm, \mathfrak{g}_\pm] = 0. \quad (1.8)$$

\mathfrak{g} -модуль $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}(\Gamma)$ свободно порождается генераторами \mathfrak{g}_+ из вакуума $|\Gamma\rangle$, несущего неприводимое унитарное представление Γ максимальной компактной подалгебры \mathfrak{g}_0 , $\mathfrak{g}_0|\Gamma\rangle = \Gamma(\mathfrak{g}_0)|\Gamma\rangle$. Вакуум аннигилируется генераторами \mathfrak{g}_- , т.е. $\mathfrak{g}_-|\Gamma\rangle = 0$. Таким образом $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}(\Gamma) = \text{span}(\mathfrak{g}_+\mathfrak{g}_+\dots\mathfrak{g}_+|\Gamma\rangle)$. В случае алгебры анти-де Ситтера, \mathfrak{g}_0 содержит прямое слагаемое $\mathfrak{so}(2)$, следовательно как минимум один из генераторов имеет непрерывный спектр и поэтому называется энергией E . Обозначим собственное значение генератора энергии на вакууме через E_0 . Отложим на осях значения генератора энергии и других генераторов, характеризующих представление Γ .



Предположим, что в точке A \mathfrak{g} -модуль $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}(\Gamma)$ унитарен. При достаточном уменьшении значения энергии E_0 модуль перестанет быть унитарным. Поэтому существует граница области унитарности, за пределами которой имеются состояния с отрицательной нормой, а на ней самой должны быть некоторые состояния с нулевой нормой. Состояния с нулевой нормой

²Символ \bullet обозначает лишнее значения индексов A, B, \dots алгебры анти-де Ситтера по сравнению с индексами a, b, \dots алгебры Лоренца, $A, B = 0, \dots, d$; $a, b = 0, \dots, d-1$; $\bullet \equiv d$.

³Осцилляторные представления различных некомпактных алгебр широко изучались в работах Гюнайдина [156], [157].

ортогональны всем остальным состояниям с положительной нормой (иначе можно было бы построить состояние с отрицательной нормой, что противоречит определению границы области унитарности), следовательно они образуют подмодуль. Последнее означает, что в $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}(\Gamma)$ имеется сингулярный вектор $\mathfrak{g}_- v = 0$, где $v \in \mathcal{D}_{\mathfrak{g}}(\Gamma)$, т.е. v сам удовлетворяет условиям вакуумности и подмодуль $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}(v) \subset \mathcal{D}_{\mathfrak{g}}(\Gamma)$ строится стандартным образом $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}(v) = \text{span}(\mathfrak{g}_+ \mathfrak{g}_+ \dots \mathfrak{g}_+ v)$. Неприводимый \mathfrak{g} -модуль может быть получен как фактор $\mathcal{H}_{\mathfrak{g}}(\Gamma) = \mathcal{D}_{\mathfrak{g}}(\Gamma)/\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}(v)$, при условии что отсутствуют сабсингулярные векторы, т.е. сингулярные векторы фактормодуля $\mathcal{H}_{\mathfrak{g}}(\Gamma)$, как это будет в нашем случае. Появление таких сингулярных векторов происходит при вполне определённых соотношениях на веса, определяющие представление Γ . Если продолжать движение из области унитарности, то могут появляться другие сингулярные векторы, соответствующие фактормодули будут, однако, неунитарными.

С полевой точки зрения появление сингулярных подмодулей отвечает появлению калибровочной инвариантности у полевых уравнений, на решениях которых реализуется данное представление [74].

В случае $\mathfrak{so}(d-1, 2)$, представленной эрмитовыми генераторами T_{AB} , $(T_{AB})^\dagger = T_{AB}$ с коммутационными соотношениями

$$[T_{AB}, T_{CD}] = i(T_{AD}\eta_{BC} - T_{BD}\eta_{AC} - T_{AC}\eta_{BD} + T_{BC}\eta_{AD}), \quad (1.9)$$

максимальная компактная подалгебра есть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(d-1) \oplus \mathfrak{so}(2)$, и порождается генераторами $E = T_{0d}$ и $L^{ab} = -iT^{ab}$ подалгебр $\mathfrak{so}(2)$ и $\mathfrak{so}(d-1)$ соответственно. Повышающие \mathfrak{g}_+ и понижающие \mathfrak{g}_- генераторы соответствуют $T^{\pm a} = \frac{1}{2}(M_0^a \pm iM_d^a)$. Коммутационные соотношения и свойства эрмитовости в новом базисе имеют вид [74]

$$\begin{aligned} [E, T^{\pm a}] &= \pm T^{\pm a}, \\ [L^{ab}, T^{\pm c}] &= \delta^{bc}T^{\pm a} - \delta^{ac}T^{\pm b}, \\ [T^{-a}, T^{+b}] &= \frac{1}{2}(E\delta^{ab} - L^{ab}), \\ [L^{ab}, L^{cd}] &= L^{ad}\delta^{bc} - L^{bd}\delta^{ac} - L^{ac}\delta^{bd} + L^{bc}\delta^{ad}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$E^\dagger = E, \quad (T^{\pm a})^\dagger = T^{\mp a}, \quad (L^{ab})^\dagger = -L^{ab}. \quad (1.11)$$

Пусть $\mathcal{D}(E_0; \mathbf{S})$ — $\mathfrak{so}(d-1, 2)$ -модуль, свободно порождаемый T^{+a} из вакуума $|E_0, \mathbf{S}\rangle$, $T^{-a}|E_0, \mathbf{S}\rangle = 0$, который является неприводимым представлением $\mathfrak{so}(d-1) \oplus \mathfrak{so}(2)$. Поэтому вакуум есть собственный вектор оператора энергии

$$E|E_0, \mathbf{S}\rangle = E_0|E_0, \mathbf{S}\rangle \quad (1.12)$$

с собственным значением, обозначенным E_0 . Также вакуум несёт неприводимое конечномерное представление \mathbf{S} алгебры $\mathfrak{so}(d-1)$, т.е. является неприводимым тензором или спин-тензором алгебры $\mathfrak{so}(d-1)$. Будем считать, что представление \mathbf{S} алгебры $\mathfrak{so}(d-1)$ задано некоторой диаграммой Юнга, обозначенной тем же символом \mathbf{S} . Последнее означает, что $|E_0, \mathbf{S}\rangle$ преобразуется как неприводимый $\mathfrak{so}(d-1)$ -тензор в

представлении \mathbf{S} под действием L^{ab} . Очевидно, что $\mathfrak{so}(d-1)$, как алгебра, представления которой характеризуют внутренние степени свободы частиц, является аналогом малой алгебры Вигнера в случае пространства анти-де Ситтера.

Вычислив норму $T^{+a}|E_0, \mathbf{S}\rangle$, которая не зависит от \mathbf{S} ,

$$\langle E_0, \mathbf{S} | T_{-a} | T^{+a} | E_0, \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} E_0, \quad (1.13)$$

мы видим, что для унитарности представления необходимо как минимум чтобы E_0 было неотрицательно.

Общая классификация сингулярных векторов, которые имеют теоретико-полевою интерпретацию как появление калибровочной инвариантности у уравнений движения, рассматриваемых в разделе 1.2, даётся следующей теоремой [158]⁴

Теорема. Пусть $\mathbf{S}_0 \equiv \mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$ — диаграмма Юнга, определяющая неприводимое представление $\mathfrak{so}(d-1)$. Для любого $q = 1, \dots, n$ при условии $s_q - s_{q+1} > 0$ (удобно определить $s_{n+1} = 0$) и любого t из диапазона $1, \dots, s_q - s_{q+1}$ существует значение вакуумной энергии E_0

$$E_0(q, t) = d + s_q - t - q - 1, \quad (1.14)$$

такое, что $\mathfrak{so}(d-1, 2)$ -модуль $\mathcal{D}(E_0; \mathbf{S}_0)$ приводим. Неприводимое представление $\mathcal{H}(E_0; \mathbf{S}_0)$, которое будет называться безмассовой $t = 1$ или частично-безмассовой $t > 1$ частицей, определяется следующей точной последовательностью

$$0 \rightarrow \mathcal{D}(E_q; \mathbf{S}_q) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{D}(E_1; \mathbf{S}_1) \longrightarrow \mathcal{D}(E_0; \mathbf{S}_0) \longrightarrow \mathcal{H}(E_0; \mathbf{S}_0) \rightarrow 0, \quad (1.15)$$

где веса $\mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(d-1)$ определяются как

$$E_i = \begin{cases} d + s_q - t - q - 1, & i = 0, \\ d + s_{q-i+1} - (q - i + 1) - 1, & i = 1, \dots, q, \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{S}_i = \begin{cases} \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n) \equiv \mathbf{S}, & i = 0, \\ \mathbb{Y}(s_1, s_2, \dots, s_{q-1}, s_q - t, s_{q+1}, \dots, s_n), & i = 1, \\ \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_{q-i}, s_{q-i+2} - 1, \dots, s_q - 1, s_q - t, s_{q+1}, \dots, s_n), & i = 2, \dots, q-1, \\ \mathbb{Y}(s_2 - 1, s_3 - 1, \dots, s_q - 1, s_q - t, s_{q+1}, \dots, s_n), & i = q. \end{cases} \quad (1.17)$$

Для доказательства теоремы мы воспользуемся вспомогательным утверждением

⁴Впервые поля произвольного типа симметрии в пространстве анти-де Ситтера рассматривались в [72], позднее в [74] было указано общее соответствие между сингулярными векторами в модулях $\mathcal{D}(E_0; \mathbf{S})$ и появлением калибровочной инвариантности у уравнений движения. В [158], посвященной конформным полям в пространстве Минковского (конформная алгебра совпадает с алгеброй анти-де Ситтера), основываясь на результатах [159, 160], была дана полная классификация сингулярных векторов. Ниже, получая полную классификацию полей в пространстве анти-де Ситтера, мы объединяем результаты [158] с [74]. Ввиду того, что все необходимые ингредиенты уже присутствовали в литературе, результат о классификации частиц в пространстве анти-де Ситтера не рассматривается как самостоятельный результат, требующий помещения в одну из основных глав диссертации.

Лемма. В условиях теоремы, при значении энергии (1.14) в модуле $\mathcal{D}(E_0; \mathbf{S}_0)$ возникает сингулярный вектор вида⁵

$$v = \overbrace{T_{+m} \dots T_{+m}}^t |E_0, \mathbf{S}_0\rangle^{a(s_1), \dots, b(s_q-t)m(t), \dots, u(s_n)} + \dots, \quad (1.18)$$

где многоточие отвечает слагаемым с некоторыми перестановками индексов, обеспечивающих проекцию на симметрию \mathbf{S}_1 , и у вакуумного вектора $|E_0, \mathbf{S}_0\rangle$ мы явно выписали индексы алгебры $\mathfrak{so}(d-1)$, $|E_0, \mathbf{S}_0\rangle^{a(s_1), \dots, u(s_n)}$. Следовательно, у $\mathcal{D}(E_0; \mathbf{S}_0)$ имеется подмодуль $\mathcal{D}(E_1; \mathbf{S}_1)$.

Доказательство. Условие того, что вектор (1.18) является сингулярным, имеет вид $T^{-w}v = 0$ или

$$T^{-w} \overbrace{T_{+m} \dots T_{+m}}^t |E_0, \mathbf{S}\rangle^{a(s_1), \dots, b(s_q-t)m(t), \dots, u(s_n)} + \dots = 0. \quad (1.19)$$

Воспользуемся следствием коммутационных соотношений в алгебре (1.10)

$$T^{-a} \overbrace{T^{+b} \dots T^{+b}}^k |E_0, \mathbf{X}\rangle_{\dots b(k) \dots} = k \left\{ (E_0 + k - 1) \overbrace{T^{+b} \dots T^{+b}}^{k-1} \delta^{ba} + \right. \\ \left. - \frac{k-1}{2} \delta^{bb} \overbrace{T^{+b} \dots T^{+b}}^{k-2} T^{+a} - \overbrace{T^{+b} \dots T^{+b}}^{k-1} L^{ab} \right\} |E_0, \mathbf{X}\rangle_{\dots b(k) \dots},$$

где второе слагаемое не будет играть роли, поскольку вакуум несёт неприводимое представление $\mathfrak{so}(d-1)$. Также заметим, что слагаемые, обозначенные "... " в (1.18), не дают вклада в первое слагаемое, и поэтому все вычисления можно проводить только с ним (что становится очевидным, если свернуть все висящие индексы с некоторым неприводимым тензором с симметрией \mathbf{S}_1), и, поскольку исходное выражение обладает определённой симметрией, то и конечное тоже будет ей обладать, т.е. слагаемые "... " автоматически подстраиваются правильным образом (если все индексы свернуть, то их просто не будет). Простые вычисления приводят к

$$(E_0 + t - 1 - (d + s - q - 2)) T_{+w} \overbrace{T_{+m} \dots T_{+m}}^{t-1} |E_0, \mathbf{S}\rangle^{a(s_1), \dots, b(s_q-t)m(t-1)w, \dots, u(s_n)} + \dots = 0,$$

откуда сразу следует утверждение леммы. ■

Доказательство теоремы после этого проводится последовательным применением данной леммы, т.е., найдя искомый сингулярный подмодуль $\mathcal{D}(E_1; \mathbf{S}_1)$, обнаруживаем, что для него самого удовлетворяются условия существования подмодуля, если энергию и спин выбрать равными E_2 и \mathbf{S}_2 , т.е. имеется подмодуль $\mathcal{D}(E_2; \mathbf{S}_2)$ и так

⁵Группа индексов, по которым некоторый тензор симметричен обозначается одной буквой, указывая количество симметричных индексов в круглых скобках, см. Приложение А. Запятой отделяются группы индексов, по которым предполагаются юнговские условия, см. Приложение С.2.

далее до $\mathcal{D}(E_q; \mathbf{S}_q)$, для которого условия существования подмодуля не удовлетворяются ни для какого вектора, что завершает построение резольвенты (1.15). ■

Таким образом, неприводимые бесконечномерные представления алгебры (анти)-де Ситтера, которые, как мы потом увидим, имеют теоретико-полевую реализацию, классифицируются тройками (\mathbf{S}, q, t) , где параметр q определяет строку в диаграмме Юнга \mathbf{S} , характеризующей спин поля, от которой можно отрезать t клеток (не менее чем одну). В полевых уравнениях \mathbf{S}_0 , \mathbf{S}_1 и $\mathbf{S}_{i>1}$ характеризуют симметрии полевого потенциала, калибровочного параметра и приводимых калибровочных параметров, соответственно, а параметр t будет равен количеству производных в законе калибровочных преобразований. Данная теорема обобщает все известные в литературе результаты по полям $(\mathbf{S}, q, 1)$ в [72] и по полям $(\mathbb{Y}(s), 1, t)$ в [77, 79, 83]. Заметим, что сам метод, явно связывающий калибровочные поля с появлением сингулярных векторов, был предложен в [74], где был проверен для полей $(\mathbb{Y}(s_1, s_2), q, 1)$.

Замечание. Фермионные поля рассматриваются аналогично, при этом диаграмме \mathbf{S} отвечает неприводимый спин-тензор с одним спинорным индексом, тензорные индексы которого имеют симметрию \mathbf{S} . При этом теорема остаётся верна, если все представления \mathbf{S}_i заменить на соответствующие спинорные представления, а значения энергии E_i заменить на $E_i - 1/2$. Фермионные поля смешанного типа симметрии, принадлежащие к серии $(\mathbf{S}, q, t = 1)$ впервые были рассмотрены в [73].

В отличие от пространства Минковского, в пространстве анти-де Ситтера для калибровочного поля некоторого спина количество подмодулей (калибровочных симметрий) на первом уровне всегда равно 1. Таким образом, даже те поля, которые называются безмассовыми, поскольку закон калибровочных преобразований содержит одну производную, на самом деле представляются ближе к массивным, так как только одна из калибровочных симметрий безмассового поля в пространстве Минковского допускает деформацию в анти-де Ситтер.

Отсутствие частично-безмассовых полей в плоском пространстве объясняется тем, что закон калибровочных преобразований, содержащий старшие производные, неминуемо приводит к приводимым представлениям. Действительно, имея теорию поля ϕ с законом калибровочных преобразований $\delta\phi = (\partial)^k\chi$, содержащим производные порядка k , её можно было бы представить как $\delta\phi = \partial\xi$ с $\delta\xi = (\partial)^{k-1}\chi$, где ξ есть стандартная симметрия первого порядка по производным. При этом важно, что производные коммутируют, в частности производные различных порядков не смешиваются друг с другом. Поскольку в пространстве анти-де Ситтера ковариантные производные не коммутируют, приведённое рассуждение не применимо.

Классификация калибровочных полей. Суммируя приведённые выше рассуждения получаем: в пространстве анти-де Ситтера со спином \mathbf{S} ассоциируется N семейств калибровочных полей, где N — количество строк в \mathbf{S} , от которых может быть отрезана хотя бы одна клетка, т.е. N равно количеству калибровочных симметрий для безмассового поля спина \mathbf{S} в пространстве Минковского (см. ниже). Первое поле каждого семейства называется безмассовым ($t = 1$), остальные поля называются частично-безмассовыми ($t > 1$).

По мере увеличения q и увеличения t при данном q , наименьшая энергия E_0 в представлении уменьшается. Как показано в [72], из всех безмассовых полей толь-

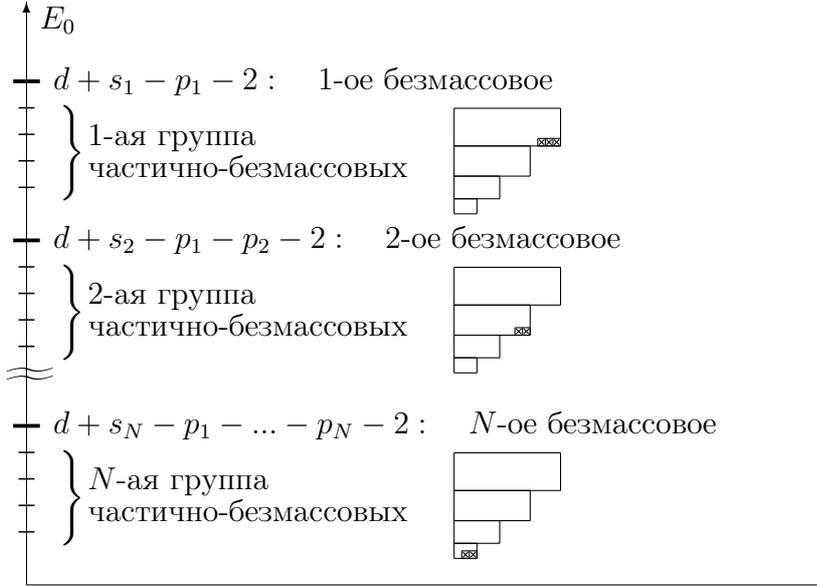


Рис. 1.1: Показано взаимное расположение по энергии калибровочных полей (\mathbf{S}, q, t) при фиксированном спине \mathbf{S} , который удобно записывать в блочных обозначениях, см. Приложение С.1, $\mathbf{S} = \mathbb{Y}\{(s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N)\}$, т.е. разбивая диаграмму на прямоугольные блоки. Количество семейств полей со спином \mathbf{S} равно числу блоков в диаграмме. Поле с наивысшей энергией имеет $q = 1, t = 1$. Далее энергия убывает при увеличении t для поля с $q = 1$ до поля с самой большой глубиной частичной-безмассовости. Ещё ниже находится безмассовое поле с $q = 2, t = 1$ и так далее. На рисунке перечеркнутые клетки соответствуют тем клеткам, которые необходимо удалить, чтобы из спиновой диаграммы \mathbf{S} получить диаграмму \mathbf{S}_1 , определяющую тип симметрии калибровочного параметра.

ко имеющее $q = 1$ является унитарным в анти-де Ситтере. Частично-безмассовые поля неунитарны в пространстве анти-де Ситтера, но унитарны в пространстве де Ситтера.

1.1.3 Классификация частиц в пространстве де Ситтера

Теория представлений алгебры $\mathfrak{so}(d, 1)$ движений пространства де Ситтера dS_d , определяющегося как однородное пространство $\mathfrak{G} = SO(d, 1)/\mathfrak{H} = SO(d - 1, 1)$, сильно отличается от теории представлений $\mathfrak{so}(d - 1, 2)$. В частности, у алгебры $\mathfrak{so}(d, 1)$ не существует унитарных представлений старшего веса или ограниченной энергии, что приводит к многочисленным проблемам при попытках сформулировать теорию поля в пространстве де Ситтера, например, трудности в определении in-out состояний. Некоторый смысл понятию наименьшей энергии всё таки может быть придан [77, 79]. При этом формальные значения E_0 , соответствующие дискретным сериям представлений, имеют тот же вид (1.14). Мы не будем подробно освещать это место, так как с точки зрения полевых уравнений переход от пространства анти-де Ситтера к пространству де Ситтера легко осуществляется заменой знака космологической постоянной λ^2 .

1.2 Полевые уравнения

Итак, мы имеем общую классификацию элементарных частиц в пространстве-времени Минковского и (анти)-де Ситтера. Следующий вопрос, поднятый Баргманном и Вигнером в [161] и Гельфандом и Ягломом в [162] для случая четырёхмерного пространства Минковского, заключается в построении явно релятивистки ковариантных уравнений для некоторого тензорного поля $\phi^{abc\dots}(x)$, на положительно-частотных решениях которых реализовывалось бы соответствующее неприводимое представление группы движений пространства-времени.

Оказывается, для данных (m^2, \mathbf{S}) поставленный вопрос может быть решён бесконечным числом способов, в том смысле, что есть счётный произвол в выборе представления алгебры Лоренца, в котором принимает значение поле $\phi^{abc\dots}(x)$, даже если считать последнее неприводимым. Наиболее естественный выбор состоит в том, что поле $\phi^{abc\dots}(x)$ как тензор алгебры Лоренца имеет симметрию той же диаграммы \mathbf{S} , которая характеризует тензор физических поляризации или спин. В этом случае поле $\phi^{abc\dots}(x)$ удобно называть спин- \mathbf{S} потенциалом, мы будем обозначать его $\phi^{\mathbf{S}}$.

Например, поле спина 0 описывается скалярным полем $\phi(x)$; поле спина $\frac{1}{2}$ описывается спинорным полем ϕ^α , где α - индекс спинорного представления алгебры Лоренца; поле спина 1 описывается векторным полем $\phi^a(x)$; поле спина 2 описывается полем $\phi^{ab}(x)$, которое симметрично по индексам a и b .

Для калибровочных полей, например, для безмассовых полей в пространстве Минковского, существует ещё один естественный объект — напряжённость, т.е. некоторый калибровочно-инвариантный тензор, построенный из производных наименьшего ранга от данного потенциала. Такие тензоры в дальнейшем будут называться обобщённым тензором Вейля. Однако уже пример векторного поля показывает, что

описание в терминах потенциалов более фундаментально, так как для введения электромагнитного взаимодействия или взаимодействия Янга-Миллса необходим именно потенциал A_μ , а не напряжённость $F_{\mu\nu}$. Остальные описания, основанные не на потенциалах или напряжённостях, называются дуальными и сталкиваются с трудностями при попытке введения взаимодействий [163–166].

Рассмотрение вопросов гравитационного взаимодействия, а именно введение в теорию гравитации фермионных полей, которое возможно только в переменных тетрада-связность, показывает, что в общем случае и потенциалы не являются фундаментальными объектами и должны быть заменены на соответствующие тетрадные аналоги. Данная операция тривиальна для скалярного и векторного поля (ϕ и A_μ совпадают со своими «тетрадными» аналогами, если ϕ понимать как ноль-форму, а A_μ как одну форму $A_\mu dx^\mu$), но оказывается нетривиальной для поля спина 2, для которого потенциал $g_{\mu\nu}$ должен быть заменён на одну-формы тетрады $e_\mu^a dx^\mu$ и спин-связности $\omega_\mu^{a,b} dx^\mu$.

Пока стоит вопрос только о полевых уравнениях, т.е. не требуется, например, чтобы уравнения допускали лагранжиан без расширения состава полей, можно обойтись потенциалами $\phi^{\mathbf{S}}$ со значениями в неприводимых (спин)-тензорах алгебры Лоренца.

Для того чтобы обеспечить неприводимость представления, очевидно, необходимо наложить на потенциал $\phi^{\mathbf{S}}$ все локальные явно Лоренц-ковариантные условия, которые для потенциала спина $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$ имеют вид⁶

$$(\square + m^2)\phi^{a(s_1), \dots, u(s_n)} = 0, \quad (1.20)$$

$$D_m \phi^{a(s_1), \dots, mc(s_i-1), \dots, u(s_n)} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.21)$$

$$\phi^{a(s_1), \dots, b(s_i), \dots, bc(s_j-1), \dots, u(s_n)} \equiv 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i < j, \quad (1.22)$$

$$\eta_{mm} \phi^{a(s_1), \dots, mmc(s_i-2), \dots, u(s_n)} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.23)$$

$$\eta_{mm} \phi^{a(s_1), \dots, mb(s_i-1), \dots, mc(s_j-1), \dots, u(s_n)} \equiv 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (1.24)$$

где $\square \equiv D_m D^m$ и D_m ковариантная производная в соответствующем пространстве. Условия распадаются на два класса: алгебраические (1.22)-(1.24), которые гарантируют неприводимость $\phi^{\mathbf{S}}$ как тензора алгебры Лоренца, т.е. условия Юнга (юнговость) (1.22) и бесследовость (1.23)-(1.24), и дифференциальные (1.20)-(1.21). Уравнение (1.20) фиксирует значение оператора казима, а (1.21) исключает представления с меньшим спином. Модуль алгебры симметрий пространства-времени, выделяемый из потенциала $\phi^{\mathbf{S}}$ наложением уравнений (1.20)-(1.21), мы будем обозначать $\mathcal{D}(m^2; \mathbf{S})$. Условия алгебраической неприводимости (1.22)-(1.24) считаются наложенными по определению самого потенциала $\phi^{\mathbf{S}}$.

1.2.1 Пространство Минковского

В пространстве Минковского решения (1.20) допускают разделение на положительно- и отрицательно-частотные части. При $m^2 > 0$ неприводимое представление $\mathcal{H}(m^2; \mathbf{S})$

⁶По повторяющимся сверху (или снизу) индексам подразумевается симметризация, например, в (1.22). Также (анти)симметризация подразумевается по индексам, заключённым в (квадратные) круглые скобки, см. Приложение А.

алгебры $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$, называемое массивной частицей спина \mathbf{S} , реализуется на положительно частотных решениях $\mathcal{D}(m^2; \mathbf{S})$. По модулю выбранной частотной ветви решений, $\mathcal{D}(m^2; \mathbf{S})$ отождествляется с $\mathcal{H}(m^2; \mathbf{S})$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(m^2; \mathbf{S}) \longrightarrow \mathcal{H}(m^2; \mathbf{S}) \longrightarrow 0 \quad (1.25)$$

При $m^2 = 0$, $\mathcal{D}(m^2; \mathbf{S})$ становится приводимым, т.е. появляются подпространства, инвариантные относительно действия $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$ (подмодули). На уравнениях движения это проявляется в появлении при $m^2 = 0$ калибровочной инвариантности, которая сама может быть описана в терминах $\mathcal{D}(0; \mathbf{S}')$ с некоторыми \mathbf{S}' . Более того, в случае общего положения ($\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, s_2, \dots)$, где $s_1 \neq s_2 > 0$) подмодули $\mathcal{D}(0; \mathbf{S}')$ сами являются приводимыми, т.е. возникает приводимость калибровочной симметрии, существование которой особенно очевидно в случае полностью антисимметричных полей. Например, для антисимметричного поля $\phi^{a,b}$ ранга два с калибровочным преобразованием $\delta\phi^{a,b} = \partial^a \xi^b - \partial^b \xi^a$ имеем $\delta\phi^{a,b} = 0$, если калибровочный параметр первого уровня ξ^a представлен через параметр второго уровня ξ в виде $\delta\xi^a = \partial^a \xi$.

Неприводимое представление $\mathcal{H}(0; \mathbf{S})$ алгебры $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$, называемое безмассовой частицей спина \mathbf{S} , может быть определено следующим образом

$$0 \longrightarrow \Xi_p \longrightarrow \dots \longrightarrow \Xi_2 \longrightarrow \Xi_1 \longrightarrow \mathcal{D}(0; \mathbf{S}) \longrightarrow \mathcal{H}(0; \mathbf{S}) \longrightarrow 0, \quad (1.26)$$

где Ξ_r соответствует калибровочной симметрии на уровне r

$$\Xi_r = \bigoplus_{\substack{k_1 + \dots + k_N = r \\ k_1 = 0, 1; \dots; k_p = 0, 1 \\ s_1 - k_1 \geq s_2 - k_2, \dots, s_{p-1} - k_{p-1} \geq s_p - k_p}} \mathcal{D}(0; \mathbb{Y}(s_1 - k_1, \dots, s_p - k_p)). \quad (1.27)$$

Ξ_r , очевидно, отвечает калибровочным параметрам с симметрией диаграмм

$$\mathbf{S}_{i_1, \dots, i_r} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_{i_1} - 1, \dots, s_{i_r} - 1, \dots, s_p), \quad (1.28)$$

получаемых отрезанием по одной клетке от r различных рядов \mathbf{S} .

В случае безмассового поля спина 2, например, имеем

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(0; \square) \longrightarrow \mathcal{D}(0; \square) \longrightarrow \mathcal{H}(0; \square) \longrightarrow 0, \quad (1.29)$$

т.е. неприводимое представление $\mathcal{H}(0; \square)$ определяется как фактор решений (1.20)-(1.24), где поле $\phi^{\mathbf{S}}$ есть симметричный бесследовый тензор второго ранга ϕ^{ab} , по калибровочным симметриям вида $\delta\phi^{ab} = \partial^a \xi^b + \partial^b \xi^a$, представленным решениями (1.20)-(1.24) с векторным полем ξ^a .

Количество калибровочных параметров на первом уровне, как видно из определения, равно количеству способов, которыми можно удалить одну клетку из диаграммы Юнга \mathbf{S} так, что полученная диаграмма также обладает свойством юнговости, а количество уровней приводимости равно высоте диаграммы, т.е. n для $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$.

Важным в дальнейшем будет тот факт, что на самом глубоком уровне приводимости всегда находится лишь один калибровочный параметр (подмодуль), диаграмма \mathbf{S}' которого получается отрезанием одной клетки справа от каждой строки \mathbf{S} , т.е. \mathbf{S}' имеет вид \mathbf{S} без первого столбца, $\mathbf{S}' = \mathbb{Y}(s_1 - 1, \dots, s_p - 1)$.

1.2.2 Пространство анти-де Ситтера

В пространстве анти-де Ситтера решения (1.20) также допускают разделение на положительно- и отрицательно-частотные части. В случае общего положения, когда m^2 не равно одному из значений дискретной серии, определяемой ниже, модуль $\mathcal{D}(m^2; \mathbf{S})$ алгебры $\mathfrak{so}(d-1, 2)$ неприводим и называется массивной частицей спина \mathbf{S} , т.е. определение $\mathcal{H}(m^2; \mathbf{S})$ совпадает с (1.25).

Вопрос о том, какие поля, удовлетворяющие (1.20)-(1.24), следует называть безмассовыми, более интересен, [74]. В пространстве Минковского безмассовость — синоним калибровочности. Выбирая калибровочную симметрию как определяющий принцип и в пространстве анти-де Ситтера [74], следует называть поле безмассовым при тех значениях массового параметра m^2 в (1.20), при которых у системы (1.20)-(1.21) появляется калибровочная инвариантность, что гарантирует уменьшение количества степеней свободы по сравнению с массивным полем. В общем случае калибровочная инвариантность появляется при ненулевых значениях параметра массы m^2 .

В работах [72,73] была получена общая формула, связывающая значения наименьшей энергии E_0 и спина $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$ в модуле $\mathcal{D}(E_0; \mathbf{S})$ со значением параметра массы m^2 в уравнении (1.20). Привлекая интерпретацию [74] сингулярных векторов вида (1.18) как появление калибровочной симметрии у уравнений движения и классификацию сингулярных векторов из теоремы раздела 1.1.2, получаем {4}: для любого $q = 1, \dots, n$ при условии $s_q - s_{q+1} > 0$ и любого $t = 1, \dots, s_q - s_{q+1}$ существует значение параметра массы m^2 , однозначно определяемое E_0 (1.14) и \mathbf{S} , а именно,

$$m^2 = \lambda^2 (E_0(E_0 - d + 1) - s_1 - \dots - s_n), \quad (1.30)$$

и такое, что (1.20)-(1.21) становятся инвариантными относительно калибровочных преобразований потенциала вида

$$\delta\phi^{a(s_1), \dots, u(s_n)} = \overbrace{D^c \dots D^c}^t \xi^{a(s_1), \dots, b(s_{q-1}), c(s_q-t), d(s_{q+1}), \dots, u(s_n)} + \dots, \quad (1.31)$$

где '...' обозначает члены с меньшим числом производных и члены с различными перестановками индексов так, чтобы выражение справа обладало юнговской симметрией \mathbf{S} . Калибровочный параметр $\xi^{\mathbf{S}_1}$ является неприводимым тензором с симметрией диаграммы \mathbf{S}_1 , т.е. $\mathbb{Y}(s_1, s_2, \dots, s_{q-1}, s_q - t, s_{q+1}, \dots, s_n)$, получаемой отрезанием t клеток от строки с номером q , и удовлетворяет уравнениям аналогичным (1.20)-(1.21) с массовым параметром, определяемым формулой (1.30) для E_1 и \mathbf{S}_1 .

Из вида точной последовательности (1.15), задающей неприводимое представление $\mathcal{H}(E_0; \mathbf{S})$ по значениям параметров (\mathbf{S}, q, t) , следует, что у уравнений (1.20)-(1.21) с m^2 равным (1.30) имеется q уровней приводимости калибровочных симметрий. Калибровочный параметр на i -ом уровне имеет симметрию диаграммы \mathbf{S}_i . Полный набор поле плюс калибровочные параметры на всех уровнях имеет вид

$$\delta\phi^{\mathbf{S}_0} = \overbrace{D \dots D}^t \xi^{\mathbf{S}_1} + \dots, \quad \delta\xi^{\mathbf{S}_1} = D \dots D \xi^{\mathbf{S}_2} + \dots, \quad \dots, \quad \delta\xi^{\mathbf{S}_{q-1}} = D \dots D \xi^{\mathbf{S}_q} + \dots \quad (1.32)$$

Параметр t определяет количество производных в калибровочном законе. При $t = 1$ поля принято называть безмассовыми, а при $t > 1$ частично-безмассовыми.

Хотя теория представлений однозначно определяет значение параметра массы и вид калибровочного закона, убедиться в появлении калибровочной симметрии у уравнений (1.20)-(1.21) можно, конечно, только с помощью свойств коммутации D_m , как это и было сделано для безмассовых полей в оригинальной работе [72], что технически труднее, чем теоретико-групповой анализ, так как параметр массы квадратичен по энергии.

При данных массе m^2 и спине поля \mathbf{S} , у (1.30) имеется два корня E_0^+ и E_0^- , связанные соотношением $E_0^+ + E_0^- = d - 1$, максимальный корень E_0^+ отвечает массивному или (частично)-безмассовому полю, для которого решения волнового уравнения ведут себя регулярным образом на бесконечности, тогда как минимальный корень отвечает так называемому «теновому» партнёру [167], для которого решения волнового уравнения расходятся на бесконечности. Мы всегда будем подразумевать максимальный корень (1.30), говоря о связи массы и энергии.

Привлекая вновь теорему из раздела 1.1.2, можно показать, что точная последовательность (1.15) может быть продолжена справа

$$\mathcal{H}(E_0; \mathbf{S}_0) \longrightarrow \mathcal{D}(E_{-1}; \mathbf{S}_{-1}) \longrightarrow \mathcal{D}(E_{-2}; \mathbf{S}_{-2}) \longrightarrow \dots \quad (1.33)$$

это подразумевает, что для поля $\phi^{\mathbf{S}_0}$ с законом калибровочных преобразований (1.31) можно построить поле $C^{\mathbf{S}_{-1}}$, которое есть калибровочно-инвариантная комбинация производных наименьшего ранга от $\phi^{\mathbf{S}_0}$ такая, что $C^{\mathbf{S}_{-1}}$ не исчезает на уравнениях (1.20)-(1.21). Поле $C^{\mathbf{S}_{-1}}$ имеет симметрию \mathbf{S}_{-1} , и получается взятием $(s_q - s_{q+1} - t + 1)$ производных от $\phi^{\mathbf{S}_0}$. Поле $C^{\mathbf{S}_{-1}}$ называется обобщённым тензором Вейля, по аналогии с полем спина 2, для которого свободные уравнения Эйнштейна в вакууме эквивалентны занулению тензора Ричи $R_{\mu\nu}$, тогда как бесследовая часть тензора кривизны $R_{\mu\nu,\lambda\rho}$, называемая тензором Вейля, ограничена только тождествами Бьянки и не равна нулю на уравнениях движения.

Следовательно, пространство калибровочно-инвариантных величин, построенных из производных поля $\phi^{\mathbf{S}_0}$, порождается уравнениями (1.20)-(1.21) и обобщённым тензором Вейля.

В качестве иллюстрации диаграммы Юнга \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_0 и \mathbf{S}_{-1} , соответствующие симметриям калибровочного параметра $\xi^{\mathbf{S}_1}$, потенциала $\phi^{\mathbf{S}_0}$ и обобщённого тензора Вейля $C^{\mathbf{S}_{-1}}$, имеют вид

$$\mathbf{S}_1 = \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline \dots \\ \hline s_{q-1} \\ \hline s_q - t \\ \hline s_{q+1} \\ \hline s_{q+2} \\ \hline \dots \\ \hline s_n \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{S}_0 = \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline \dots \\ \hline s_{q-1} \\ \hline s_q \\ \hline s_{q+1} \\ \hline s_{q+2} \\ \hline \dots \\ \hline s_n \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{S}_{-1} = \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline \dots \\ \hline s_{q-1} \\ \hline s_q \\ \hline s_q - t + 1 \\ \hline s_{q+2} \\ \hline \dots \\ \hline s_n \\ \hline \end{array} \quad (1.34)$$

1.2.3 Пространство де Ситтера

Появление калибровочной инвариантности вида (1.31) у уравнений (1.20)-(1.21) в пространстве де Ситтера происходит при тех же значениях параметра массы что и

в пространстве анти-де Ситтера при замене $\lambda^2 \longrightarrow -\lambda^2$. Однако следует заметить, что (1.20) уже не допускает разделение решений на положительно- и отрицательно-частотные части, алгебра де Ситтера смешивает их в один модуль, что и приводит к многочисленным трудностям для квантовой теории поля.

1.3 Поля в пространстве Минковского vs. (анти)-де Ситтер

Суммируя вышесказанное: поля в пространстве Минковского однозначно определяются парой (\mathbf{S}, m^2) , где \mathbf{S} характеризует неприводимое представление малой алгебры Вигнера $-\mathfrak{so}(d-1)$, если $m^2 > 0$, и $\mathfrak{so}(d-2)$, если $m^2 = 0$; поля в пространстве (анти)-де Ситтера однозначно определяются триплетом (\mathbf{S}, q, t) , где \mathbf{S} характеризует неприводимое представление «малой алгебры Вигнера» $\mathfrak{so}(d-1)$ и параметры q, t определяют тип калибровочной симметрии.

1.3.1 Степени свободы

Тот факт, что «малая алгебра Вигнера» в пространстве (анти)-де Ситтера как для массивных, так и для калибровочных полей есть $\mathfrak{so}(d-1)$, приводит к тому, что даже безмассовые поля имеют в общем случае больше степеней свободы в пространстве (анти)-де Ситтера, чем безмассовое поле того же спина в пространстве Минковского [74]. Теоретико-полевая интерпретация этого факта заключается в том, что калибровочные поля в пространстве (анти)-де Ситтера имеют меньше калибровочных симметрий, чем безмассовые поля того же спина в пространстве Минковского [72].

Количество степеней свободы для массивного поля в пространстве Минковского и (анти)-де Ситтера оказывается одинаковым. Для калибровочных полей равенство числа степеней свободы в пространствах Минковского и (анти)-де Ситтера достигается только для безмассовых полей первой серии, спин \mathbf{S} которых характеризуется прямоугольной диаграммой Юнга, т.е. $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s, \dots, s)$. Для таких полей количество калибровочных симметрий равно 1, и, следовательно, не происходит уменьшения калибровочной симметрии при переходе от пространства Минковского в (анти)-де Ситтер. В частности, это верно для полностью симметричных $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s)$ и полностью анти-симметричных полей $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(1, \dots, 1)$.

1.3.2 Унитарность

Массивные и безмассовые поля в пространстве Минковского унитарны. В пространстве анти-де Ситтера унитарны лишь: (1) безмассовые поля, т.е. $t = 1$, с минимально возможным значением параметра q , т.е. q равно номеру первой строки \mathbf{S} , от которой можно отрезать одну клетку; (2) массивные поля, энергия которых выше значения энергии унитарного безмассового поля данного спина. Остальные безмассовые поля, все частично-безмассовые поля, а также массивные поля с энергией меньшей энергии унитарного безмассового поля неунитарны. В пространстве де Ситтера частично-

безмассовые поля по-видимому унитарны [83, 84], хотя в общем случае данный вопрос не исследовался.

1.4 К оффшелльному описанию

Классификация решений системы уравнений (1.20)-(1.24) и их связь с неприводимыми представлениями алгебры симметрий пространства-времени дают полное решение проблемы on-shell описания полей произвольного спина в пространствах Минковского, де Ситтера и анти-де Ситтера по модулю всевозможных дуальных описаний, которые, как уже отмечалось, приводят к трудностям при построении теорий со взаимодействием и поэтому вряд ли могут играть фундаментальную роль.

Однако для построения квантовой теории необходимо иметь так называемую off-shell реализацию полевых систем, в которой на поля и калибровочные параметры не наложено никаких дифференциальных ограничений типа условий поперечности (1.21). Для этого оказывается необходимым расширить состав полей. В частности, это необходимо для построения лагранжиана. Собственно основная часть диссертации посвящена построению таких реализаций в рамках развёрнутого подхода, который показал себя наиболее эффективным при построении нелинейных теорий по линейным в случае полностью симметричных безмассовых полей.

Ниже приводятся некоторые примеры известных в рамках метрического подхода off-shell реализаций для калибровочных полей. Исключительно для простоты изложения примеры в основном относятся к полям в пространстве Минковского.

Поле спина s с поперечной калибровочной инвариантностью. Существует возможность формулировки промежуточной между on-shell и off-shell, в которой поля не подвержены никаким дифференциальным ограничениям, однако калибровочные параметры имеют нулевую дивергенцию. В случае поля спина 2 такая теория соответствует предложенной А.Эйнштейном в [168] теории гравитации инвариантной относительно преобразований координат, сохраняющих объём, [169, 170].

Обобщение данного подхода на случай полей спина s , описываемых симметричным тензорным полем $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ ранга s , приводит к уравнениям и связям вида

$$\begin{aligned} \square \phi_{\mu_1 \dots \mu_s} - s \partial_{(\mu_1} \partial^{\nu} \phi_{\nu \mu_2 \dots \mu_s)} + \frac{s(s-1)}{(d+2s-4)} \eta_{(\mu_1 \mu_2} \partial^{\nu} \partial^{\rho} \phi_{\nu \rho \mu_3 \dots \mu_s)} &= 0, \\ \delta \phi_{\mu_1 \dots \mu_s} &= \partial_{(\mu_1} \xi_{\mu_2 \dots \mu_s)}, \\ \phi^{\nu}_{\nu \mu_3 \dots \mu_s} &\equiv 0, \\ \xi^{\nu}_{\nu \mu_3 \dots \mu_{s-1}} &\equiv 0, \quad \partial^{\nu} \xi_{\nu \mu_2 \dots \mu_{s-1}} = 0. \end{aligned}$$

Как видно, поле описывается неприводимым тензором $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}$, что ведёт к дифференциальным условиям на калибровочный параметр, которые получаются взятием следа от закона калибровочных преобразований. Тем не менее, данные уравнения допускают лагранжиан и описывают правильное число степеней свободы, как было показано в [6], а также могут допускать более широкий произвол при введении взаимодействий, чем классическая формулировка, рассматриваемая ниже.

Поле спина s , полностью off-shell формулировка. Как было показано впервые Фронсдалом в [171], безмассовое поле спина s может быть описано симметричным тензорным полем $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ ранга s , на которое наложено условие дважды-бесследовости, т.е. только второй след поля должен обращаться в ноль. Уравнения Фронсдала, закон калибровочных преобразований и уже только алгебраические условия на поле и калибровочный параметр имеют вид ⁷

$$\begin{aligned} \square \phi_{\mu_1 \dots \mu_s} - s \partial_{(\mu_1} \partial^{\nu} \phi_{\nu \mu_2 \dots \mu_s)} + \frac{s(s-1)}{2} \partial_{(\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi^{\nu}_{\nu \mu_3 \dots \mu_s)} &= 0, \\ \delta \phi_{\mu_1 \dots \mu_s} &= \partial_{(\mu_1} \xi_{\mu_2 \dots \mu_s)}, \\ \phi^{\nu\rho}_{\nu\rho\mu_5 \dots \mu_s} &= 0, \quad \xi^{\nu}_{\nu\mu_3 \dots \mu_{s-1}} = 0. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Тот факт, что калибровочный параметр оказался неприводимым тензором, не является общим и представляет собой следствие того, что поле спина s относится к простейшему типу симметрии. Однако построить нелинейную теорию уже для данных полей оказалось сложной задачей, которая была решена Васильевым в [44–46] в рамках развёрнутого подхода.

Очевидно, что как модуль алгебры Лоренца поле Фронсдала $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ раскладывается на два неприводимых представления, соответствующие бесследовым симметричным тензорам рангов s , $s-2$.

Антисимметричное поле ранга p . Наиболее простыми полями являются полностью антисимметричные поля, формально имеющие спин

$$\mathbf{S} = \mathbb{Y}(\overbrace{1, 1, \dots, 1}^p) \equiv \mathbb{Y}[p],$$

которые описываются антисимметричным тензорным полем $\omega_{[\mu_1 \dots \mu_p]}$. Уравнения и закон калибровочных преобразований имеют вид

$$\begin{aligned} \square \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} - p \partial_{[\mu_1} \partial^{\nu} \omega_{\nu \mu_2 \dots \mu_p]} &= 0, \\ \delta \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} &= \partial_{[\mu_1} \xi_{\mu_2 \dots \mu_p]}, \\ \delta \xi_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} &= \partial_{[\mu_1} \xi_{\mu_2 \dots \mu_{p-1}]}, \\ &\dots \\ \delta \xi_{\mu} &= \partial \xi. \end{aligned}$$

Антисимметричные поля иллюстрируют такое свойство полей произвольного типа симметрии как приводимость калибровочной симметрии. Не все калибровочные параметры действуют на поле эффективно. Не сдвигают поле те параметры, которые сами имеют вид антисимметризованной производной от параметра второго уровня и т.д., вплоть до уровня p .

⁷Уравнения, полученные из лагранжиана, имеют вид $G_{\mu_1 \dots \mu_s} - \frac{s(s-1)}{4} \eta_{(\mu_1 \mu_2} G^{\nu}_{\nu \mu_3 \dots \mu_s)} = 0$, где $G_{\mu_1 \dots \mu_s}$ равно левой части (1.35). Обе формы полностью эквивалентны.

Простейшее поле смешанного типа симметрии, $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(2, 1)$. Простейший тензор смешанного типа симметрии имеет ранг три и симметрию диаграммы \square . Данное поле, называемое по типу диаграммы крюком, было впервые разобрано в [89, 172]. Поле в данном случае представлено тензором $\phi_{[\mu\mu],\nu}$, который антисимметричен по первым двум индексам $\phi_{\mu\nu,\lambda} = -\phi_{\nu\mu,\lambda}$ и удовлетворяет условию Юнга $\phi_{\mu\nu,\lambda} + \phi_{\nu\lambda,\mu} + \phi_{\lambda\mu,\nu} = 0$ или $\phi_{[\mu\mu],\nu} = 0$.

Поскольку для тензоров смешанного типа симметрии не существует уникального способа представления, имеется также эквивалентная форма, в которой тензор наоборот симметричен по первым двум индексам, $\phi_{\mu\nu,\lambda}^S = \phi_{\nu\mu,\lambda}^S$, $\phi_{\mu\nu,\lambda}^S + \phi_{\nu\lambda,\mu}^S + \phi_{\lambda\mu,\nu}^S = 0$ или $\phi_{(\mu\mu),\nu} = 0$. Два базиса связаны преобразованием $\phi_{(\mu\nu),\lambda}^S = \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_{\mu\lambda,\nu}^A + \phi_{\nu\lambda,\mu}^A)$, $\phi_{[\mu\nu],\lambda}^A = \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_{\mu\lambda,\nu}^S - \phi_{\nu\lambda,\mu}^S)$.

Уравнения движения

$$\square\phi_{\mu\mu,\lambda} + 2\partial_{[\mu}\partial^\lambda\phi_{\mu]\lambda,\nu} - \partial_\nu\partial^\lambda\phi_{\mu\mu,\lambda} - 2\partial_\nu\partial_{[\mu}\phi_{\mu]\lambda},^\lambda = 0 \quad (1.36)$$

инвариантны относительно калибровочных преобразований вида

$$\delta\phi_{\mu\mu,\nu} = \partial_{[\mu}\xi_{\mu]\nu}^S + \partial_{[\mu}\xi_{\mu]\nu}^A - \partial_\nu\xi_{\mu\mu}^A, \quad (1.37)$$

в которые входят уже два параметра, симметричный $\xi_{(\mu\nu)}^S$ и антисимметричный $\xi_{[\mu\nu]}^A$.

Off-shell'ность приводит к тому, что как само поле, так и симметричный калибровочный параметр не являются неприводимыми. В данном простом случае на поле $\phi_{[\mu\mu],\nu}$ не наложено никаких условий на следы. Таким образом, оно раскладывается на неприводимые $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -тензоры как $\square \oplus \square$. Аналогично, для калибровочного параметра $\xi_{(\mu\mu)}^S \sim \square \oplus \bullet$. Как и у полностью антисимметричных полей, калибровочная симметрия приводима, поле не сдвигается при преобразовании с векторным параметром ξ_μ

$$\begin{aligned} \delta\phi_{\mu\mu,\nu} &= 0, \\ \delta\xi_{\mu\nu}^A &= \frac{2}{3}(\partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu), \\ \delta\xi_{\mu\nu}^S &= \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu, \end{aligned} \quad (1.38)$$

затрагивающим оба параметра первого уровня.

Представление $\mathcal{H}(0; \square)$ алгебры Пуанкаре описывается точной последовательностью

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(0; \square) \longrightarrow \mathcal{D}(0; \square) \oplus \mathcal{D}(0; \square) \longrightarrow \mathcal{D}(0; \square) \longrightarrow \mathcal{H}(0; \square) \longrightarrow 0 \quad (1.39)$$

Поле спина $\mathbb{Y}(s_1, s_2)$. Достаточно общим случаем поля смешанного типа симметрии является поле спина $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, s_2)$, т.е. случай когда два веса представления малой алгебры Вигнера отличны от нуля. Согласно гипотезе [90] поле спина $\mathbb{Y}(s_1, s_2)$ может быть описано тензорным полем $\phi^{a(s_1), b(s_2)} \equiv \phi^{a_1 \dots a_{s_1}, b_1 \dots b_{s_2}}$, которое симметрично по индексам $a_1 \dots a_{s_1}$ и отдельно по индексам $b_1 \dots b_{s_2}$, и также удовлетворяет условию

Юнга $\phi^{(a_1 \dots a_{s_1}, a_{s_1+1}) b_2 \dots b_{s_2}} \equiv 0$, т.е. $\phi^{a(s_1), b(s_2)}$ имеет симметрию диаграммы $\boxed{\frac{s_1}{s_2}}$. Аналогично полностью симметричным полям Фронсдала, на поле $\phi^{a(s_1), b(s_2)}$ наложены следовые условия

$$\phi_{m n}^{m n a_5 \dots a_{s_1}, b_1 \dots b_{s_2}} \equiv 0, \quad \phi^{a_1 \dots a_{s_1}, m n}_{m n} b_5 \dots b_{s_2} \equiv 0, \quad (1.40)$$

таким образом, кросс-след по отношению к индексам из разных групп не обращается в ноль, и поэтому $\phi^{a(s_1), b(s_2)}$ раскладывается на большое число неприводимых компонент

$$\phi^{a(s_1), b(s_2)} \sim \boxed{\frac{s_1}{s_2}} \oplus \boxed{\frac{s_1-1}{s_2-1}} \oplus \boxed{\frac{s_1}{s_2-2}} \oplus \boxed{\frac{s_1-2}{s_2}} \oplus \boxed{\frac{s_1-2}{s_2-2}} \quad (1.41)$$

Уравнения Лабастиды [90]

$$\begin{aligned} & \square \phi^{a(s_1), b(s_2)} - s_1 \partial^a \partial_c \phi^{a(s_1-1)c, b(s_2)} - s_2 \partial^b \partial_c \phi^{a(s_1), b(s_2-1)c} + s_1 s_2 \partial^a \partial^b \phi^{a(s_1-1)c, b(s_2-1)}_c + \\ & + \frac{s_1(s_1-1)}{2} \partial^a \partial^a \phi^{a(s_1-2)c, b(s_2)}_c + \frac{s_2(s_2-1)}{2} \partial^b \partial^b \phi^{a(s_1), b(s_2-2)c}_c = 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

удовлетворяют тем же следовым условиям и условиям симметрии, что и поле $\phi^{a(s_1), b(s_2)}$. Уравнения инвариантны относительно калибровочных преобразований⁸

$$\delta \phi^{a(s_1), b(s_2)} = \frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_2 + 1} \partial^a \xi_1^{a(s_1-1), b(s_2)} - \partial^b \xi_2^{a(s_1), b(s_2-1)} + \frac{1}{s_1 - s_2 + 1} \partial^a \xi_2^{a(s_1-1)b, b(s_2-1)}, \quad (1.43)$$

где калибровочные параметры $\xi_1^{a(s_1-1), b(s_2)}$ и $\xi_2^{a(s_1), b(s_2-1)}$ имеют симметрию $\boxed{\frac{s_1-1}{s_2}}$ и $\boxed{\frac{s_1}{s_2-1}}$ соответственно и удовлетворяют следовым условиям

$$\xi_1^{a(s_1-3)m, b(s_2)}_m + \frac{2}{(s_1 - s_2 - 1)} \left(\xi_1^{a(s_1-3)bm, b(s_2-1)}_m + \frac{2}{(s_1 - s_2)} \xi_1^{a(s_1-3)bb, m b(s_2-2)}_m \right) \equiv 0, \quad (1.44)$$

$$\xi_2^{a(s_1), m b(s_2-3)}_m \equiv 0, \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2(s_1 - s_2)}{(s_1 - s_2 - 1)} \left(\xi_1^{a(s_1-2)m, b(s_2-1)}_m + \frac{1}{(s_1 - s_2 + 1)} \xi_1^{a(s_1-2)b, m b(s_2-2)}_m \right) \equiv \xi_2^{a(s_1-2)m, b(s_2-1)}_m + \\ & + \frac{2}{(s_1 - s_2 + 1)} \left(\xi_2^{a(s_1-2)bm, b(s_2-2)}_m + \frac{2}{(s_1 - s_2 + 2)} \xi_2^{a(s_1-2)bb, m b(s_2-3)}_m \right), \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\xi_1^{a(s_1-1), m b(s_2-2)}_m \equiv 2 \xi_2^{a(s_1-1)m, b(s_2-1)}_m, \quad (1.47)$$

$$\text{любой двойной след } \xi_1^{a(s_1-1), b(s_2)} \text{ и } \xi_2^{a(s_1), b(s_2-1)} \text{ равен нулю.} \quad (1.48)$$

Из условий (1.44) и (1.45) следует, что след $\xi_1^{a(s_1-1), b(s_2)}$ с симметрией $\boxed{\frac{s_1-3}{s_2}}$, а также след $\xi_2^{a(s_1), b(s_2-1)}$ с симметрией $\boxed{\frac{s_1}{s_2-3}}$ равны нулю. Как $\xi_1^{a(s_1-1), b(s_2)}$, так и $\xi_2^{a(s_1), b(s_2-1)}$,

⁸Дополнительные слагаемые и коэффициенты возникают из-за того, что тензор, полученный простым взятием производной, уже как правило не обладает никакими определёнными свойствами симметрии. Чтобы восстановить правильную юнговскую симметрию, необходимо добавить с правильными коэффициентами слагаемые с всевозможными перестановками индексов.

имеют следы с типами симметрии $\begin{smallmatrix} s_1-2 \\ s_2-1 \end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix} s_1-1 \\ s_2-2 \end{smallmatrix}$. Из условий (1.46) и (1.47), следует что эти следы не независимы и пропорциональны друг другу.

Согласно общей схеме [90], типы симметрий калибровочных параметров получают отрезанием всевозможными способами одной клетки от диаграммы, характеризующей спин поля, т.е. $\begin{smallmatrix} s_1 \\ s_2 \end{smallmatrix}$ даёт как раз $\begin{smallmatrix} s_1-1 \\ s_2 \end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix} s_1 \\ s_2-1 \end{smallmatrix}$.

Аналогично антисимметричным полям и уже разобранным простейшему полю смешанного типа симметрии, калибровочная симметрия приводима

$$\delta\phi^{a(s_1),b(s_2)} = 0 \quad \text{при условии что} \quad \begin{cases} \delta\xi_1^{a(s_1-1),b(s_2)} = \partial^b\chi^{a(s_1-1),b(s_2-1)} - \frac{1}{s_1-s_2}\partial^a\chi^{a(s_1-2)b,b(s_2-1)}, \\ \delta\xi_2^{a(s_1),b(s_2-1)} = \partial^a\chi^{a(s_1-1),b(s_2-1)}, \end{cases} \quad (1.49)$$

где калибровочный параметр второго уровня $\chi^{a(s_1-1),b(s_2-1)}$ есть бесследовый тензор и имеет симметрию диаграммы, получаемой отрезанием двух клеток от разных строк диаграммы \mathbf{S} , характеризующей спин поля, т.е. $\begin{smallmatrix} s_1-1 \\ s_2-1 \end{smallmatrix}$, $\chi^{a(s_1-1),ab(s_2-2)} \equiv 0$.

Общий случай поля смешанного типа симметрии. Гипотеза Лабастиды [90], как обобщение [89, 171, 173–175], состоит в том, что для описания поля произвольного спина $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_p)$ можно взять тензорное поле

$$\phi^{a_1(s_1), \dots, a_p(s_p)} \quad (1.50)$$

того же типа симметрии, что и диаграмма, характеризующая спин поля. Как и в предыдущих двух случаях полей смешанного типа симметрии, поле реализует приводимое представление алгебры Лоренца, определяемое следовыми условиями

$$\phi^{a_1(s_1), \dots, a_i(s_i-4)mmnn, \dots, a_p(s_p)} \eta_{mm} \eta_{nn} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.51)$$

Уравнения Лабастиды на поле $\phi^{a_1(s_1), \dots, a_p(s_p)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \square\phi^{a_1(s_1), \dots, a_p(s_p)} - \sum_{i=1}^{i=p} s_i \partial^{a_i} \partial_m \phi^{a_1(s_1), \dots, a_i(s_i-1)m, \dots, a_p(s_p)} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{i,j=p} \frac{s_i(s_j-1)}{2} \partial^{a_i} \partial^{a_j} \phi^{a_1(s_1), \dots, a_i(s_i-1)m, \dots, a_j(s_j-1)n, \dots, a_p(s_p)} \eta_{mn} = 0 \end{aligned} \quad (1.52)$$

и инвариантны относительно калибровочной симметрии с параметрами

$$\xi_i^{a_1(s_1), \dots, a_i(s_i-1), \dots, a_p(s_p)}, \quad (1.53)$$

симметрия которых характеризуется диаграммами, получаемыми отрезанием одной клетки от i -ой строки \mathbf{S} при условии, что это не нарушает свойство юнговости диаграммы. Таким образом количество калибровочных параметров равно числу блоков в \mathbf{S} , т.е. числу групп строк одинаковой длины.

Следовые условия на параметры ξ_i более сложные, чем (1.51). В частности, следовые условия связывают следы одного и того же типа у разных параметров ξ_i . Все следовые условия получают простое объяснение в рамках развёрнутого подхода в Главе 3.

Поле спина $s + \frac{1}{2}$. Фермионные поля смешанного типа симметрии разделяют такие свойства бозонных полей как приводимость калибровочных симметрий, расширение состава полей для off-shell формулировки. Основное отличие состоит в том, что уравнения движения имеют первый порядок и алгебраические условия накладываются с помощью Γ -матриц⁹.

Фермионное поле, имеющее спин $(s + \frac{1}{2})$, может быть описано off-shell [173] полностью симметричным спин-тензором $\phi_{\alpha;(\mu_1\dots\mu_s)}$. Уравнения, закон калибровочных преобразований и калибровочные условия имеют вид¹⁰

$$\begin{aligned}\not{\partial}\phi_{\mu_1\dots\mu_s} - s\partial_{(\mu_1}\Gamma^\nu\phi_{\nu\mu_2\dots\mu_s)} &= 0, \\ \delta\phi_{\mu_1\dots\mu_s} &= \partial_{(\mu_1}\xi_{\mu_2\dots\mu_s)}, \\ \Gamma^\nu\Gamma^\rho\Gamma^\lambda\phi_{\nu\rho\lambda\mu_4\dots\mu_s} &= 0, \quad \Gamma^\nu\xi_{\nu\mu_2\dots\mu_{s-1}} = 0,\end{aligned}\tag{1.54}$$

Поле $\phi_{\alpha;(\mu_1\dots\mu_s)}$ приводимо, так как лишь третий Γ -след обращается в ноль. Как и в случае бозонных полей спина s , калибровочный параметр — неприводим.

Антисимметричное фермионное поле ранга p . Полностью антисимметричное фермионное поле спина $\mathbb{Y}[p]_{\frac{1}{2}}$ может быть описано off-shell антисимметричным спин-тензором $\omega_{\alpha;[\mu_1\dots\mu_p]}$, удовлетворяющим

$$\begin{aligned}\not{\partial}\omega_{\mu_1\dots\mu_p} - p\partial_{[\mu_1}\Gamma^\nu\omega_{\nu\mu_2\dots\mu_p]} &= 0, \\ \delta\omega_{\mu_1\dots\mu_p} &= \partial_{[\mu_1}\xi_{\mu_2\dots\mu_p]},\end{aligned}\tag{1.55}$$

Как и в бозонном случае, (1.55) обладают приводимыми калибровочными симметриями. Отличие состоит в том, что в фермионном случае можно было бы наложить некоторые Γ -условия на $\omega_{\alpha;[\mu_1\dots\mu_p]}$, например, тройная Γ -бесследовость, но из этого сразу бы следовало, что калибровочный параметр на первом уровне Γ -бесследов, $\Gamma^\nu\xi_{\nu\mu_2\dots\mu_{p-1}} = 0$, а, следовательно, калибровочный параметр на втором уровне удовлетворяет уравнению типа Дирака, $\not{\partial}\xi_{\mu_1\dots\mu_{p-2}} = 0$. Поэтому для полностью off-shell формулировки ни на поле, ни на калибровочные параметры не должны накладываться никакие Γ -условия.

1.5 Выводы

В настоящей главе были даны полные классификации частиц в пространствах Минковского и (анти)-де Ситтера, которые оказываются сильно различными.

Несмотря на то, что частично-безмассовые поля, по-видимому, должны быть исключены из любой разумной фундаментальной теории, они гармонично вписываются в общую картину классификации полей как случай промежуточный между массивным и безмассовым. Как мы увидим далее, все описанные типы калибровочных полей допускают простое геометрическое описание в рамках тетрадного

⁹ Γ_μ удовлетворяют $\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$, $\not{\partial} \equiv \Gamma^\mu\partial_\mu$. Γ -след - это свёртка одного спинорного и одного тензорного индекса Γ -матрицы с некоторым спин-тензором, например, $\Gamma_\nu\phi^{\mu\nu} \equiv \Gamma_{\nu\beta}^\alpha\phi^{\beta;\mu\nu}$.

¹⁰Уравнения, полученные из лагранжиана [173], имеют вид $G_{\mu_1\dots\mu_s} - \frac{s}{2}\Gamma_{(\mu_1}\Gamma^\nu G_{\nu\mu_2\dots\mu_s)} - \frac{s(s-1)}{4}\eta_{(\mu_1\mu_2}G_{\nu\mu_3\dots\mu_s)}^\nu = 0$, $G_{\mu_1\dots\mu_s} = \not{\partial}\phi_{\mu_1\dots\mu_s} - s\partial_{(\mu_1}\Gamma^\nu\phi_{\nu\mu_2\dots\mu_s)} = 0$, и полностью эквивалентны (1.55).

подхода и его далёкого обобщения — развёрнутого подхода. Отсутствие частично-безмассовых полей накладывает строгие ограничения на необходимый ингредиент полной нелинейной теории унитарных полей произвольного спина — алгебру высших спинов [149, 176–178]. Таким образом, исследование простейших аспектов свободной теории не только для интересующего нас случая унитарных безмассовых полей, но и для частично-безмассовых должно помочь в поиске совместной нелинейной теории и исключении возможных вариантов, содержащих частично-безмассовые поля.

Мы не рассматриваем массивные поля как таковые в виду того, что теория массивных полей допускает реализацию в терминах безмассовых. Например, лагранжиан, массивного поля может быть получен как сумма лагранжианов некоторого набора безмассовых полей, дополненных членами без производных и с первыми производными, [84]. Спектр спинов безмассовых полей, необходимых для описания массивного поля спина \mathbf{S} получается редукцией представления \mathbf{S} алгебры $\mathfrak{so}(d-1)$ на одно измерение, т.е. к малой алгебре Вигнера $\mathfrak{so}(d-2)$ безмассовых полей. Данное описание обладает рядом преимуществ: безмассовые поля проще массивных, и массивное поле описывается как калибровочная теория (со Штюкельберговыми симметриями), что позволяет легко контролировать неизменность количества степеней свободы, требуя чтобы вершины взаимодействия были калибровочно-инвариантными. Следует отметить, что даже построение лагранжиана для массивного полностью симметричного поля спина s было технически сложной задачей [179, 180], так как потребовало введение дополнительных полей (полей Фирца-Паули), которые равны нулю на уравнениях движения, но позволяют получить правильные уравнения для самого массивного поля. Лагранжиан же Зиновьева [84] однозначно фиксируется требованием калибровочной инвариантности. Фиксацией калибровки часть полей можно положить равными нулю, после чего воспроизводится лагранжиан Синга-Хагена [179, 180].

Мы сосредоточимся на описании полей в терминах потенциалов, точнее на реперной и развёрнутой формулировке, редукция которых даёт в том числе формулировку в терминах потенциалов, так как все другие (дуальные) формулировки приводят к трудностям при построении взаимодействующих теорий.

Глава 2

Развёрнутая формулировка

Как уже отмечалось во введении, развёрнутый формализм обладает рядом преимуществ по сравнению, например, с метрическим подходом. Данная глава посвящена общим элементам формализма разворачивания, также рассматриваются теоретико-полевые примеры.

2.1 Общее определение

Говорится, что некоторый набор дифференциальных уравнений имеет развёрнутый вид [41–43], если он может быть записан как равенство нулю напряжённости вида

$$R^{\mathcal{A}} \equiv dW^{\mathcal{A}} + F^{\mathcal{A}}(W) = 0, \quad (2.1)$$

где $W^{\mathcal{A}}$ — набор дифференциальных форм на некотором многообразии \mathcal{M}_d со значениями в некоторых векторных пространствах, которые обозначаются индексами \mathcal{A} (обозначения Пенроуза [181]), так что $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$ обозначают к векторное пространство, а не к конкретным компонентам в базисе¹; $|\mathcal{A}|$ есть степень $W^{\mathcal{A}}$ как дифференциальной формы; d — внешний дифференциал на \mathcal{M}_d ; $F^{\mathcal{A}}(W)$ — функция степени $(|\mathcal{A}| + 1)$ от $W^{\mathcal{A}}$, которая предполагается разложимой только в терминах внешних произведений форм²

$$F^{\mathcal{A}}(W) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\mathcal{B}_1| + \dots + |\mathcal{B}_n| = |\mathcal{A}| + 1} f^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_n} W^{\mathcal{B}_1} \wedge \dots \wedge W^{\mathcal{B}_n}, \quad (2.2)$$

где $f^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_n}$ — некоторые независящие от координат на \mathcal{M}_d элементы из $\text{Hom}(\mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_n, \mathcal{A})$, т.е. отображения из тензорного произведения $\mathcal{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_n$ в \mathcal{A} .

Для того чтобы обеспечить формальную совместность (2.1) с $d^2 \equiv 0$, требуется, чтобы $F^{\mathcal{A}}(W)$ удовлетворяло условию интегрируемости (на которое мы будем

¹Верхние индексы отвечают векторному пространству, а нижние дуальному к нему. Повторяющийся сверху и снизу индекс подразумевает спаривание между элементом пространства и элементом дуального к нему пространства.

²Сам символ внешнего произведения \wedge мы будем опускать в дальнейшем.

ссылаться как на обобщённое тождество Якоби или как на тождество Бьянки), получаемое применением d к (2.1)

$$F^{\mathcal{B}} \frac{\delta F^{\mathcal{A}}}{\delta W^{\mathcal{B}}} \equiv 0, \quad (2.3)$$

где подразумевается сумма по индексу \mathcal{B} , нумерующему векторные пространства.

Любое решение (2.3) определяет так называемую свободную дифференциальную алгебру (СДА) [127–130]. СДА представляет собой категориальное расширение алгебр Ли и тесно с ними связана. Если тождество Якоби (2.3) удовлетворяется независимо от размерности³ \mathcal{M}_d , то СДА называется универсальной [182, 183]. В дальнейшем мы будем рассматривать только развёрнутые уравнения на базе универсальных СДА, которые, как следствие универсальности, хорошо определены в любой достаточно большой размерности.

Как следствие универсальности развёрнутые уравнения (2.1) инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\delta_\epsilon W^{\mathcal{A}} = d\epsilon^{\mathcal{A}} - \epsilon^{\mathcal{B}} \frac{\delta F^{\mathcal{A}}}{\delta W^{\mathcal{B}}}, \quad \text{если } |\mathcal{A}| > 0, \quad (2.4)$$

$$\delta_\epsilon W^{\mathcal{A}} = -\epsilon^{\mathcal{B}'} \frac{\delta F^{\mathcal{A}}}{\delta W^{\mathcal{B}'}}}, \quad \mathcal{B}' : |\mathcal{B}'| = 1, \quad \text{если } |\mathcal{A}| = 0, \quad (2.5)$$

где калибровочный параметр $\epsilon^{\mathcal{A}}$ поля $W^{\mathcal{A}}$ является формой степени $(|\mathcal{A}| - 1)$ и принимает значение в том же векторном пространстве \mathcal{A} , что и $W^{\mathcal{A}}$.

Отметим, что все формы $W^{\mathcal{A}}$ степени большей нуля, $|\mathcal{A}| > 0$, представляют собой калибровочные поля, так как с каждым ассоциирован калибровочный параметр $\epsilon^{\mathcal{A}}$. Второе слагаемое в (2.4) и единственное в (2.5) соответствуют некоторым сдвиговым преобразованиям, которые могут отвечать алгебраическим (Штюкельберговым) калибровочным симметриям. Формы степени ноль могут преобразовываться только сдвиговым образом и поэтому не являются, строго говоря, калибровочными полями. Как будет видно в дальнейшем, они играют специальную роль.

Также отметим, что условие $\delta_\epsilon W^{\mathcal{A}} = 0$ инвариантности $W^{\mathcal{A}}$ относительно (2.4) можно рассматривать как развёрнутую систему уравнений по отношению к $\epsilon^{\mathcal{A}}$, калибровочные преобразования $\delta_\chi \epsilon^{\mathcal{A}}$ которой, с $(|\mathcal{A}| - 2)$ -формой $\chi^{\mathcal{A}}$, представляют собой приводимые калибровочные симметрии исходной системы, т.е. $\delta_\epsilon W^{\mathcal{A}} \equiv 0$, если $\epsilon^{\mathcal{A}} = \delta_\chi \epsilon^{\mathcal{A}}$. Следовательно, приводимость калибровочных симметрий явно заложена в развёрнутую систему уравнений, и поле $W^{\mathcal{A}}$ степени большей нуля, $|\mathcal{A}| > 0$, имеет ровно $|\mathcal{A}|$ уровней приводимости в калибровочной симметрии.

Тождество Якоби (2.3) может быть переписано как тождество

$$dR^{\mathcal{A}} - R^{\mathcal{B}} \frac{\delta F^{\mathcal{A}}}{\delta W^{\mathcal{B}}} \equiv 0 \quad (2.6)$$

для напряжённостей, что позволяет ссылаться на (2.3) и как на тождество Бьянки.

³Поскольку дифференциальные формы степени, превышающей размерность многообразия d , тождественно равны нулю, существуют некоторые тождества, например, $W_n \wedge W_n \equiv 0$, если $n + m > d$, которые могут сделать оператор $\frac{\delta}{\delta W^{\mathcal{A}}}$ плохо определённым, или, наоборот, обеспечивают зануление некоторых слагаемых в (2.3).

Сохраняющиеся величины. Легко могут быть описаны и сохраняющиеся величины, ассоциированные с какой-либо развёрнутой системой [131], а именно: условие сохранения для некоторой функции $C(W^{\mathcal{A}})$ полей $W^{\mathcal{A}}$ имеет вид

$$dC(W^{\mathcal{A}}) = F^{\mathcal{B}}(W) \frac{\delta C}{\delta W^{\mathcal{B}}} = 0, \quad (2.7)$$

т.е. сохраняющиеся токи отвечают когомологиями оператора $Q = F^{\mathcal{B}}(W) \frac{\delta}{\delta W^{\mathcal{B}}}$. Действительно, условие сохранения $C(W^{\mathcal{A}})$ есть условие Q -замкнутости, а добавление к $C(W^{\mathcal{A}})$ точной формы $C(W^{\mathcal{A}}) + dG(W^{\mathcal{A}})$, которая не даёт вклада в заряд, получаемый интегрированием $C(W^{\mathcal{A}})$ по гиперповерхности, на уравнениях движения эквивалентно добавлению Q -точной формы. Все калибровочно-инвариантные сохраняющиеся токи полей высших спинов в четырёхмерном пространстве Минковского были получены в [7], [184].

Использование языка дифференциальных форм позволяет описывать полевые системы в координатно-независимой форме, что особенно важно для систем, включающих в себя взаимодействие с гравитацией. Вся нетривиальная информация о динамике системы оказывается закодированной в алгебраической функции $F^{\mathcal{A}}(W)$. Отметим, что размерность d многообразия \mathcal{M}_d на самом деле явно нигде не фигурирует, что позволяет, например, легко переходить с одного базового многообразия на другое [183, 185, 186].

Среди применений развёрнутого подхода особо отметим полученное в [187, 188] координатно-независимое описание чёрнодырных решений всех известных типов, не апеллирующее к какой бы то ни было явной форме метрики, а также решение чёрнодырного типа в полной нелинейной теории высших спинов, полученное недавно в [189].

Очевидно, всегда возможно переписать любой набор дифференциальных уравнений в развёрнутой форме, вводя достаточное количество вспомогательных полей, хотя это может быть технически трудно, или требовать, как это имеет место для полевых систем, введения бесконечного количества вспомогательных полей.

2.2 Связь с алгебрами Ли

Свободные дифференциальные алгебры имеют прямое отношение к алгебрам Ли, объединяя в себе алгебры Ли, их представления и когомологии Шевалье-Эйленберга.

Алгебры Ли. Пусть $\Omega \equiv \Omega_{\mu} dx^{\mu}$ есть один-форма со значением в некотором векторном пространстве, а Ω^I представляют компоненты Ω в некотором базисе. Наиболее общие развёрнутые уравнения, которые можно наложить на Ω без введения других полей, имеют вид

$$d\Omega^I + f_{JK}^I \Omega^J \Omega^K = 0, \quad (2.8)$$

где f_{JK}^I - некоторые постоянные коэффициенты, антисимметричные по индексам J, K , так как один-формы антикоммутируют. Из обобщённого тождества Якоби (2.3) следует, что f_{JK}^I удовлетворяют обычному тождеству Якоби

$$f_{JK}^I f_{LM}^J \Omega^K \Omega^L \Omega^M \equiv 0 \quad \longleftrightarrow \quad f_{J[K}^I f_{LM]}^J \equiv 0 \quad (2.9)$$

и следовательно задают некоторую алгебру Ли \mathfrak{g} со структурными константами f_{JK}^I . Таким образом, замкнутый сектор один-форм развёрнутой системы определяет некоторую алгебру Ли. Развёрнутые уравнения (2.8) — не что иное, как условие плоской связности (нулевой кривизны), т.е. равенство нулю напряжённости Янга-Миллса для Ω .

Как будет подробно объяснено в следующем разделе, с помощью один-форм Ω^I можно эффективно описывать геометрию пространства-времени, т.е. фоновая геометрия задаётся как часть развёрнутых уравнений.

Стягиваемые СДА. Линейные по полям развёрнутые уравнения имеют вид

$$dW_q^A = f_{\ B}^A W_{q+1}^B. \quad (2.10)$$

Путём надлежащего выбора базиса в векторных пространствах мы всегда можем расщепить уравнения на два сорта

$$I : \quad dW_q^A + W_{q+1}^A = 0, \quad dW_{q+1}^A = 0, \quad (2.11)$$

$$II : \quad dW_q^A = 0, \quad (2.12)$$

где второе уравнение (2.11) является на самом деле следствием тождеств Бьянки (2.6) для первого уравнения. В первом случае калибровочные преобразования (2.4) $\delta W_q^A = d\xi_{q-1}^A - \chi_q^A$, $\delta W_{q+1}^B = d\chi_q^B$ позволяют добиться $W_q^A = 0$, а решение $dW_{q+1}^A = 0$ имеет вид чистой калибровки. Во втором случае, опять посредством леммы Пуанкаре, решения имеют вид чистой калибровки. Свободные дифференциальные алгебры, приводящие к уравнениям такого рода, называются стягиваемыми [127]. С динамической точки зрения такие развёрнутые уравнения не описывают степеней свободы и могут играть лишь вспомогательную роль.

Представления алгебр Ли/Уравнения ковариантного постоянства. Пусть W_q^A — некоторый подсектор q -форм калибровочных полей и связность Ω^I некоторой алгебры \mathfrak{g} удовлетворяет (2.8). Наиболее общие линейные по W_q^A развёрнутые уравнения имеют вид

$$dW_q^A + \Omega^I f_I^A_{\ B} W_q^B = 0. \quad (2.13)$$

Из обобщённого тождества Якоби (2.6), которое в секторе W_q^A может быть получено применением d к (2.13), после чего $d\Omega^I$ и dW_q^A подставляются из (2.8) и (2.13), соответственно, следует

$$\Omega^J \Omega^K (-f_{JK}^I f_I^A_{\ B} + f_J^A_{\ C} f_K^C_{\ B}) W_q^B = 0. \quad (2.14)$$

Следовательно, $f_I^A_{\ B}$ реализуют некоторое представление алгебры \mathfrak{g} . Таким образом, линейные развёрнутые уравнения в секторе q -форм однозначно определяются заданием некоторого представления алгебры \mathfrak{g} или \mathfrak{g} -модуля, а сами уравнения

$$D_\Omega W_q^A \equiv dW_q^A + \Omega^I f_I^A_{\ B} W_q^B = 0 \quad (2.15)$$

имеют вид условия ковариантного постоянства и $(D_\Omega)^2 = 0$ в силу (2.8).

В случаях, рассматриваемых ниже, индексы \mathcal{A} отвечает некоторым (спин)-тензорным модулям алгебры Лоренца, на которые разлагаются некоторые конечномерные представления алгебры Пуанкаре или (анти)-де Ситтера. В случае пространства (анти)-де Ситтера, алгебра симметрий которого сама имеет (спин)-тензорные представления, более эффективно работать сразу со связностями (или обобщёнными полями Янга-Миллса) алгебры (анти)-де Ситтера, что будет подробно рассмотрено в Главе 6.

Склейки модулей/Когомологии Шевалье-Эйленберга. Рассмотрим теперь наиболее общий вид развёрнутых уравнений линейных по всем полям, обозначенным $W^{\mathcal{A}}$, кроме Ω^I . Совокупность полей $W^{\mathcal{A}}$ удобно разбить на подсекторы, каждый из которых содержит формы одной и той же степени. Наиболее общий вид уравнений на поля в каждом таком подсекторе есть условие ковариантного постоянства (2.15) плюс возможные слагаемые, смешивающие поля из разных подсекторов. Такие слагаемые могут быть полиномиальны по Ω^I для обеспечения необходимой степени по формам. Если отбросить случай стягиваемых СДА, то Ω^I должны входить как минимум квадратично.

Предположим, что наборы форм W_p , W_q и W_r , $p > q > r$, принимают значения в \mathfrak{g} -модулях \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 и \mathcal{R}_3 , которые реализованы операторами T_1 , T_2 и T_3 соответственно. Тогда наиболее общие линейные по $W^{\mathcal{A}}$ уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} D_\Omega W_p &\equiv dW_p + T_1(\Omega)W_p = f_{12}(\Omega, \dots, \Omega)W_q, \\ D_\Omega W_q &\equiv dW_q + T_2(\Omega)W_q = f_{23}(\Omega, \dots, \Omega)W_r, \\ D_\Omega W_r &\equiv \dots, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где мы собрали $d + T(\Omega)$ в ковариантные производные в соответствующих модулях. Два \mathfrak{g} -модуля \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 оказываются «склеенными» посредством оператора $f_{12}(\Omega, \dots, \Omega) \in \text{Hom}(\Lambda^{p-q+1}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$. Из обобщённых тождеств Якоби (2.3) следует [183], что $f_{12}(\Omega, \dots, \Omega)$ — это некоторый представитель класса когомологий Шевалье-Эйленберга со значениями в $\text{Hom}(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$, и также что $f_{12}(\Omega, \dots, \Omega)f_{23}(\Omega, \dots, \Omega) = 0$.

Представители тривиального класса когомологий могут быть всегда удалены несингулярной заменой переменных [183]. Поэтому можно считать $f_{12}(\Omega, \dots, \Omega)$ представителями некоторых нетривиальных классов когомологий Шевалье-Эйленберга со значениями в $\text{Hom}(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$. Отметим, что уравнения для форм степени ноль не могут модифицироваться подобными добавками. Таким образом, наиболее общие линейаризованные уравнения на ноль-формы имеют вид условий ковариантного постоянства.

2.3 Фоновая геометрия в рамках развёрнутого подхода

Развёрнутые уравнения вида нулевой кривизны (2.8) позволяют описывать фоновую геометрию координатно-независимым образом. Далее для нас представляют интерес: пространства Минковского, де Ситтера и анти-де Ситтера, алгебры Ли \mathfrak{g} симметрий которых есть $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$, $\mathfrak{so}(d, 1)$ и $\mathfrak{so}(d-1, 2)$. В этих случаях связность \mathfrak{g} состоит из

тетрады $h^a \equiv h^a_\mu dx^\mu$ и Лоренцевой спин-связности $\varpi^{a,b} \equiv \varpi^{a,b}_\mu dx^\mu$. Условие плоской связности (2.8) принимает вид

$$T^a = dh^a + \varpi^a_b \wedge h^b = 0, \quad (2.17)$$

$$R^{a,b} = d\varpi^{a,b} + \varpi^a_c \wedge \varpi^{c,b} \pm \lambda^2 h^a \wedge h^b = 0, \quad (2.18)$$

где λ^2 — космологическая постоянная, $+\lambda^2$, $-\lambda^2$ и $\lambda^2 = 0$ соответствуют случаям анти-де Ситтера, де Ситтера и Минковского. Контракция $\lambda^2 \rightarrow 0$ переводит алгебры $\mathfrak{so}(d-1, 2)$ и $\mathfrak{so}(d, 1)$ в $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$.

Преимущества описания фоновой геометрии как условия нулевой кривизны для связности алгебры симметрий пространства-времени заключаются в том, что такое описание координатно-независимо и для всех вычислений, таких как, например, построения действия и т.д., не требуется какое-либо явное решение (2.17)-(2.18).

Уравнение (2.17) есть условие нулевого кручения, посредством которого Лоренцева спин-связность выражается через фоновую тетраду h^a_μ . Уравнение (2.18) фиксирует тензор Римана, точнее эквивалентную ему два-форму кривизны: в случае плоского пространства Минковского тензор Римана равен нулю, а в случае пространства постоянной кривизны, т.е. пространства (анти)-де Ситтера, тензор Римана выражается через метрику, т.е. соответствующая ему два-форма выражается через тетраду. Простейшее решение в случае плоской геометрии даётся декартовыми координатами, в которых связность равна нулю $\varpi^{a,b}_\mu = 0$, а тетрада есть просто единичная матрица $h^a_\mu = \delta^a_\mu$.

Типичным полем развёрнутой системы является q -форма $W_q^{ab..}$, имеющая некоторое количество Лоренцевых индексов, так называемая (обобщённая) связность алгебры Лоренца. Действие Лоренц-ковариантной производной $D = d + \varpi$ хорошо определено на любых связностях алгебры Лоренца:

$$DW_q^{ab..} = dW_q^{ab..} + \varpi^a_c W_q^{cb..} + \varpi^b_c W_q^{ac..} + \dots \quad (2.19)$$

Уравнение (2.17) можно переписать как $Dh^a = 0$. В пространстве Минковского как следствие (2.18) с $\lambda^2 = 0$ выполнено $D^2 = 0$.

Фоновая геометрия (анти)-де Ситтера в развёрнутом формализме. В случае пространства де Ситтера или анти-де Ситтера, алгебра симметрий которых является полупростой ортогональной алгеброй, возникают дополнительные упрощения по сравнению с пространством Минковского. Так связность алгебры (анти)-де Ситтера Ω может быть записана в компонентах как $\Omega^{A,B} \equiv \Omega^{A,B}_\mu dx^\mu$, $\Omega^{A,B} = -\Omega^{B,A}$, т.е. антисимметрична по касательным индексам пробегающим значения $A, B, \dots = 0, \dots, d$, опускаемым и поднимаемым с помощью инвариантной метрики η_{AB} . Тогда условие нулевой кривизны (2.8) или плоской связности для Ω примет вид

$$d\Omega^{A,B} + \Omega^A_c \wedge \Omega^{C,B} = 0. \quad (2.20)$$

Из связности $\Omega^{A,B}$ можно явно выделить фоновые тетраду и спин-связность

$$\Omega^{a,\bullet} = \lambda h^a, \quad \Omega^{a,b} = \varpi^{a,b}, \quad (2.21)$$

где \bullet обозначает лишнее значение индекса алгебры (анти)-де Ситтера по сравнению с алгеброй Лоренца, т.е. d в принятых соглашениях. Тогда (2.20) прямо сводится к (2.17)-(2.18). Однако такое разделение нарушает симметрию алгебры (анти)-де Ситтера до алгебры Лоренца. Как было показано в [21, 146], этого можно избежать, сохранив симметрию алгебры (анти)-де Ситтера явной. Для это нужно ввести нединамическое векторное поле $V^A(x)$, называемое компенсатором, нормированное⁴ на единицу $V^B V_B = \mp 1$. Подалгебра Лоренца тогда отождествляется с подалгеброй стабильности компенсатора. Оказывается [146], что калибровочными преобразованиями компенсатор можно установить в произвольном направлении, т.е. он не несёт степеней свободы.

Обобщённая фоновая тетрада $E_\mu^A dx^\mu$ определяется [21, 146] как ковариантная производная поля компенсатора

$$\lambda E^A = D_\Omega V^A = dV^A + \Omega^A_{\ B} V^B. \quad (2.22)$$

Требуется, чтобы E_μ^A имела максимальный ранг, порождая невырожденное поле тетрады h_μ^a . Тетрада ортогональна компенсатору $E^B V_B = 0$ вследствие (2.22). Лоренцева спин-связность Ω_L также может быть определена, используя только (анти)-де Ситтер ковариантные выражения, а именно [146]

$$\Omega_L^{A,B} = \Omega^{A,B} \mp \lambda(V^A E^B - E^A V^B), \quad (2.23)$$

что определяет Лоренц-ковариантную производную $D = d + \Omega_L$.

Как компенсатор V^A так и обобщённая тетрада E^A являются Лоренц-ковариантно постоянными

$$DV^A = 0, \quad DE^A = 0. \quad (2.24)$$

Можно выбрать так называемую стандартную калибровку для компенсатора, когда он направлен в лишнем по сравнению с выбранной алгеброй Лоренца направлении

$$V_A = \delta_{\bullet}^A, \quad (2.25)$$

$\bullet = d$, $A = a, \bullet$. Тогда $\lambda E^A = \Omega^A_{\bullet}$, $E_\mu^\bullet = 0$ и $\Omega_L^{a,b} = \Omega^{a,b}$, т.е. для фоновых тетрады h_μ^a Лоренцевой спин-связности $\varpi^{a,b}$ мы восстанавливаем выражения (2.21).

2.4 Линеаризованная развёрнутая система

Рассмотрим подробнее вопросы, связанные с линеаризованными развёрнутыми системами уравнений, описывающими свободные поля. Линейные развёрнутые уравнения являются первым шагом к нелинейной теории. Как будет отмечено в конце Главы 6, уже линейная развёрнутая система уравнений несёт много информации о нелинейной теории.

⁴Верхний/нижний знак отвечает пространству де Ситтера/анти-де Ситтера.

Общий вид линейных уравнений. Итак, если базовое многообразие \mathcal{M}_d есть однородное факторпространство⁵ $\mathcal{M}_d = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, где \mathfrak{g} и \mathfrak{h} соответственно алгебры Ли групп \mathfrak{G} и \mathfrak{H} , то наиболее общая форма развёрнутых линеаризованных уравнений на \mathcal{M}_d имеет вид [183]

$$R^I = d\Omega^I + f_{JK}^I \Omega^J \Omega^K = 0, \quad (2.26)$$

$$R^A = dW^A + f_B^A W^B + \Omega^I f_I^A W^B + \dots + \Omega^{I_1} \dots \Omega^{I_k} f_{I_1 \dots I_k}^A W^B = 0, \quad (2.27)$$

где Ω есть один-форма связности алгебры \mathfrak{g} , Ω^I — компоненты Ω в некотором базисе, а f_{JK}^I структурные константы \mathfrak{g} ; $f_{I_1 \dots I_k}^A \equiv 0$, если не выполнено $|\mathcal{A}| + 1 = |\mathcal{B}| + k$.

Полный набор полей развёрнутой системы состоит из двух частей: (а) один-формы Ω^I описывают фоновую геометрию посредством условия нулевой кривизны (2.26) и имеют нулевой порядок малости; (б) поля флуктуаций W^A , которые могут быть формами произвольных степеней, имеют первый порядок малости, а уравнения линейны по W^A . Заметим, что уравнения линейны только по W^A , но могут содержать нелинейные вклады по фоновой связности Ω^I .

Удобно определить обобщённую ковариантную производную \mathcal{D}

$$\mathcal{D} = f_B^A (\delta_B^A d + \Omega^I f_I^A) + \dots + \Omega^{I_1} \dots \Omega^{I_k} f_{I_1 \dots I_k}^A, \quad (2.28)$$

действующую на всё пространство \mathcal{W}_q полей материи

$$\mathcal{W}_q = \{W^{\mathcal{B}}, W^{\mathcal{C}}, \dots, W^{\mathcal{D}}\}, \quad q = \max_{\mathcal{A}} |\mathcal{A}|. \quad (2.29)$$

Тогда можно также определить пространства $\mathcal{W}_{q \pm i}$ дифференциальных форм со значениями в тех же модулях что и поля из \mathcal{W}_q , но со степенью форм, сдвинутой на $\pm i$. Если для какого-либо \mathcal{B} и i имеем $|\mathcal{B}| - i < 0$, то соответствующий элемент \mathbf{W}_{q-i} отсутствует.

Калибровочные параметры для полей флуктуаций из \mathcal{W}_q принимают значения в \mathcal{W}_{q-1} , калибровочные параметры приводимых симметрий принимают значения в \mathcal{W}_{q-k} , $k > 1$. Напряжённости $R_{q+1} = \mathcal{D}W_q$ полей $W_q \in \mathcal{W}_q$ принимают значения в \mathcal{W}_{q+1} . Старшие пространства \mathbf{W}_{q+i} , $i > 1$ отвечают (приводимым) тождествам Бьянки. В условии нильпотентности $\mathcal{D}^2 = 0$, сводящемуся к (2.6), закодированы все условия на константы $f_{I_1 \dots I_k}^A$.

Следовательно, наиболее общие развёрнутые уравнения имеют вид условий обобщённого ковариантного постоянства, а полная система, с калибровочными преобразованиями имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \xi_1 &= \mathcal{D} \xi_0, & \xi_0 &\in \mathcal{W}_0, \\ &\dots, & & \dots, \\ \delta \xi_{p-1} &= \mathcal{D} \xi_{p-2}, & \xi_{p-2} &\in \mathcal{W}_{p-2}, \\ \delta W_p &= \mathcal{D} \xi_{p-1}, & \xi_{p-1} &\in \mathcal{W}_{p-1}, \\ \mathcal{D} W_p &= 0, & W_p &\in \mathcal{W}_p. \end{aligned} \quad (2.30)$$

⁵Интерес представляют следующие однородные пространства: Минковского $\mathfrak{G} = ISO(d-1, 1)$, $\mathfrak{H} = SO(d-1, 1)$, анти-де Ситтера $\mathfrak{G} = SO(d-1, 2)$, $\mathfrak{H} = SO(d-1, 1)$, де Ситтера $\mathfrak{G} = SO(d, 1)$, $\mathfrak{H} = SO(d-1, 1)$, и 10-мерное пространство с $\mathfrak{G} = SP(8)$ и \mathfrak{H} — максимальной параболической подгруппой \mathfrak{G} , в котором симметрии полей в 4-мерном пространстве имеют геометрическую реализацию [183, 185, 186].

Существование на $\mathcal{W}_{q\pm i}$ нильпотентного дифференциала \mathcal{D} позволяет определить *развёрнутый комплекс* $\mathcal{C}(\mathcal{W}, \mathcal{D})$,

$$\mathcal{W}_0 \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{W}_1 \xrightarrow{\mathcal{D}} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{W}_{q-1} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{W}_q \xrightarrow{\mathcal{D}} \dots \quad . \quad (2.31)$$

Поскольку мы будем описывать калибровочные поля, то среди \mathcal{W}_q обязательно присутствуют формы степени большей нуля, так как именно для таких форм имеется калибровочная симметрия (2.4). Поскольку условие $\mathcal{D}W_q = 0$ может быть проинтерпретировано как условие замкнутости, а \mathcal{D} как аналог обычной ковариантной производной D_Ω , можно заключить, что решения развёрнутых уравнений параметризуются в силу леммы Пуанкаре значениями ноль-форм в точке. То есть для того, чтобы описывать физические степени свободы среди полей \mathcal{W}_q , должны присутствовать ноль-формы, а поскольку поля — это системы с бесконечным числом степеней свободы, то ноль-форм должно быть бесконечное число.

Формы, степень которых больше нуля, составляют *калибровочный модуль*, поскольку с каждой из них ассоциирован калибровочный параметр. Ноль-формы составляют *вейлевский модуль* $\mathcal{W}^{\text{Weyl}}$.

2.5 Интерпретация развёрнутых систем, σ_- -КОГОМОЛОГИИ

При надлежащем выборе градуировки на пространстве полей линеаризованные развёрнутые уравнения имеют вид

$$dW^k = \sigma_-(W^{k+1}), \quad (2.32)$$

где σ_- есть некоторый алгебраический оператор градуировки -1 . Дифференциал d имеет градуировку 0. Большая часть соотношений, содержащихся в (2.32), описывает связи, позволяющие разрешить уравнения и выразить W^{k+1} через производные W^k . Иногда, однако, оператор σ_- необратим, что приводит к уравнению вида $dW^k = 0$, или, если поле W^k выражается через производные некоторого W^n , $n < k$, необратимость оператора приводит к наложению на W^n дифференциального уравнения порядка $(n - k + 1)$. Также в развёрнутых уравнениях присутствует большая алгебраическая калибровочная симметрия, описываемая вторым слагаемым в (2.4), позволяющая откалибровать в ноль некоторые поля. Всё это приводит к необходимости выработки критерия, позволяющего судить, какие поля и калибровочные параметры в развёрнутой системе являются физическими и какие дифференциальные уравнения на них наложены.

Отказавшись от языка дифференциальных форм можно проинтерпретировать все поля как некоторые мировые тензоры алгебры Лоренца, т.е. перейти к метрическому формализму, тогда схематически развёрнутая система может быть сведена к

форме⁶

$$\partial \dots \partial W^{dyn} = 0, \quad \delta W^{dyn} = \partial \dots \partial \xi^{diff}, \quad (2.33)$$

$$W^{Stueck} = 0, \quad \xi^{Stueck} = 0, \quad (2.34)$$

$$W^{aux} = \partial \dots \partial W^{dyn}, \quad \xi^{aux} = \partial \dots \partial \xi^{diff}, \quad (2.35)$$

и вводится следующая классификация полей и калибровочных параметров [184]:

динамические поля, W^{dyn} . Динамическими полями называются те поля, которые не могут быть положены равными нулю путём наложения чисто алгебраических калибровок, а также не выражаются через производные других полей, т.е. представляют собой настоящие физические поля, как, например, скалярное поле $\phi(x)$ или вектор-потенциал $A_\mu(x)$.

дифференциальные калибровочные параметры, ξ^{diff} . Аналогичную динамическим полям роль среди калибровочных параметров играют дифференциальные калибровочные параметры, т.е. те параметры, которые не могут быть положены равными нулю с помощью алгебраических калибровок по отношению к приводимой калибровочной симметрии, а также сами не могут быть использованы для наложения алгебраических калибровок на поля и другие параметры.

поля и калибровочные параметры Штюкельберга, W^{Stueck} , ξ^{Stueck} . Штюкельберговыми полями или калибровочными параметрами называются те поля (параметры), которые могут быть положены равными нулю путём наложения чисто алгебраических калибровок, т.е. закон (приводимых) калибровочных преобразований для них имеет вид $\delta W^{Stueck} = \partial \xi + \xi^{aux}$ и выбором ξ^{aux} поле W^{Stueck} может быть положено в ноль.

вспомогательные поля и калибровочные параметры, W^{aux} , ξ^{aux} . Вспомогательными полями называются те поля, которые выражаются посредством решения уравнений через производные других полей, в конечном счёте через производные динамических полей. Соответственно, вспомогательными параметрами называются те параметры, которые как следствие остаточных калибровочных преобразований $0 = \delta W^{Stueck} = \partial \xi + \xi^{aux}$ после исключения Штюкельберговых полей оказываются выраженными через производные других параметров, в конечном итоге через ξ^{diff} .

Следует заметить, что разбиение полей, например, на вспомогательные и динамические, может быть неоднозначно, например, в системе

$$\partial A = B, \quad \partial B = A, \quad (2.36)$$

какое из поле считать динамическим, а какое вспомогательным есть вопрос соглашения [184, 190].

⁶ $\partial \dots \partial$ обозначают некоторые дифференциальные операторы, составленные из производных (вообще говоря, ковариантных производных).

По развёрнутому комплексу $\mathcal{C}(\mathcal{W}, \mathcal{D})$ можно построить некоторый другой, уже чисто алгебраический комплекс, называемый σ_- -комплексом, когомологии которого отвечают динамическим полям или дифференциальным параметрам, точные формы отвечают Штюкелберговым полям и параметрам, а незамкнутые поля и параметры соответствуют вспомогательным полям и параметрам.

Перейдём к описанию техники σ_- -когомологий. Предположим, что все поля в развёрнутой системе можно упорядочить некоторым образом, а именно существует ограниченная снизу градуировка $g = 0, 1, \dots$. Поле в градуировке g есть некоторая форма (или набор форм) ω_{qg}^g степени qg , для простоты будем считать, что все поля есть формы степени q . Выделим из обобщённой ковариантной производной \mathcal{D} , которая, в случае если все поля имеют одну и ту же степень, совпадает с обычной ковариантной производной, дифференциальную часть, связанную с Лоренц-ковариантной производной D . Тогда остаток \mathcal{D} представляет собой некоторый уже чисто алгебраический оператор σ_- градуировки (-1) и возможно ещё операторы положительной градуировки, которые мы опустим, поскольку они не влияют на рассуждения ниже. Выражения для напряжённостей, законы калибровочных преобразований и тождества Бьянки для напряжённостей имеют вид

$$\delta \xi_1^g = D \xi_0^k + \sigma_- (\xi_0^{g+1}), \quad (2.37)$$

$$\dots = \dots, \quad (2.38)$$

$$\delta \xi_{q-1}^g = D \xi_{q-2}^g + \sigma_- (\xi_{q-2}^{g+1}), \quad (2.39)$$

$$\delta \omega_q^g = D \xi_{q-1}^g + \sigma_- (\xi_{q-1}^{g+1}), \quad (2.40)$$

$$R_{q+1}^g = D \omega_q^g + \sigma_- (\omega_q^{g+1}), \quad (2.41)$$

$$0 = DR_{q+1}^g + \sigma_- (R_{q+1}^{g+1}). \quad (2.42)$$

Выполнение тождеств Якоби (2.3) или формальная совместность уравнений требует, чтобы σ_- был нильпотентным оператором, $\sigma_-^2 = 0$, а также $\{D, \sigma_-\} = 0$. Последнее автоматически выполнено, поскольку σ_- устроен из фоновых тетрад.

Наличие нильпотентного оператора подразумевает задачу поиска его когомологий. Посмотрим, чему они соответствуют. Начнём с низшей градуировки и с калибровочных преобразований на самом глубоком уровне, т.е. для ξ_1 . Очевидно, что σ_- -точные параметры ξ_1^g могут быть сдвинуты в ноль наложением чисто алгебраической калибровки с некоторым ξ_0^{g+1} . Только те из ξ_0 являются настоящими дифференциальными параметрами, которые принадлежат ядру σ_- и не могут быть использованы для наложения алгебраических калибровок. Поскольку ноль-формы не могут быть точными, то дифференциальные калибровочные параметры среди ноль-форм описываются представителями σ_- -когомологий в степени ноль, $H^0(\sigma_-)$. Продолжая аналогично с ξ_2 и ξ_1 , видим, что только те ξ_1 являются дифференциальными калибровочными параметрами, которые принадлежат ядру σ_- и, следовательно, не могут быть использованы для того, чтобы откалибровать некоторые ξ_2 , а также не являются σ_- -точными, так как σ_- -точные были откалиброваны в ноль на первом шаге. Таким образом дифференциальные параметры среди ξ_1 даются представителями $H^1(\sigma_-)$. Продолжая «просеивать» поля степень за степенью, приходим к выводу, что все динамически значимые величины являются представителями σ_- -когомологий.

Таблица 2.1: В таблице показана интерпретация групп σ_- -когомологий при условии, что поля принадлежат \mathcal{W}_q , см. (2.29).

группа когомологий	интерпретация
$H^{q-i}, i = 1, \dots, q$	дифференциальные калибровочные параметры на i -ом уровне приводимости
H^q	динамические поля
H^{q+1}	независимые калибровочно-инвариантные уравнения на динамические поля
H^{q+2}	тождества между уравнениями на динамические поля
$H^{q+i+1}, i = 2, \dots$	тождества Бьянки i -го уровня
$H^{2q+2+k}, k = 0, 1, \dots$	ожидаются пустыми в случае обычных калибровочных полей

Отметим отдельно что σ_- -точные компоненты напряжённости R_{q+1}^g могут быть положены в ноль алгебраическим сдвигом полей, а σ_- -незамкнутые компоненты R_{q+1}^g посредством тождеств Бьянки выражаются через производные напряжённости R_{q+1}^{g-1} в более низкой градуировке. Следовательно представители $H^{q+1}(\sigma_-)$ отвечают независимым уравнениям на динамические поля. Сами тождества Бьянки тоже могут быть не независимы, поэтому старшие группы когомологий могут оказаться непустыми. Так и получается для калибровочных полей. Результаты по интерпретации σ_- -когомологий собраны в таблице 2.1

Уместно сделать следующие замечания:

1. Упомянутый уже произвол в выборе динамических и вспомогательных полей закодирован в выборе градуировки и оператора σ_- . На практике этот произвол оборачивается дополнительным полезным свойством развёрнутых систем уравнений, а именно различные выборы σ_- отвечают дуальным описаниям той же системы, но в терминах других динамических полей. Явные примеры будут предъявлены ниже. Однако, как отмечается в Главе 1, все дуальные описания по-видимому страдают теми или иными патологиями, а фундаментальным представляется описание полей в терминах потенциалов, что однозначно фиксирует σ_- и градуировку, так как потенциал есть тензорное поле наименьшего ранга среди всех описаний. По этой причине в качестве градуировки удобно выбирать ранг тензоров, так что динамические поля группируются в низших градуировках.

2. Количество производных, связывающих представителей $H_{g_1}^{q'}$ и $H_{g_2}^{q'+1}$, равно $(g_2 - g_1 + 1)$. Это означает, что если, например, $H_{g_1}^{q'}$ и $H_{g_2}^{q'+1}$ отвечают дифференциальному калибровочному параметру и динамическому полю, то закон калибровочных пре-

образований содержит $(g_2 - g_1 + 1)$ производных (на самом деле закон имеет вид $\delta W^{dyn} = \partial \xi^{aux}$, но ξ^{aux} сам выражается после наложения всех калибровок в виде $\xi^{aux} = \partial \dots \partial \xi^{diff}$). Если $\mathbf{H}_{g_1}^{q'}$ и $\mathbf{H}_{g_2}^{q'+1}$ отвечают динамическому полю и уравнению, то последнее содержит производные $(g_2 - g_1 + 1)$ -го порядка, и т.д.

Поскольку порядок производных в уравнениях или законе калибровочных преобразований является одним из ключевых мест, рассмотрим подробнее как старшие производные могут появиться в законе (2.40). Предположим, что $\mathbf{H}_{g_1}^{q-1} \sim \xi_{q-1}^{g_1}$ и отсутствуют дифференциальные калибровочные параметры в старших градуировках, т.е. $\mathbf{H}_k^{q-1} = \emptyset$ для $k = g_1 + 1, \dots, g_2$. На все σ_- -точные поля ${}^e\omega_q^{g_1}$ в $\omega_q^{g_1}$ с помощью $\xi_{q-1}^{g_1+1}$ может быть наложена калибровка ${}^e\omega_q^{g_1} = 0$. Поскольку при ограничении на ${}^e\omega_q^{g_1} = 0$ оператор σ_- обратим, из закона остаточных калибровочных преобразований $0 = \delta({}^e\omega_q^{g_1}) = \partial \xi_{q-1}^{g_1} + \sigma_-(\xi_{q-1}^{g_1+1})$ можно выразить $\xi_{q-1}^{g_1+1}$ через первые производные $\xi_{q-1}^{g_1}$,

$$\xi_{q-1}^{g_1+1} = \partial \xi_{q-1}^{g_1}. \quad (2.43)$$

Аналогичным образом, накладывая алгебраические калибровки на $\delta({}^e\omega_q^{g_1+1})$, из закона остаточных калибровочных преобразований для него, куда подставлено (2.43),

$$\delta({}^e\omega_q^{g_1+1}) = \partial \xi_{q-1}^{g_1+1} + \sigma_-(\xi_{q-1}^{g_1+2}) = \partial \partial \xi_{q-1}^{g_1} + \sigma_-(\xi_{q-1}^{g_1+2}) \quad (2.44)$$

можно выразить $\xi_{q-1}^{g_1+2}$ через вторые производные $\xi_{q-1}^{g_1}$ и т.д. Если $\mathbf{H}_{g_2}^q$ не пусто и содержит некоторое динамическое ${}^d\omega_q^{g_2}$ поле, то для него получится закон калибровочных преобразований вида $\delta({}^d\omega_q^{g_2}) = \partial^{g_2-g_1+1} \xi_{q-1}^{g_1}$.

Наличие кроме σ_- операторов с положительной градуировкой не меняет рассуждения, однако теперь закон калибровочных преобразований может содержать также ряд слагаемых с производными $\xi_{q-1}^{g_1}$ меньшего порядка, как это имеет место для частично-безмассовых полей, рассмотренных Главе 5.

3. Предположение о том, что все поля представлены q -формами несущественно для анализа, все утверждения применимы и для пространства полей \mathcal{W}_q общего положения, когда элементы \mathcal{W}_q могут быть формами различных степеней. Также не влияет на анализ и наличие операторов с положительной градуировкой.

4. Как мы покажем на некоторых примерах, знание σ_- -когомологий позволяет также прямо посчитать количество физических степеней свободы, т.е. найти представление малой алгебры Вигнера, параметризующее задачу Коши. А вывод о том, что данная система развёрнутых уравнений описывает неприводимое представление, можно сделать вообще без вычислений, если известны σ_- -когомологии.

5. Тот факт, что уравнения могут допускать лагранжиан и наличие связей первого и второго рода, также находит своё отражение на σ_- -когомологиях. В частности, для системы со связями первого рода, допускающей лагранжиан, имеется дуальность вида $\mathbf{H}^{q-k} \sim \mathbf{H}^{q+1+k}$, $k \in [0, q]$, говорящая о взаимнооднозначном соответствии между динамическими полями и уравнениями на них, дифференциальными калибровочными параметрами и независимыми тождествами Бьянки. Мы явно продемонстрируем

это на примере безмассовых полей произвольного типа симметрии в пространстве Минковского, а построенный лагранжиан будет существенно проще известного в метрическом подходе лагранжиана Лабастиды [90].

6. Отдельно следует сказать о взаимосвязи σ_- -когомологий для калибровочного и Вейлевского модуля. Допустим, как это и будет на практике, что выбор σ_- и градуировки допускает разделение калибровочного и Вейлевского модуля, т.е. можно положить связывающий их коцикл Шевалье-Эйленберга равным нулю, после чего градуировка в калибровочном модуле станет ограниченной не только снизу, но и сверху, а в Вейлевском модуле будет ограничена снизу, но по-прежнему неограничена сверху. Строго говоря это значит, что у σ_- -комплекса $\mathcal{C}(\mathcal{W}, \sigma_-)$ имеется подкомплекс $\mathcal{C}(\mathcal{W}^{Gauge}, \sigma_-)$ и фактор-комплекс $\mathcal{C}(\mathcal{W}^{Weyl}, \sigma_-) = \mathcal{C}(\mathcal{W}, \sigma_-) / \mathcal{C}(\mathcal{W}^{Gauge}, \sigma_-)$. Теперь можно рассмотреть отдельно задачи о вычислении σ_- когомологий в калибровочном и Вейлевском модулях. Это даёт первый член спектральной последовательности, которая в данном случае обрывается уже на второй итерации, так как когомологии $H(\mathcal{W}, \sigma_-)$ исходного комплекса $\mathcal{C}(\mathcal{W}, \sigma_-)$ есть когомологии комплекса

$$0 \longrightarrow H(\mathcal{W}^{Gauge}, \sigma_-) \xrightarrow{\delta} H(\mathcal{W}^{Weyl}, \sigma_-) \longrightarrow 0, \quad (2.45)$$

где элементами являются соответственно когомологии $H(\mathcal{W}^{Gauge}, \sigma_-)$ и $H(\mathcal{W}^{Weyl}, \sigma_-)$ подкомплекса $\mathcal{C}(\mathcal{W}^{Gauge}, \sigma_-)$ и фактор-комплекса $\mathcal{C}(\mathcal{W}^{Weyl}, \sigma_-)$, а оператор δ наследуется из σ_- .

В случае общего положения динамические поля и дифференциальные калибровочные параметры являются представителями групп $H(\mathcal{W}^{Gauge}, \sigma_-)$, им же принадлежат и уравнения на динамические поля. $H^0(\mathcal{W}^{Weyl}, \sigma_-)$ не могут быть пусты как ноль-формы. Оказывается, что $H(\mathcal{W}^{Gauge}, \sigma_-)$ в секторе уравнений, т.е. в степени $q + 1$ содержит кроме самих уравнений ещё и представителя отвечающего некоторой калибровочно-инвариантной комбинации производных динамических полей, вообще говоря, старше второго порядка по производным, такая комбинация называется обобщённым тензором Вейля. Тензор Вейля параметризует те производные динамических полей, которые могут оставаться отличными от нуля на уравнениях движения. В случае безмассового поля спина 2 обобщённый тензор Вейля совпадает с обычным тензором Вейля и, как мы знаем, вакуумные уравнения Эйнштейна зануляют лишь тензор Риччи, тогда как тензор Вейля произволен в точке и глобально ограничен лишь тождествами Бьянки. По-другому наличие тензора Вейля можно понимать как необходимое условие для того, чтобы полевая система описывала физические степени свободы, так как уравнения $D_\Omega W_q = 0$ при $q > 1$, требующие равенства нулю всех представителей $H^{q+1}(\mathcal{W}^{gauge}, \sigma_-)$, в силу леммы Пуанкаре имеют только решения в виде чистой калибровки. Поэтому для описания нетривиальной динамики необходимо, чтобы некоторые компоненты напряжённости были отличны от нуля $D_\Omega W_q = C$. Именно они параметризуются обобщённым тензором Вейля.

$H^{q+1}(\mathcal{W}^{gauge}, \sigma_-)$ можно представить в виде суммы левых частей уравнений и тензора Вейля

$$H^{q+1}(\mathcal{W}^{gauge}, \sigma_-) = \text{Equations} \oplus \text{Weyl}. \quad (2.46)$$



Рис. 2.1: Изображена структура σ -когомологий в общем случае: показано положение дифференциальных калибровочных параметров (в том числе и для приводимых калибровочных симметрий), динамических полей, уравнений и тождеств Бьянки для них, а также положение обобщённого тензора Вейля и тождеств Бьянки для него. Последние две структуры изоморфны когомологиям в Вейлевском модуле и сокращаются в полном комплексе отображением δ .

Представители в старших степенях $H^{q+k}(\mathcal{W}^{gauge}, \sigma_-)$, $k = 2, \dots$ отвечают тождествам Бьянки для тензора Вейля. Тот же самый тензор Вейля является и представителем $H^0(\mathcal{W}^{Weyl}, \sigma_-)$, а старшие группы $H^k(\mathcal{W}^{Weyl}, \sigma_-)$, $k = 1, \dots$ содержат те же самые тождества Бьянки. Оператор δ переводит представителей $H(\mathcal{W}^{Weyl}, \sigma_-)$, соответствующих тензору Вейля и тождествам Бьянки для него, в аналогичные представители $H(\mathcal{W}^{gauge}, \sigma_-)$. Таким образом, в полном развёрнутом комплексе $\mathcal{C}(\mathcal{W}, \sigma_-)$ присутствуют только когомологии, отвечающие дифференциальным калибровочным параметрам, динамическим полям, уравнениям и тождествам Бьянки для последних. Поэтому всё, связанное с тензорами Вейля, отсутствует в таблице 2.1. Однако замечания по поводу увеличения динамически значимых когомологий в случае разбиения на калибровочный модуль и вейлевский будут для нас важны в дальнейшем. Сказанное проиллюстрировано на рис. 2.1

В отдельных случаях картина может вырождаться в ту или иную сторону: в случае поля спина 1 тензор Вейля совпадает с тензором напряжённости Максвелла, а уравнения перемещаются в вейлевский модуль; для скалярного поля калибровочный модуль вообще отсутствует.

7. Поскольку в силу леммы Пуанкаре именно вейлевский модуль параметризует решения развёрнутой системы уравнений, и именно он посредством дуальности Боголюбова [191] связан с неприводимым бесконечномерным представлением алгебры пространственно-временных симметрий, то, вообще говоря, минимальные развёрнутые уравнения, описывающие требуемое представление, реализуются вейлевским модулем, и, казалось бы, без калибровочного модуля можно вообще обойтись. Однако, как хорошо известно, взаимодействия реализуются именно калибровочными полями. Поэтому калибровочный модуль также необходим. Существование дуальных описаний приводит к тому, что к одному и тому же Вейлевскому модулю можно подклеивать разные калибровочные модули, из которых только один отвечает фундаментальному описанию в терминах потенциалов и который мы и будем рассматривать в дальнейшем. В некоторых случаях: всегда для безмассовых полей в пространстве Минковского и при специальных значениях параметра массы для массивных полей в пространстве (анти)-де Ситтера, в комплексе $\mathcal{C}(\mathcal{W}, \sigma_-)$ могут возникать другие подкомплексы, отличные от $\mathcal{C}(\mathcal{W}^{Gauge}, \sigma_-)$, и соответствующие фактор-комплексы, отличные от $\mathcal{C}(\mathcal{W}^{Weyl}, \sigma_-)$, — это также приводит к дуальным описаниям.

2.6 Примеры разворачивания. Поле спина s

Ниже приведен известный пример линейной развёрнутой системы, адаптированные к введённым обозначениям. Для простоты рассмотрены поля в пространстве Минковского.

Безмассовое поле спина s представляет собой первый нетривиальный пример, с рассмотрения которого [41, 146, 147] и берёт начало развёрнутый подход как таковой, и именно теория симметричных полей показала преимущество развёрнутого подхода по сравнению с другими. Как было показано в [171], поле спина s может быть описано дважды-бесследовым симметричным тензорным полем $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ ранга- s , удовлетворя-

ющим (1.35). Уравнения движения второго порядка по производным инвариантны относительно калибровочной симметрии первого порядка с калибровочным параметром, представленным симметричным бесследовым тензором $\xi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}}$ ранга- $(s-1)$.

Поскольку высота диаграммы \boxed{s} малой алгебры Вигнера $\mathfrak{so}(d-2)$ равна единице, существуют калибровочные симметрии только первого уровня. Поэтому основное поле в спектре полей развёрнутой системы, которое содержит поле Фронсдала, должно быть один-формой. Существует единственный способ вложить $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ и $\xi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}}$ в некоторые один-форму $e_1^{Y_0}$ и ноль-форму $\xi_0^{Y_0}$ со значениями в одном и том же модуле алгебры Лоренца \mathbf{F}_0 , а именно $\mathbf{F}_0 = \boxed{s-1}$, т.е. $e_1^{a(s-1)}$ и $\xi_0^{a(s-1)}$ симметричны и бесследовы по $(s-1)$ -му касательному индексу, [40].

Поле $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ вкладывается как максимально симметричная компонента обобщённого репера $e_1^{a(s-1)}$, т.е.

$$\phi_{\mu_1 \dots \mu_s} = h_{(\mu_1}^{b_1} \dots h_{\mu_{s-1}}^{b_{s-1}} e_{\mu_s)}^{a_1 \dots a_{s-1}} \eta_{a_1 b_1} \dots \eta_{a_{s-1} b_{s-1}},$$

или в касательных компонентах $\phi^{a(s)} = e_\mu^{a(s-1)} h^{a\mu}$. Условие дважды-бесследовости, весьма необычное с метрической точки зрения, теперь объясняется как простое следствие бесследовости репера $e_1^{a(s-1)}$ по касательным индексам $a_1 \dots a_{s-1}$ и отсутствия каких-либо следовых условий по касательному и мировому индексам.

$\xi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}}$ прямо отождествляется с касательной версией $\xi_0^{a(s-1)}$

$$\xi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}} = h_{\mu_1}^{b_1} \dots h_{\mu_{s-1}}^{b_{s-1}} \xi^{a_1 \dots a_{s-1}} \eta_{a_1 b_1} \dots \eta_{a_{s-1} b_{s-1}}.$$

Легко видеть, что для поля Фронсдала из $\delta e_1^{a(s-1)} = d\xi_0^{a(s-1)}$ следует правильный закон преобразований.

Однако отсутствие каких-либо условий симметрии между касательными индексами и индексом формы приводит к тому, что обобщённый репер $e_\mu^{a(s-1)}$ содержит больше компонент, чем поле Фронсдала. Переходя к касательной версии репера $e^{a(s-1)|b} = e_\mu^{a(s-1)} h^{\mu b}$, разложение имеет вид

$$e^{a(s-1)|b} = \frac{1}{s} \phi^{a(s-1)b} + \frac{1}{s} \psi^{a(s-1),b}, \quad (2.47)$$

и наряду с полем Фронсдала $\phi^{a(s)} = e^{a(s-1)|a}$ присутствует поле

$$\psi^{a(s-1),b} = (s-1) (e^{a(s-1)|b} - e^{ba(s-2)|a}), \quad (2.48)$$

с типом симметрии $\boxed{s-1}$, т.е. $\psi^{a(s-1),a} = 0$. Следы $\phi^{a(s)}$ и $\psi^{a(s-1),b}$ не независимы, а связаны соотношением

$$\phi^{a(s-2)m}{}_m = \frac{s-2}{s} \psi^{a(s-2)m}{}_m. \quad (2.49)$$

Второй след ϕ и ψ тождественно обращается в ноль, поскольку $e_\mu^{a(s-1)}$ бесследов по касательным индексам и взятие второго следа приводит к свёртке как минимум двух касательных индексов.

Таким образом, по сравнению с полем Фронсдала репер $e_\mu^{a(s-1)}$ содержит ещё одну компоненту, эквивалентную бесследовому тензору $\tilde{\psi}^{a(s-1),b}$ с симметрией $\boxed{s-1}$. Разложение репера имеет вид

$$e^{a(s-1)|b} = \frac{1}{s} \phi^{a(s-1)b} + \tilde{\psi}^{a(s-1),b} + \frac{(s-2)(s-1)}{s(d+s-4)} \left[\eta^{ab} \phi^{a(s-2)m}{}_m - \eta^{aa} \phi^{ba(s-3)m}{}_m \right]. \quad (2.50)$$

Для того чтобы компенсировать нежелательные степени свободы, ассоциирующиеся с $\tilde{\psi}^{a(s-1),b}$, следует ввести алгебраическую калибровочную симметрию с неприводимым параметром $\xi^{a(s-1),b}$, имеющем симметрию $\boxed{s-1}$, [40]. Добавка в калибровочный закон должна иметь вид $\delta e^{a(s-1)|b} = \xi^{a(s-1),b}$, что в декартовых координатах записывается как $\delta e_m^{a(s-1)} dx^m = \xi^{a(s-1),m} dx^m$. Последнему выражению можно придать смысл в любой системе координат, если отождествить $\xi^{a(s-1),b}$ с ноль-формой $\xi_0^{a(s-1),b}$ и трансформировать касательный индекс 'b' в индекс формы с помощью фоновой тетрады $h_\mu^b dx^\mu$

$$\delta e_1^{a(s-1)} = D \xi_0^{a(s-1)} + h_b \wedge \xi_0^{a(s-1),b}. \quad (2.51)$$

В рамках развёрнутого подхода введение новой калибровочной симметрии говорит о том, что существует калибровочное поле один-форма $\omega_1^{a(s-1),b}$, которое входит в уравнения для $e_1^{a(s-1)}$ следующим образом:

$$de_1^{a(s-1)} = h_c \omega_1^{a(s-1),c}, \quad (2.52)$$

и имеет закон калибровочных преобразований вида

$$\delta \omega_1^{a(s-1),b} = D \xi_0^{a(s-1),b}. \quad (2.53)$$

Решение тождеств Бьянки $h_c d\omega_1^{a(s-1),c} \equiv 0$, на котором мы не будем подробно останавливаться, поскольку оно будет получено ниже в общем случае, имеет вид

$$d\omega_1^{a(s-1),b} = h_c \omega_1^{a(s-1),bc}, \quad (2.54)$$

где введено новое поле — один-форма со значениями в $\boxed{s-1}$. Калибровочный параметр $\xi_0^{a(s-1),bb}$ нового поля даёт дополнительный чисто алгебраический вклад в (2.53) вида $\delta \omega_1^{a(s-1),b} = h_m \xi_0^{a(s-1),bm}$. Аналогично, продолжая решать тождества Бьянки для уравнений, что приводит к новым уравнениям и т.д., получаем

$$d\omega_1^{a(s-1),b(k)} = h_c \omega_1^{a(s-1),b(k)c}, \quad (2.55)$$

где введены один-формы со значениями в $\boxed{s-1}$, и последнее поле принимает значение в представлении $\boxed{s-1}$. Для него тождества Бьянки решаются в виде

$$d\omega_1^{a(s-1),b(s-1)} = h_c h_d C_0^{a(s-1)c,b(s-1)d} \quad (2.56)$$

с помощью ноль-формы $C_0^{a(s),b(s)}$ со значениями в \boxed{s} , представляющей собой первое некалибровочное поле в развёрнутой системе. Следовательно $C_0^{a(s),b(s)}$ есть тензор Вейля поля спина s .

Решение тождеств Бьянки $h_c h_d d C_0^{a(s-1)c, b(s-1)d} \equiv 0$ имеет вид

$$dC_0^{a(s), b(s)} = h_c \left(C_0^{a(s)c, b(s)} + \frac{s}{2} C_0^{a(s)b, b(s-1)c} \right), \quad (2.57)$$

где $C_0^{a(s+1), b(s)}$ принимает значения в тензорах $\begin{matrix} s+1 \\ s \end{matrix}$. Второе слагаемое в правой части (2.57) дополняет первое так, что вся комбинация имеет тот же тип симметрии, что и левая часть. Дальнейшее разворачивание приводит к ноль-формам $C_0^{a(s+i), b(s)}$ со значениями в $\begin{matrix} s+i \\ s \end{matrix}$.

Полная развёрнутая система уравнений имеет вид (где обозначение тетрады e заменено на ω для единообразия)

$$\begin{aligned} d\omega_1^{a(s-1), b(k)} &= h_c \omega_1^{a(s-1), b(k)c}, \quad k < s-1, & \delta\omega_1^{a(s-1), b(k)} &= d\xi_0^{a(s-1), b(k)} + h_c \xi_0^{a(s-1), b(k)c}, \\ d\omega_1^{a(s-1), b(s-1)} &= h_c h_d C_0^{a(s-1)c, b(s-1)d}, & \delta\omega_1^{a(s-1), b(s-1)} &= d\xi_0^{a(s-1), b(s-1)}, \\ dC^{a(s+i), b(s)} &= h_c \left(C^{a(s+i)c, b(s)} + \frac{s}{i+2} C^{a(s+i)b, b(s-1)c} \right), & i &\in [0, \infty). \end{aligned} \quad (2.58)$$

По построению поле Фронсдала вложено в развёрнутую систему с правильным калибровочным законом преобразования, хотя совершенно не очевидно, что для $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ следуют правильные уравнения и что в системе нет других динамических полей в старших градуировках.

Ниже мы выведем уравнения Фронсдала (1.35) прямо из развёрнутой системы (2.58), тогда как второе утверждение о неприводимости системы будет доказано как часть общего случая с использованием техники σ_- -когомологий.

Запишем явно первые два уравнения (2.58)

$$\partial_\mu \omega_\nu^{a(s-1)} - \partial_\nu \omega_\mu^{a(s-1)} = h_{c\mu} \omega_\nu^{a(s-1), c} - h_{c\nu} \omega_\mu^{a(s-1), c}, \quad (2.59)$$

$$\partial_\mu \omega_\nu^{a(s-1), b} - \partial_\nu \omega_\mu^{a(s-1), b} = h_{c\mu} \omega_\nu^{a(s-1), bc} - h_{c\nu} \omega_\mu^{a(s-1), bc} \quad (2.60)$$

Перевод индексов форм в касательные даёт

$$\partial^c \omega^{a(s-1)|d} - \partial^d \omega^{a(s-1)|c} = \omega^{a(s-1), cd} - \omega^{a(s-1), dc}, \quad (2.61)$$

$$\partial^c \omega^{a(s-1), b|d} - \partial^d \omega^{a(s-1), b|c} = \omega^{a(s-1), bc|d} - \omega^{a(s-1), bd|c}, \quad (2.62)$$

где $\omega^{a(s-1)|b} \equiv \omega_\mu^{a(s-1)} h^{b\mu}$, $\omega^{a(s-1), b|c} \equiv \omega_\mu^{a(s-1), b} h^{c\mu}$, $\omega^{a(s-1), bb|c} \equiv \omega_\mu^{a(s-1), bb} h^{c\mu}$.

Свёртка (2.62) с η_{bd} и, затем, симметризация индекса c и $a_1 \dots a_{s-1}$ приводит к

$$\partial_c \omega^{a(s-1), c|a} - \partial^a \omega^{a(s-1), c|}_c = 0. \quad (2.63)$$

Симметризуя в (2.61) индексы $a_1 \dots a_{s-1}$ с d

$$\omega^{a(s-1), c|a} = \partial^c \omega^{a(s-1)|a} - \partial^a \omega^{a(s-1)|c} \quad (2.64)$$

и, затем, сворачивая (2.61) с $\eta_{da_{s-1}}$

$$\omega^{a(s-1), c|}_c = (s-1) \left(\partial_c \omega^{a(s-2)c|a} - \partial^a \omega^{a(s-2)c|}_c \right) \quad (2.65)$$

все слагаемые в (2.63) могут быть выражены через $\omega^{a(s-1)|b}$. Подстановка этих выражений в (2.63) даёт

$$\square \omega^{a(s-1)|a} - \partial^a \partial_c \left((s-1) \omega^{a(s-2)c|a} + \omega^{a(s-1)|c} \right) + (s-1) \partial^a \partial^a \omega^{a(s-2)c|_c} = 0, \quad (2.66)$$

где $\omega^{a(s-1)|a}$ должно быть отождествлено с полем Фронсдала $\phi^{a(s)}$ как $\omega^{a(s-1)|a} = \frac{1}{s} \phi^{a(s)}$, тогда, $\omega^{a(s-2)c|_c} = \frac{1}{2} \phi^{a(s-2)c}$, $(s-1) \omega^{a(s-2)c|a} + \omega^{a(s-1)|c} = \phi^{a(s-1)c}$ и уравнение сводится к уравнению Фронсдала (1.35)

$$\square \phi^{a(s)} - s \partial^a \partial_c \phi^{a(s-1)c} + \frac{s(s-1)}{2} \partial^a \partial^a \phi^{a(s-2)c} = 0. \quad (2.67)$$

Таким образом, для $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s)$ развёрнутая система уравнений определяется следующими данными

$g :$	$g = 0$	$g = 1$	\dots	$g = s - 1$	$g = s$	$g = s + 1$	\dots
$\mathbf{F}_g :$	$\boxed{s-1}$	$\boxed{s-1}$	\dots	$\boxed{s-1}$	\boxed{s}	$\boxed{\frac{s+1}{s}}$	\dots
$q_g :$	$q_0 = 1$	$q_1 = 1$	\dots	$q_{s-1} = 1$	$q_s = 0$	$q_{s+1} = 0$	\dots

следовательно,

$$\mathcal{W}_q = \begin{cases} \{W_0^{a(s-1)}, W_0^{a(s-1),b}, \dots, W_0^{a(s-1),b(s-1)}\}, & q = 0, \\ \{W_q^{a(s-1)}, W_q^{a(s-1),b}, \dots, W_q^{a(s-1),b(s-1)}, W_{q-1}^{a(s),b(s)}, W_{q-1}^{a(s+1),b(s)}, \dots\}, & q > 0, \end{cases} \quad (2.68)$$

и

$$\sigma_-(W_q^g) = \begin{cases} 0, & g = 0, \\ h_c W_q^{a(s-1),b(g-1)c}, & g \in [1, s-1], \\ h_c h_d W_{q-1}^{a(s-1)c,b(s-1)d}, & g = s, \\ h_c \left(W_{q-1}^{a(g-s-1)c,b(s)} + \frac{s}{g-s+1} W_{q-1}^{a(g-s-1)b,b(s-1)c} \right), & g > s. \end{cases} \quad (2.69)$$

Определяя как и ранее $\mathcal{D} = D_L - \sigma_-$, полная система (2.58) может быть переписана сжато в виде

$$\mathcal{D}\omega_1 = 0, \quad \delta\omega_1 = \mathcal{D}\xi_0, \quad (2.70)$$

где $\omega_1 \in \mathcal{W}_1$ и $\xi_0 \in \mathcal{W}_0$. Поля с $g \in [0, s-1]$ образуют конечномерный $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$ -модуль, тогда как поля с $g \geq s$ образуют бесконечномерный $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$ -модуль.

Не останавливаясь на деталях вычислений, которые будут проделаны ниже в общем случае, скажем лишь, что представители σ_- -когомологий могут быть выбраны в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^0 &= \xi_0^{a(s-1)}, \\ \mathbf{H}^1 &= h_b \phi^{a(s-1)b}, \\ \mathbf{H}^2 &= h^b h_c G^{a(s-1)c} - h^a h_c G^{a(s-2)bc} + \gamma \eta^{aa} h^a h_c G^{a(s-4)bcn}_n + (\beta \eta^{ab} h^a h_c + \alpha \eta^{aa} h^b h_c) G^{a(s-3)cn}_n, \\ \mathbf{H}^3 &= h^b h^a h_c \chi^{a(s-2)c}, \\ \mathbf{H}^k &= \emptyset, \quad k > 3, \end{aligned}$$

где $\alpha = -\frac{(s(d+s-5)-d+6)(s-2)}{2(d+s-4)(d+2s-6)}$, $\beta = \frac{(s-2)}{(d+s-4)}$, $\gamma = \frac{(d+s-6)(s-2)(s-3)}{2(d+s-4)(d+2s-6)}$. Поля $\phi^{a(s)}$ и $G^{a(s)}$ обладают свойствами поля Фронсдала, а поля $\xi^{a(s-1)}$ и $\chi^{a(s-1)}$ бесследовы.

$H^{0,1}$ нетривиальны в наименьшей градуировке ноль, тогда как $H^{2,3}$ нетривиальны в градуировке один. Следовательно, порядок калибровочных преобразований равен одному, а уравнения на динамическое поле имеют второй порядок по производным. Также имеются тождества Бьянки первого порядка относительно уравнений движения. На самом деле, как мы увидим далее, нет никакой необходимости в точном знании коэффициентов α , β и γ для того, чтобы сделать эти выводы по σ_- -когомологиям, а достаточно знать лишь разложения представителей σ_- -когомологий на неприводимые тензоры алгебры Лоренца.

В [192] было доказано, что лагранжиан Фронсдала полностью фиксируется калибровочной симметрией. Аналогичный результат о том, что уравнения движения фиксируются калибровочной симметрией, содержится также в [95], {6}. Следовательно, нет ни какой необходимости выводить уравнения Фронсдала из развёрнутой формулировки, так как существует единственная возможность. Достаточно показать, что некоторые уравнения второго порядка действительно есть, т.е. σ_- -когомологии нетривиальны только в секторе $H_{g=1}^2$, и состав Лоренцевых модулей, отвечающих представителям $H_{g=0}^1$ и $H_{g=0}^0$, совпадает с разложением поля Фронсдала и калибровочного параметра, что мы и имеем.

Снова на σ_- -когомологиях имеет место некоторая дуальность: количество полей H^1 равно количеству уравнений H^2 , калибровочные параметры H^0 находятся во взаимно-однозначном соответствии с тождествами Бьянки H^3 .

Развёрнутая система содержит бесконечно много дуальных формулировок, получаемых ограничением уравнений на $g > g_0$: имеются калибровочные дуальные описания, в которых основным объектом является поле $W_1^{a(s-1),b(k_0)}$, и некалибровочные с динамическим полем $C^{a(s+k_0),b(s)}$. Например, дуальное описание на основе поля $W_1^{a(s-1),b}$ было разобрано в [193].

2.6.1 Поле спина $(s + \frac{1}{2})$

Особенность пространства Минковского состоит в том, что развёрнутые уравнения для фермионных полей [40, 41, 148] выглядят так же как и для бозонов (2.58), (2.70) по модулю того, что к ковариантной производной (2.19) $D = d + \varpi$ должно быть добавлено слагаемое вида $\varpi^{a,b} \frac{1}{8} [\Gamma_a, \Gamma_b]$. Единственное различие заключается в том, что поля принимают значения в неприводимых спин-тензорных представлениях, тензорная часть которых определяется бозонным полем. В частности оператор σ_- сохраняет свой вид, но действует уже на тензорную часть спин-тензоров. Такая замена области действия приводит к изменению σ_- -когомологий, поскольку уравнения на динамические поля теперь первого порядка.

Уравнение Фанга-Фронсдала для поля спина $(s + \frac{1}{2})$. Развёрнутая система (2.58) или эквивалентная ей (2.70) описывает безмассовое поле спина $(s + \frac{1}{2})$ после замены тензоров на спин-тензоры в (2.68). После поднятия всех мировых индексов в

касательные первое уравнение (2.58) имеет вид

$$G^{\alpha;a(s-1)|[cd]} \equiv \partial^c \omega^{\beta;a(s-1)|d} - \partial^d \omega^{\beta;a(s-1)|c} = \omega^{\beta;a(s-1),c|d} - \omega^{\beta;a(s-1),d|c}, \quad (2.71)$$

где $\omega^{\alpha;a(s-1)|b} \equiv \omega_\mu^{\alpha;a(s-1)} h^{b\mu}$, $\omega^{\alpha;a(s-1),b|c} \equiv \omega_\mu^{\alpha;a(s-1),b} h^{c\mu}$.

Аналогично бозонному случаю несимметричная компонента $\omega^{\beta;a(s-1)|d}$ может быть откалибрована алгебраической симметрией. Поле Фанга-Фронсдала $\phi^{\alpha;a(s)}$ отождествляется с симметричной компонентой $\omega^{\alpha;a(s-1)|a} = \frac{1}{s} \phi^{\alpha;a(s)}$. Тогда $\Gamma_b^\alpha \Gamma_\beta^\beta \phi^{\beta;a(s)} = \Gamma_b^\alpha \omega^{\beta;a(s-1)|b}$, $\Gamma_b^\alpha \Gamma_c^\beta \Gamma_\gamma^\gamma \phi^{\gamma;a(s-2)bc} = \eta_{bc} \omega^{\alpha;a(s-2)b|c}$, и условие тройной Γ -бесследовости следует из неприводимости $\omega^{\alpha;a(s-1)|b}$ по индексам α , $a_1 \dots a_{s-1}$ и отсутствия каких-либо следовых условий между $a_1 \dots a_{s-1}$ и b .

Поскольку поле Фанга-Фронсдала раскладывается на три неприводимые компоненты $\boxed{s}_{\frac{1}{2}}$, $\boxed{s-1}_{\frac{1}{2}}$ и $\boxed{s-2}_{\frac{1}{2}}$, уравнения движения должны иметь все три компоненты. Проектор на уравнения есть просто $\Gamma_b^\alpha G^{\beta;a(s-1),b|a}$ и приводит к

$$\Gamma_b^\alpha \partial^b \phi^{\beta;a(s)} - s \partial^a \Gamma_b^\alpha \phi^{\beta;a(s-1)b} = 0, \quad (2.72)$$

что в согласии с (1.55). Отметим, что, вообще говоря, в развёрнутых уравнениях имеются две неприводимые компоненты типа $\boxed{s-1}_{\frac{1}{2}}$, а именно $\eta_{bc} G^{\alpha;a(s-2)b|ac}$ и $\Gamma_b^\alpha \Gamma_c^\beta \Gamma_\gamma^\gamma G^{\gamma;a(s-1)|[bc]}$. Правильный проектор на уравнения движения даёт комбинацией вида

$$2(s-1) \eta_{bc} G^{\alpha;a(s-2)b|ac} - \gamma_b^\alpha \gamma_c^\beta \Gamma_\gamma^\gamma G^{\gamma;a(s-1)|[bc]}, \quad (2.73)$$

и обращается в ноль, если $G^{\alpha;a(s-1)|[bc]}$ выражена через $\omega^{\beta;a(s-1),c|d}$, в силу (2.71). Поэтому именно из проекции (2.73) мы не можем выразить некоторую часть $\omega^{\beta;a(s-1),c|d}$ через первые производные $\phi^{\alpha;a(s)}$, и следовательно данная проекция приводит к уравнению движения для динамического поля.

Очевидно, что (2.73) есть представитель σ_- -когомологий $H_{g=0}^2$. В терминах $\phi^{\alpha;a(s)}$ представитель имеет вид

$$\Gamma_b^\alpha \partial^b \Gamma_c^\beta \Gamma_\gamma^\gamma \phi^{\gamma;a(s-1)c} - \partial_c \phi^{\alpha;a(s-1)c} + \frac{(s-1)}{2} \partial^a \phi^{\alpha;a(s-2)c}{}_c = 0 \quad (2.74)$$

и равен Γ -следу (2.72).

Калибровочные преобразования для динамического поля имеют вид

$$\delta \phi^{\alpha;a(s)} = \partial^a \xi^{\alpha;a(s-1)}, \quad (2.75)$$

где $\Gamma_b^\alpha \Gamma_\beta^\beta \xi^{\beta;a(s-2)b} = 0$.

Глава 3

Развёрнутая формулировка безмассовых полей произвольного типа симметрии в пространстве Минковского

Основное результат данной главы и работы автора {1} состоит в построении развёрнутой системы уравнений, описывающей безмассовое поле произвольного спина $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_p)$ в d -мерном пространстве Минковского. Уравнения имеют вид условий обобщённого ковариантного постоянства. Калибровочная симметрия всех уровней приводимости оказывается явно реализованной. Показано, что некоторая редукция развёрнутых уравнений приводят к формулировке Лабастиды [90, 175] и формулировке в терминах напряжённостей [98].

3.1 Мотивация: проблемы и нерешённые вопросы метрического подхода

Остановимся кратко на некоторых сложностях формализма Лабастиды [90], которые получают простое решение в рамках развёрнутого подхода.

1. За исключением простейших примеров, Лабастиде не удалось доказать в общем случае, что уравнения движения описывают правильное число степеней свободы.

2. Остался неясным смысл необычных следовых условий, которым подвержены поля. Также казалось странным, что калибровочные параметры не являются, вообще говоря, алгебраически независимыми (что верно и для калибровочных параметров приводимых симметрий), так как их следы связаны некоторыми соотношениями.

3. Предложенная в [90] формулировка навязывает некоторый фиксированный спектр полей, так как существенно использует аппарат производящих функций. Однако, как показывает пример полной нелинейной теории симметричных безмассовых полей высших спинов, существуют строгие ограничения на мультиплеты полей, которые допускают непротиворечивые нелинейные деформации, поэтому крайне нежелательно до построения соответствующих алгебр высших спинов для полей произ-

вольного спина жёстко фиксировать мультиплет.

4. Использование производящих функций также затрудняет выделение поля какого-либо заданного спина, так как процедура выделения требует явного использования юнговских симметризаторов, что технически сложно.

5. Предложенный Лабастидой лагранжиан крайне громоздок даже в производящих функциях, и выделить лагранжиан для отдельного поля представляется технически очень сложной задачей.

6. Общее замечание к метрическому подходу состоит в том, что не существует никакой явной связи между калибровочными симметриями, полями и уравнениями движения. Например, исходя из некоторой калибровочной симметрией, поиск соответствующих уравнений движения состоит в выписывании всевозможных структур и, затем, фиксации коэффициентов условием калибровочной инвариантности. Стоит добавить, что не существует конструктивного способа выписывать калибровочно-инвариантные выражения в метрическом подходе.

Напротив, в рамках развёрнутого подхода поля, симметрии и уравнения тесно связаны, и, например, имея закон калибровочных преобразований, можно сразу выписать соответствующее калибровочно-инвариантное уравнение.

7. Наконец, в рамках метрического подхода неизвестна нелинейная теория даже для симметричных полей, тогда как в рамках развёрнутого подхода такая теория была построена в [44–46], а также были найдены некоторые структуры, например, алгебра высших спинов [176–178], которые хотя и не позволяют сразу найти нелинейные теории с полями смешанного типа симметрии, но определяют схему построения таких теорий.

Таким образом представляется важным разработать теорию калибровочных полей произвольного типа симметрии в пространстве Минковского в рамках развёрнутого подхода.

3.2 Построение развёрнутой формулировки

3.2.1 Простейший пример поля смешанного типа симметрии

Мы начнём с простейшего примера поля спина $\square\square$. Напомним, что в рамках метрического подхода безмассовое поле спина $\square\square$ описывается [89, 172] полем $\phi_{[\mu\mu],\nu}$, удовлетворяющим (1.36) и принимающим значения в приводимом модуле алгебры Лоренца $\square\square \oplus \square$, где вторая компонента отождествляется со следом $\phi_{\mu\nu}{}^\nu$. Калибровочные симметрии имеют два уровня (1.37) с двумя калибровочными параметрами $\xi_{(\mu\nu)}^S, \xi_{[\mu\nu]}^A$ со значениями в $\square\square \oplus \bullet$, \square на первом уровне и одним параметром ξ_μ со значениями в \square на втором уровне (1.38).

Прежде всего метрическое поле $\phi_{[\mu\mu],\nu}$ необходимо вложить в некоторый обобщённый репер (тетраду) $e_q^{\mathbf{F}}$, где $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -модуль \mathbf{F} и степень формы q ещё предстоит определить. Для того чтобы калибровочная симметрия всех двух уровней стала явной необходимо, чтобы q было равно двум.

Отметим, что попытка сделать явными меньше или больше калибровочных симметрий, чем есть на самом деле, полагая $q \neq 2$, неминуемо приведёт к противоречию.

Таким образом, обобщённый репер представлен некоторой два-формой $e_2^{\mathbf{F}}$, тогда калибровочный параметр на втором уровне приводимости есть ноль-форма $\chi_0^{\mathbf{F}}$. Тот факт, что на самом глубоком уровне приводимости всегда находится только один калибровочный параметр (см. 1.39), позволяет сразу же определить \mathbf{F} . А именно, в случае поля спина \square , единственный калибровочный параметр на втором уровне представлен вектором, следовательно $\mathbf{F} = \square$. Это даёт $e_2^{\square} \equiv e_2^a \equiv e_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu$, и ассоциированный с репером калибровочный параметр $\xi_1^{\square} \equiv \xi_1^a \equiv \xi_\mu^a dx^\mu$, как легко видеть, содержит в своём разложении на неприводимые компоненты $\square \otimes \square = \square \oplus \square \oplus \bullet$ как антисимметричный $\xi_{\mu\nu}^A = \xi_{[\mu}^a h_{\nu]}^b \eta_{ab}$, так и симметричный $\xi_{\mu\nu}^S = \xi_{(\mu}^a h_{\nu)}^b \eta_{ab}$ калибровочные параметры, причём последний входит вместе со следом $\xi_\mu^a h_\mu^a$. Калибровочный параметр второго уровня χ_0^a прямо отождествляется с ξ_μ^a , $\xi_\mu^a = h_\mu^b \chi^a \eta_{ab}$.

Калибровочные параметры содержат те и только те компоненты, которые отождествляются с соответствующими метрическими аналогами. Однако, как и в случае полей спина s , репер e_2^{\square} имеет в разложении на неприводимые одну лишнюю по сравнению с $\phi_{[\mu\nu],\nu}$ компоненту, $\square \otimes \square = \square \oplus \square \oplus \square$. Первые две компоненты составляют поле $\phi_{\mu\nu,\nu}$, а третья, полностью антисимметричная компонента $e^{[abc]}$ в $e^{abc} = e_{\mu\nu}^a h^{\mu\nu} h^{bc}$, является нежелательной, так как может привести к новым степеням свободы.

Для того чтобы сделать лишнюю компоненту нединамической, мы вводим алгебраическую калибровочную симметрию $\xi_0^{[abc]}$ со значениями в \square . Очевидно, что добавка

$$\delta e_2^a = h_b h_c \xi_0^{[abc]} \quad (3.1)$$

в калибровочный закон позволяет откалибровать лишнее поле, после чего e_2^a прямо отождествляется с $\phi_{\mu\nu,\nu}$, $e_{\mu\mu}^a = \phi_{\mu\mu,\nu} h^{a\nu}$. Из законов калибровочных преобразований $\delta e_2^a = d\xi_1^a$, $\delta \xi_1^a = d\chi_0^a$, или $\delta e_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi_\nu^a - \partial_\nu \xi_\mu^a)$, $\delta \xi_\mu^a = \partial_\mu \chi^a$, легко получить калибровочные преобразования (1.37), (1.38) для $\phi_{\mu\nu,\nu}$ и $\xi_{(\mu\nu)}^S$, $\xi_{[\mu\nu]}^A$.

Поскольку в развёрнутом формализме с каждым калибровочным параметром ассоциировано некоторое поле и наоборот (если степень формы больше нуля), то для $\xi_0^{[abc]}$ следует ввести поле $\omega_1^{[abc]}$. Первое уравнение развёрнутой системы восстанавливается из закона калибровочных преобразований (3.1)

$$de_2^a = h_b h_c \omega_1^{[abc]}. \quad (3.2)$$

Применение d к этому уравнению даёт тождества Бьянки $h_b h_c d\omega_1^{[abc]} \equiv 0$, которые имеют единственное решение

$$d\omega_1^{[abc]} = h_d h_f C_0^{[abc],[df]}, \quad (3.3)$$

где ноль-форма¹ $C_0^{[abc],[df]}$ принимает значения в \square и представляет собой обобщённый тензор Вейля для поля спина \square .

Для того чтобы пояснить решение тождеств Бьянки, возьмём ноль-форму $C_0^{[abc],[df]}$, антисимметричную по $[abc]$, $[df]$ и без каких бы то ни было дополнительных условий между этими двумя группами индексов. Из тождеств Бьянки следует $h_b h_c h_d h_f C_0^{[abc],[df]} \equiv$

¹Использован антисимметричный базис, т.е. поле антисимметрично по $[abc]$, $[df]$ и $C_0^{[abc],[df]} \equiv 0$

0, что эквивалентно $C_0^{a[bc|df]} \equiv 0$, поскольку один-формы фоновой тетрады антикоммутируют друг с другом. Поэтому решение параметризуется теми компонентами $C_0^{[abc][df]} \sim \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$, которые имеют симметрию диаграммы с не более чем тремя рядами, поскольку равенство нулю антисимметризации четырёх индексов есть характеристическое свойство тензоров с симметрией диаграмм с не более чем тремя рядами. Такая компонента² и есть тензор Вейля $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \ni \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$.

С другой стороны, мы могли бы искать решение среди один-форм $d\omega_1^{[abc]} = h_d C_1^{[abc]d}$, где $C_1^{[abc]d}$ антисимметрична по abc и индекс d не связан с abc никакими условиями. Однако, из тождеств Бьянки $h_b h_c h_d C_1^{[abc]d} \equiv 0$ следует, что только те компоненты $C_1^{[abc]d} \sim \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \square$ допустимы, симметрия которых определяется диаграммами с не более чем двумя рядами, а это невозможно, так как наличие $[abc]$ приводит к тому, что все компоненты $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \square$, не являющиеся следами, отвечают диаграммам с не менее чем тремя рядами. Таким образом, решений среди один-форм нет, и найденное решение среди ноль-форм и есть единственное возможное.

Дальнейший процесс разворачивания тривиален и состоит в последовательном решении тождеств Бьянки, что особенно просто в секторе ноль-форм и приводит к набору полей $C^{[abc],[df].g(k)}$ со значениями в $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline \end{array}$, так что полная система развёрнутых уравнений и калибровочных преобразований имеет вид

$$\begin{aligned} de_2^a &= h_b h_c \omega_1^{[abc]}, & \delta e_2^a &= d\xi_1^a + h_b h_c \xi_0^{[abc]}, & \delta \xi_1^a &= d\chi_0^a, \\ d\omega_1^{[abc]} &= h_d h_f C_0^{[abc],[df]}, & \delta \omega_1^{[abc]} &= d\xi_0^{[abc]}, \\ dC_0^{[abc],[df].g(k)} &= h_v C_0^{[abc],[df].g(k)v}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Метрическое поле $\phi_{\mu\nu}$ вложено в развёрнутую систему со всеми калибровочными параметрами, и «лишняя компонента» репера не несёт степеней свободы.

В разложении поля $\omega_1^{[abc]}$ на неприводимые тензоры

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array};$$

первая компонента представляет собой напряжённость для «лишнего поля». Если это поле откалибровано в ноль, то она равна нулю. Оставшиеся компоненты можно параметризовать $\omega_\rho^{[abc]} = h^{a\mu} h^{b\nu} h^{c\lambda} T_{[\mu\nu\lambda],\rho}$ некоторым $T_{[\mu\nu\lambda],\rho}$, $T_{[\mu\nu\lambda],\rho} \equiv 0$. Для получения уравнений (1.36) на метрическое поле, запишем первые два уравнения (3.4)

$$\partial_{[\mu} e_{\nu\lambda]}^a = h_{b[\mu} h_{c\nu} \omega_{\lambda]}^{abc}, \quad (3.5)$$

$$\partial_{[\mu} \omega_{\nu]}^{abc} = h_{d[\mu} h_{f\nu]} C^{abc,df}. \quad (3.6)$$

Подставляя $T_{\mu\nu\lambda,\rho}$ и сворачивая два индекса во втором уравнении, имеем

$$\partial_{[\mu} \phi_{\nu\lambda],\rho} = T_{\mu\nu\lambda,\rho}, \quad (3.7)$$

$$\partial^\rho T_{\mu\nu\rho,\lambda} - \partial_\lambda T_{\mu\nu\rho}{}^\rho = 0. \quad (3.8)$$

²Хотя есть и другие компоненты в $C_0^{[abc][df]}$ с не более чем тремя рядами, например $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$, их тензорное произведение с метрическим тензором η^{ab} содержит $\mathfrak{sl}(d)$ -диаграммы с более чем тремя рядами. След с симметрией $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ соответствует возможности введения массовоподобного слагаемого.

Подстановка (3.7) в (3.8) даёт желаемые уравнения (1.36).

Итак, для $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(2, 1)$ результат разворачивания выглядит следующим образом

$$\begin{array}{lclclcl}
g : & g = 0 & g = 1 & g = 2 & g = 3 & \dots \\
\mathbf{F}_g : & \square & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & \dots \\
q_g : & q_0 = 2 & q_1 = 1 & q_2 = 0 & q_3 = 0 & \dots,
\end{array}$$

поэтому

$$\mathcal{W}_q = \begin{cases} \{W_0^a\}, & q = 0, \\ \{W_1^a, W_0^{[abc]}\}, & q = 1, \\ \{W_q^a, W_{q-1}^{[abc]}, W_{q-2}^{[abc],[df]}, W_{q-2}^{[abc],[df],g}, \dots\}, & q > 1, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\sigma_-(W_q^g) = \begin{cases} 0, & g = 0, \\ h_b h_c W_{q-1}^{[abc]}, & g = 1, \\ h_b h_c W_{q-2}^{[aaa],[bc]}, & g = 2, \\ h_d W_{q-2}^{[aaa],[bb],c(g-3)d}, & g > 2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Определяя $\mathcal{D} = D - \sigma_-$, развёрнутая система (3.4) переписывается в виде

$$\mathcal{D}\omega_2 = 0, \quad \delta\omega_2 = \mathcal{D}\xi_1, \quad \delta\xi_1 = \mathcal{D}\xi_0 \quad (3.11)$$

где $\omega_2 \in \mathcal{W}_2$, $\xi_1 \in \mathcal{W}_1$ and $\xi_0 \in \mathcal{W}_0$. Поля с $g = 0$ и $g = 1$ образуют два конечномерных $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$ -модуля, тогда как поля с $g \geq 2$ образуют бесконечномерный $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$ -модуль.

3.2.2 Схема построения развёрнутой формулировки в общем случае

1. Поле в наинизшей градуировке, которое представляет собой в данном случае обобщённый репер $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$, однозначно фиксируется из следующих требований: (i) калибровочная симметрия всех уровней явно реализована, т.е. калибровочные параметры $\xi_{q_0-k}^{\mathbf{F}_0}$, $k > 0$, содержат компоненты с симметрией, задаваемой резольвентой (1.26); (ii) репер содержит компоненту с симметрией \mathbf{S} , которая отождествляется с потенциалом, полем Лабастиды.
2. Как репер $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$, так, в общем случае, и параметры на всех уровнях кроме последнего содержат «лишние компоненты», которые должны быть устранены путём введения алгебраической симметрии. Оказывается, что все «лишние компоненты» могут быть скомпенсированы на всех уровнях сразу путём введения лишь одного типа параметров $\delta e_{q_0}^{\mathbf{F}_0} = \sigma_-^1(\xi_{q_1-1}^{\mathbf{F}_1})$, $\delta \xi_{q_0-1}^{\mathbf{F}_0} = \sigma_-^1(\xi_{q_1-2}^{\mathbf{F}_1})$, ... с некоторыми $\xi_{q_1-k}^{\mathbf{F}_1}$, $k > 0$, для которых \mathbf{F}_1 и q_1 однозначно определяются этим требованием.
3. С параметром $\xi_{q_1-1}^{\mathbf{F}_1}$ ассоциировано некоторое калибровочное поле $\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1}$ с калибровочными преобразованиями $\delta\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1} = d\xi_{q_1-1}^{\mathbf{F}_1}$. Первое уравнение развёрнутой

системы восстанавливается по закону преобразования $\delta e_{q_0}^{\mathbf{F}_0} = d\xi_{q_0-1}^{\mathbf{F}_0} + \sigma_-^1(\xi_{q_1-1}^{\mathbf{F}_1})$ репера $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$ и имеет вид $de_{q_0}^{\mathbf{F}_0} = \sigma_-^1(\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1})$.

4. Первое уравнение также определяет первые тождества Бьянки $\sigma_-^1(d\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1}) \equiv 0$, общее решение которых найдено в 3.2.4 и имеет вид $d\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1} = \sigma_-^2(\omega_{q_2}^{\mathbf{F}_2})$ с некоторым полем $\omega_{q_2}^{\mathbf{F}_2}$. Второе уравнение определяет вторые тождества Якоби $\sigma_-^2(d\omega_{q_2}^{\mathbf{F}_2}) \equiv 0$ и т.д., что позволяет построить все уравнения.
5. Хотя развёрнутая система определяется практически однозначно, тем не менее необходимо установить, что (i) накладываются правильные уравнения движения; (ii) система не содержит других динамических полей, кроме поля Лабастиды, вложенного в репер $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$; (iii) можно также посчитать число степеней свободы в системе. Отметим, что Лабастида не доказал, что уравнения, им предложенные, действительно описывают правильное число степеней свободы (непрямыми методами это было доказано в [98] и совсем недавно в [194]). Ответ на все вопросы может быть получен путём вычисления σ_- -когомологии, которое проведено в 3.2.6.

3.2.3 Реализация схемы в общем случае

Основой для построения развёрнутой формулировки будет точная последовательность (1.26), определяющая неприводимое унитарное представление алгебры Пуанкаре, называемое безмассовым полем спина $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_p)$. То, что для поля спина \mathbf{S} существует p уровней приводимости калибровочной симметрии, вкупе с фактом, что в рамках развёрнутого формализма калибровочное поле, представленное некоторой q_0 -формой $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$, имеет q_0 уровней приводимости, сразу определяет $q_0 = p$.

Обобщённый репер $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$, в который будет вложено динамическое поле, должен иметь наинишшую градуировку среди полей развёрнутой системы. Если бы это было не так и существовало бы некоторое калибровочное поле ω_{q-1} , $q-1 \geq q_0$, с градуировкой меньшей, чем у $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$, то его калибровочный параметр на наинишшем уровне приводимости χ_0 автоматически был бы представителем σ_- -когомологии, поскольку он замкнут как элемент с наименьшей градуировкой и не может быть точным, поскольку является ноль-формой. Такой параметр тогда бы увеличивал количество уровней приводимости и вводил бы старшие производные в закон калибровочных преобразований³, чего не наблюдается в (1.26).

Вообще говоря, можно было бы рассмотреть случай $q_0 > p$, при условии что калибровочные параметры на «лишних» уровнях скомпенсированы, однако рассуждения, аналогичные проведённым в предыдущем абзаце, показывают, что это невозможно.

Старшие производные в калибровочных преобразованиях имеют место для частично-безмассовых полей в (анти)-де Ситтере, и для них обобщённый репер уже не будет иметь наименьшую градуировку.

Калибровочный параметр для $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$ на наинишшем уровне есть ноль-форма $\xi_0^{\mathbf{F}_0}$, т.е. просто касательный тензор с симметрией \mathbf{F}_0 . Как отмечалось, построение off-shell

³Напомним, что количество производных даётся разностью градуировок (что ≥ 1 в нашем случае по предположению) плюс один.

формулировки, к которой принадлежит и развёрнутая формулировка, приводит к тому, что неприводимость тензорных полей должна быть ослаблена в сторону ослабления следовых условий. Равенство нулю некоторого следа метрического поля ϕ , $tr(\phi) \equiv 0$ может привести к тому, что калибровочный параметр ξ , $\delta\phi = \partial\xi$, окажется бездивергентным $tr(\delta\phi) = tr(\partial\xi) = 0$. Аналогичные аргументы могут быть применены и к калибровочным параметрам на всех уровнях кроме последнего, который может быть оставлен неприводимым тензором, поскольку следовые условия неприводимости для него не приводят далее к каким-нибудь ограничениям.

Тот факт, что в резольвенте (1.26) есть только один калибровочный параметр на самом низком уровне, тип симметрии которого $\mathbb{Y}(s_1 - 1, \dots, s_p - 1)$ получается отрезанием одной клетки от каждой строки диаграммы \mathbf{S} , позволяет сразу определить модуль алгебры Лоренца \mathbf{F}_0 , а именно: это неприводимый модуль с симметрией $\mathbf{F}_0 = \mathbb{Y}(s_1 - 1, \dots, s_p - 1)$.

Таким образом, обобщённый репер имеет следующий вид в симметричном базисе

$$e_{\mu_1 \dots \mu_p}^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1)} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (3.12)$$

С помощью фоновой тетрады $h^{\mu a}$ образуем касательную версию репера

$$e^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1)} | [d_1 \dots d_p] = e_{\mu_1 \dots \mu_p}^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1)} h^{\mu_1 d_1} \dots h^{\mu_p d_p}, \quad (3.13)$$

которая явно антисимметрична по индексам $d_1 \dots d_p$.

Поле Лабастиды $\phi^{\mathbf{S}} \equiv \phi^{a_1(s_1), \dots, a_p(s_p)}$, (1.50), вложено как симметричная часть обобщённого репера $e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0}$

$$\phi^{a_1(s_1), \dots, a_p(s_p)} = e^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1)} |_{a_1 \dots a_p}. \quad (3.14)$$

Заметим, что довольно необычные следовые условия Лабастиды (1.51) на самом деле являются простым следствием неприводимости, в частности бесследовости, репера по касательным индексам и отсутствия каких бы то ни было условий между касательными индексами и индексами формы. В результате при взятии второго следа в $\phi^{\mathbf{S}}$ по индексам из одной группы симметричных индексов как минимум одна свёртка попадает только на индексы, принадлежащие касательным индексам репера, что по определению равно нулю. Всевозможные следы, включающие в себя индексы из разных групп, в ноль, вообще говоря, не обращаются, и следовательно поле Лабастиды содержит большое число следовых компонент.

Поле Лабастиды $\phi^{\mathbf{S}}$ имеет простое представление в терминах касательной версии обобщённого репера $e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0}$, однако это уже не так для калибровочных параметров Лабастиды ξ^i , (1.53), которые получаются взятием различных юнговских проекций единственного калибровочного параметра $\xi_{\mathbf{p}-1}^{\mathbf{F}_0}$ и не имеют простого явного представления из-за сложности проекторов в общем случае. Тем не менее, необычные алгебраические соотношения между следами параметров Лабастиды ξ^i имеют простое объяснение как результат того, что все параметры ξ^i суть различные проекции одного и того же параметра $\xi_{\mathbf{p}-1}^{\mathbf{F}_0}$.

В общем случае как репер $e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0}$, так и калибровочный параметр k -ого уровня $\xi_{\mathbf{p}-k}^{\mathbf{F}_0}$, $k = 1, \dots, p - 1$, содержат большое число примарных⁴ компонент с типом симметрии,

⁴т.е. компонент максимального тензорного ранга.

отличным от \mathbf{S} и $\mathbf{S}_{i_1, \dots, i_k}$, (1.28), соответственно. Рассмотрение только примарных компонент и игнорирование структуры следов эквивалентно замене всех $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -модулей на $\mathfrak{sl}(d)$ -модули, определяемые теми же диаграммами. Примарные компоненты $e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0}$ и $\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^{\mathbf{F}_0}$, очевидно, даются тензорным произведением (см. Приложение С.5)

$$\mathbf{F}_0 \otimes_{\mathfrak{sl}(d)} \mathbb{Y}[p-k], \quad (3.15)$$

где $\mathbb{Y}[p-k]$ представляет индексы формы в касательном базисе.

Перепишав для удобства \mathbf{S} через высоты колонок $\mathbf{S} = \mathbb{Y}[h_1, \dots, h_n]$ и, следовательно, $\mathbf{F}_0 = \mathbb{Y}[h_2, \dots, h_n]$, разложение (3.15) есть прямая сумма модулей $\mathbf{Y}_{\{\alpha_i\}}$

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad \dots \quad h_n \\ \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad \mathbf{Y}_{\{\alpha_i\}} = \begin{array}{c} h_2 \quad h_3 \quad \dots \quad h_n \\ \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \alpha_{n+1} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \alpha_n \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \begin{array}{|c|} \hline \alpha_3 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \alpha_2 \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (3.16)$$

с $\alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = p-k$ и $h_i + \alpha_i \leq h_{i-1}$ для $i = 3, \dots, n$.

Разложение $e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0}$, т.е. для $k=0$, содержит нужную компоненту с симметрией \mathbf{S} , которая отвечает $\alpha_i = h_{i-1} - h_i$, $i = 2, \dots, n+1$ ($h_{n+1} = 0$) и $\alpha_2 = h_1 - h_2$. Для $k > 0$ количество нужных нам компонент, соответствующих параметрам $\mathbf{S}_{i_1, \dots, i_k}$, растёт комбинаторно, но они легко описываются как те $\mathbf{Y}_{\{\alpha_i\}}$, для которых $\alpha_2 \leq h_1 - h_2$. Таким образом, все лишние поля, которые могут привести к дополнительным степеням свободы, и лишние калибровочные параметры имеют $\alpha_2 > h_1 - h_2$.

С необходимостью, с каждой лишней компонентой как репера, так и калибровочных параметров должна ассоциироваться некоторая алгебраическая калибровочная симметрия, позволяющая откалибровать их в ноль. Предположим, что данная алгебраическая симметрия достигается введением лишь одного калибровочного поля $\omega_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{F}_1}$ в развёрнутую систему, так что поправки в калибровочные законы имеют вид

$$\begin{aligned} \delta e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0} &= \sigma_- (\xi_{\mathbf{q}_1-1}^{\mathbf{F}_1}), \\ \delta \xi_{\mathbf{p}-1}^{\mathbf{F}_0} &= \sigma_- (\xi_{\mathbf{q}_1-2}^{\mathbf{F}_1}), \\ &\dots \end{aligned}$$

Отметим, что это крайне сильное требование, поскольку сокращение лишних степеней свободы должно происходить consistently сразу на всех уровнях, что можно представить для каждого k следующим образом

$$\dots \longrightarrow \mathbf{F}_1 \otimes \mathbb{Y}[q_1 - k + 1] \xrightarrow{\sigma_-} \mathbf{F}_0 \otimes \mathbb{Y}[p - k] \longrightarrow \begin{array}{c} \text{поле или калибровочный} \\ \text{параметр Лабастиды} \end{array} \longrightarrow 0,$$

подразумевая, что все лишние компоненты $e_p^{\mathbf{F}_0}$ и $\xi_{p-k}^{\mathbf{F}_0}$ должны сокращаться с помощью $\xi_{q_1-k+1}^{\mathbf{F}_1}$ по модулю быть может тех компонент $\xi_{q_1-k+1}^{\mathbf{F}_1}$, обозначенных многоточием, которые вообще не содержатся в $e_p^{\mathbf{F}_0}$ и $\xi_{p-k}^{\mathbf{F}_0}$ и представляют собой лишние компоненты $\xi_{q_1-k+1}^{\mathbf{F}_1}$, которые будут устранены далее.

Учитывая, что все лишние компоненты однозначно характеризуются $\alpha_2 > h_1 - h_2$, легко определить модуль \mathbf{F}_1 , который получается, если \mathbf{F}_0 достроить минимальным числом клеток так, что $\alpha_2 = h_1 - h_2 + 1$, т.е.

$$\mathbf{F}_1 = \mathbb{Y}[h_1 + 1, \widehat{h}_2, h_3, h_4, \dots, h_n] \quad (3.17)$$

и, следовательно, $q_1 = h_2$. Простая проверка показывает, что это решает проблему на всех уровнях сразу. Оператор σ_- как всегда однозначно определяется по \mathbf{F}_0 , \mathbf{F}_1 , q_0 , q_1 и представляет собой свёртку формы ранга $q_0 - q_1 + 1$, построенной из фоновых тетрад h^b , с q_1 -формой со значениями в \mathbf{F}_1 так, что результат есть $q_0 + 1$ -форма со значениями в \mathbf{F}_0 .

Включение в рассмотрение не только примарных компонент, но и следов, т.е. модулей $\mathfrak{so}(d)$, а не $\mathfrak{sl}(d)$, не нарушает достигнутого результата, а позволяет определить точный состав динамических полей и калибровочных параметров в терминах их разложения на неприводимые модули алгебры Лоренца. Это будет сделано в 3.2.6 при вычислении σ_- -когомологий.

Отметим, что можно прямо убедиться в том, что алгебраическая симметрия с параметром $\xi_{q_1-1}^{\mathbf{F}_1}$ не сдвигает поле Лабастиды $\phi^{\mathbf{S}}$, вложенное в $e_p^{\mathbf{F}_0}$. После перехода к касательной версии в $\sigma_- (\xi_{q_1-1}^{\mathbf{F}_1})$ и проекции на поле Лабастиды возникает симметризация индексов, отвечающая одному из юнговских условий для \mathbf{F}_1 , что по определению равно нулю.

Итак, второе поле в развёрнутой системе есть $\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1}$, и закон калибровочных преобразований определяет первое уравнение развёрнутой системы⁵

$$De_p^{\mathbf{F}_0} = \sigma_- (\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1}), \quad (3.18)$$

тождества Якоби для которого имеют вид

$$\sigma_- (D\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1}) = 0. \quad (3.19)$$

Процесс дальнейшего построения развёрнутой формулировки заключается в последовательном решении тождеств Якоби в терминах нового поля, получении нового развёрнутого уравнения и т.д.

3.2.4 Решение тождеств Якоби

В данном разделе мы рассматриваем проблему решения уравнения

$$\sigma_- (B_{q+1}^{\mathbf{Y}}) = 0, \quad (3.20)$$

⁵Теперь можно заменить внешний дифференциал d на лоренц-ковариантную производную D , (2.19) так, что выражение приобретает смысл в любых координатах.

где $\sigma_- : B_{q+1}^{\mathbf{Y}} \longrightarrow D_p^{\mathbf{Z}}$ для некоторых $\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, q, p$.

Рассмотрим сначала простейший случай, где $\mathbf{Y} = \mathbb{Y}(\overbrace{s, \dots, s}^p, k)$ описывает блок длины s и высоты p со строкой длины k внизу. Имеет место следующая

Лемма. А. Пусть $B_{q+1}^{a_1(s), \dots, a_p(s), b(k)}$ есть $(q+1)$ -форма со значениями в \mathbf{Y} . Общее решение

$$h_c B_{q+1}^{a_1(s), \dots, a_p(s), b(k-1)c} = 0 \quad (3.21)$$

имеет вид

$$B_{q+1}^{a_1(s), \dots, a_p(s), b(k)} = \begin{cases} \sigma_- (\omega_q^{\mathbf{X}_1}) = h_c \omega_q^{a_1(s), \dots, a_p(s), b(k)c}, & k < s, \\ \sigma_- (\omega_{q-p}^{\mathbf{X}_2}) = h_c \dots h_c \omega_{q-p}^{a_1(s)c, \dots, a_p(s)c, a_{p+1}(s)c}, & k = s, \quad q \geq p, \\ 0, & k = s, \quad q < p, \end{cases}$$

где $\omega_q^{a_1(s), \dots, a_p(s), b(k+1)}$ и $\omega_{q-p}^{a_1(s+1), \dots, a_p(s+1), a_{p+1}(s+1)}$ принимают значения в

$$\mathbf{X}_1 = \mathbb{Y}(\overbrace{s, \dots, s}^p, k+1) \quad \text{и} \quad \mathbf{X}_2 = \mathbb{Y}(\overbrace{s+1, \dots, s+1}^{p+1})$$

Доказательство. Поскольку фоновая тетрада в (3.21) есть антикоммутирующий объект, то решение основано на поиске некоторого оператора σ_- с областью определения $\omega_r^{\mathbf{X}}$, также содержащего h^b , так что $\sigma_- \sigma_- (\omega_r^{\mathbf{X}}) = 0$. Наиболее общая параметризация $\omega_r^{\mathbf{X}}$ с σ_- степени один имеет вид $\omega_r^{\mathbf{X}} = h_d \omega_q^{a_1(s), \dots, a_p(s), b(k)|d}$ с некоторой q -формой со значениями в тензорном произведении \mathbf{Y} на векторное представление, т.е. между индексом d и остальными нет ни каких соотношений. Тогда имеем

$$h_c h_d \omega_q^{a_1(s), \dots, a_p(s), b(k-1)c|d} = 0 \iff \omega_q^{a_1(s), \dots, a_p(s), b(k-1)[c|d]} = 0. \quad (3.22)$$

Поэтому, только те компоненты $\mathbf{Y} \otimes \square$ являются решениями, в которых индексы s и d , а следовательно и d и $b(k)$, симметричны, т.е. $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1$, что возможно только если $k < s$.

В случае $k = s$, т.е. $\mathbf{Y} = \mathbb{Y}(\overbrace{s, \dots, s}^{p+1})$, решение с σ_- степени один отсутствует потому, что условия юнговости не позволяют индексу d быть симметричным с индексами $b(k)$. Пытаясь далее параметризовать решение с σ_- , имеющим степень 2, 3 и т.д., приходим к тому, что только σ_- степени $p+1$ даёт решение с $\mathbf{X} = \mathbf{X}_2$. Проще всего это объяснить заметив, что необходимое условие симметричности по d и $b(s)$ говорит, что последний ряд \mathbf{X} имеет длину как минимум $(s+1)$, а это по свойству юнговости значит, что предыдущие также не короче $(s+1)$. ■

σ_- включает в себя юнговский симметризатор, восстанавливающий свойства симметрии после свёртки с фоновыми тетрадами, $\sigma_-(B_q) = 0$. В некоторых исключительных случаях, например, когда касательный тензор записан в симметричном базисе и σ_- действует только на индексы из последней группы симметричных индексов, юнговский симметризатор тривиализуется. Так первые два развёрнутых уравнения, которые собственно и содержат всю нетривиальную информацию, поскольку

включают в себя динамическое поле и уравнения второго порядка на него (после исключения вспомогательных полей), могут быть всегда записаны явно.

В общем случае, очевидно, что при $q = -1$ (3.20) не имеет решений отличных от $B_0^Y = 0$, но эта ситуация не встречается, так как тождества Якоби всегда возникают в результате применения D к некоторым уравнениям, и поэтому $q \geq 0$.

Вообще говоря, общее решение (3.20) имеет вид $B_{q+1} = \sum_i \sigma_-^i(\omega_{q_i}^i) + H$, где σ_-^i — некоторые операторы типа σ_- , такие что $\sigma_- \sigma_-^i = 0$; индекс i отмечает то, что они имеют разные домены (области определения). H - представители σ_- -когомологий. В нашем случае оказывается: (а) индекс i пробегает лишь одно значение и поэтому больше не выписывается; (б) H нужно взять в тривиальном классе, так как все σ_- когомологии отвечают в нашей системе либо динамическим полям и калибровочным параметрам, либо динамическим уравнениям и тождествам Бьянки для них, и включение в решение нетривиальных H -слагаемых в секторе уравнений приведёт к тому, что левые части уравнений будут определениями новых полей из H , вида $\square\phi^S + \dots = H$. В решение (3.20) по модулю H -слагаемых даётся следующей

Лемма. В. Пусть дано уравнение (3.20), где оператор σ_- однозначно определяется доменом Y и кодоменом Z

$$\sigma_- : Y = \mathbb{Y}[h_1, \dots, h_{k-1}, \hat{h}_k, h_{k+1}, \dots, h_n] \longrightarrow Z = \mathbb{Y}[h_1, \dots, \hat{h}_{k-1}, h_k, h_{k+1}, \dots, h_n]$$

тогда решение (3.20) по модулю возможных когомологий σ_- имеет вид

$$B_{q+1}^Y = \begin{cases} \sigma_- (\omega_r^X), & r = q - h_k + h_{k+1} \geq 0, \\ 0, & q - h_k + h_{k+1} < 0, \end{cases}$$

где

$$X = \mathbb{Y}[h_1, \dots, h_{k-1}, h_k + 1, h_{k+2}, \dots, h_n].$$

В случае $k = n$ ответ даётся теми же выражениями, если доопределить $h_{i>n} = 0$.

Доказательство. Прежде всего необходимо сделать ряд замечаний, упрощающих работу с σ_- , который хотя и может быть выписан явно и в общем случае (см. [86, 87]), тем не менее является весьма громоздким для прямых вычислений. Оператор σ_- имеет следующий вид

$$h_b \wedge \dots \wedge h_c B^{a\dots b\dots c\dots d} + \text{перестановки свободных индексов},$$

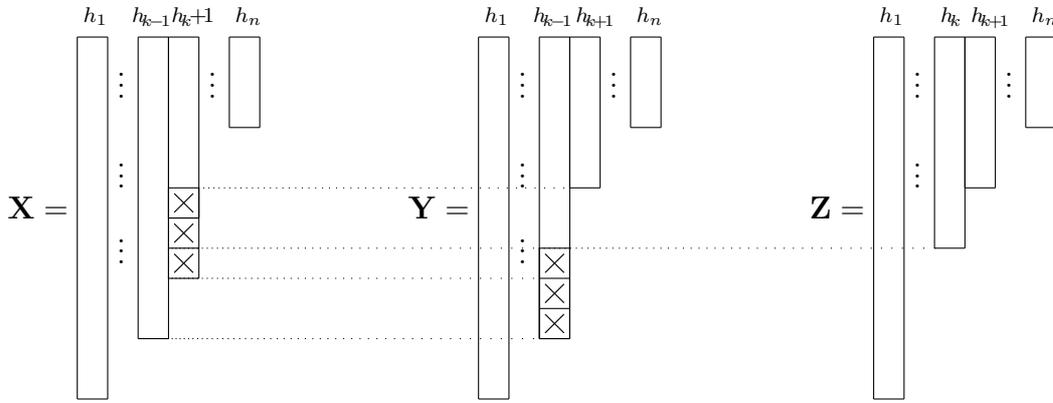
где форма, построенная из фоновых тетрад, сворачивается с индексами B_{q+1}^Y , которые соответствуют лишним по сравнению с Z клеткам диаграммы Y . Однако, в общем случае за этим главным слагаемым следует ещё длинный ряд слагаемых со всевозможными перестановками индексов за счёт юнговского симметризатора, проектирующего на пространство тензоров с требуемым свойством симметрии Z . Очевидно, что каждая строка Z может быть короче соответствующей строки Y не более чем на одну клетку, иначе две антикоммутирующие тетрады окажутся свёрнутыми с двумя индексами, по которым есть явная симметрия в симметричном базисе, что

даёт тождественный ноль. Ключевое наблюдение состоит в том, что при проверке, обращается ли выражение вида $\sigma_-^1 \sigma_-^2 (\omega_r^{\mathbf{X}})$

$$\omega_r^{\mathbf{X}} \xrightarrow{\sigma_-^2} B_{q+1}^{\mathbf{Y}} \xrightarrow{\sigma_-^1} D_p^{\mathbf{Z}} \longrightarrow 0$$

тождественно в ноль, достаточно рассмотреть только первые главные слагаемые σ_-^1 и σ_-^2 . Выбрав симметричный базис для представления тензоров, получаем, что из $\sigma_-^1 \sigma_-^2 (\omega_r^{\mathbf{X}}) \equiv 0$ следует что существует как минимум одна строка в диаграмме \mathbf{Z} которая короче соответствующей строки в \mathbf{X} на две клетки, так как только в этом случае при последовательном применении σ_-^1 и σ_-^2 в главном слагаемом $\sigma_-^1 \sigma_-^2$ две тетрады окажутся свёрнутыми с двумя индексами, по которым есть явная симметрия, что даёт ноль.

Графически, в нашем случае, это можно изобразить следующим образом



где помеченные клетки соответствуют индексам, которые сворачиваются с тетрадами. Два индекса в одной строке будут свёрнуты с тетрадами (нижний помеченный в \mathbf{X} и верхний помеченный в \mathbf{Y}). ■

Заметим, что если бы \mathbf{Y} и \mathbf{Z} в условиях Леммы отличались более чем в одной колонке, это привело бы к тому, что решение состояло бы из суммы нескольких $\sigma_-^i (\omega_r^{\mathbf{X}^i})$. Первое тождество Якоби (3.19) удовлетворяет условиям Леммы, поэтому его решение имеет вид $B_{q+1}^{\mathbf{Y}} = \sigma_- (\omega_r^{\mathbf{X}})$. Также, очевидно, что если $\omega_r^{\mathbf{X}}$ получено в результате применения Леммы, то тождество Якоби $\sigma_- (D\omega_r^{\mathbf{X}}) = 0$ также удовлетворяет условиям Леммы, и т.д. То есть данная Лемма позволяет последовательно достроить первое развёрнутое уравнение до полной развёрнутой системы. Последний шаг мы пропускаем ввиду простоты последовательного применения Леммы.

3.2.5 Развёрнутая система уравнений

Результат данной главы состоит в том, что развёрнутая система уравнений, описывающая безмассовое поле произвольного спина \mathbf{S} в пространстве Минковского произвольной размерности, имеет вид условия обобщённого ковариантного постоянства,

а калибровочная инвариантность является явной

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\omega_p &= 0, & \omega_p &\in \mathcal{W}_p, \\
\delta\omega_p &= \mathcal{D}\xi_{p-1}, & \xi_{p-1} &\in \mathcal{W}_{p-1}, \\
\delta\xi_{p-1} &= \mathcal{D}\xi_{p-2}, & \xi_{p-2} &\in \mathcal{W}_{p-2}, \\
&\dots, & & \dots, \\
\delta\xi_1 &= \mathcal{D}\xi_0, & \xi_0 &\in \mathcal{W}_0,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

где $\mathcal{D} = D + \sigma_-$ — плоская обобщённая ковариантная производная $\mathcal{D}^2 = 0$ и пространства $\mathcal{W}_{p\pm k}$ представляют собой конечный ($k < 0$) или бесконечный ($k \geq 0$) градуированный набор связностей алгебры Лоренца

$$\mathcal{W}_{p\pm k} = \{W_{q_0\pm k}^{\mathbf{F}_0}, W_{q_1\pm k}^{\mathbf{F}_1}, W_{q_2\pm k}^{\mathbf{F}_2}, \dots\}, \tag{3.24}$$

которые однозначно определяются спином \mathbf{S} поля. Для $\mathbf{S} = \mathbb{Y}[h_1, \dots, h_n]$

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} h_1 h_2 h_3 \quad h_n \\ \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \end{array} \end{array} \tag{3.25}$$

неприводимые $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -модули \mathbf{F}_g и степени дифференциальных форм q_g имеют вид

$$\begin{array}{ccccccccc}
g=0 & g=1 & g=2 & \dots & g=n & g=n+1 & \dots & & \\
\begin{array}{|c|} \hline h_2 h_3 \quad h_n \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline h_1 h_3 \quad h_n \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline h_1 h_2 \quad h_n \\ \hline \end{array} & \dots & \begin{array}{|c|} \hline h_1 h_2 h_3 \quad h_n \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline h_1 h_2 h_3 \quad h_n \\ \hline \end{array} & \dots & & \\
q_0 = h_1 & q_1 = h_2 & q_2 = h_3 & \dots & q_n = 0 & q_{n+1} = 0 & \dots & &
\end{array} \tag{3.26}$$

или

$$q_k = h_{k+1}, \tag{3.27}$$

$$\mathbf{F}_k = \mathbb{Y}[h_1 + 1, \dots, h_k + 1, \widehat{h}_{k+1}, h_{k+2}, \dots], \tag{3.28}$$

где для удобства следует положить $h_k = 0$ при $k > n$.

Отметим, что первое поле, которое является ноль-формой, появляется в градуировке n и представляет собой обобщённый тензор Вейля. Путём последовательного

выражения вспомогательных полей через производные динамических, т.е. поля Лабастиды $\phi^{\mathbf{S}}$, тензор Вейля оказывается выраженным через n -ую производную $\phi^{\mathbf{S}}$. Также, очевидно, тензор Вейля калибровочно инвариантен.

В симметричном базисе для $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_p)$ явные выражения для калибровочно-инвариантных напряжённостей и калибровочных преобразований в градуировках ноль ($s_p > 1$) и один ($s_p > 2$) имеют вид

$$R_{\mathbf{p}+1}^{a(s_1-1), \dots, c(s_p-1)} = D e_{\mathbf{p}}^{a(s_1-1), \dots, c(s_p-1)} + h_m \omega_{\mathbf{p}}^{a(s_1-1), \dots, c(s_p-1), m}, \quad (3.29)$$

$$R_{\mathbf{p}+1}^{a(s_1-1), \dots, c(s_p-1), u} = D \omega_{\mathbf{p}}^{a(s_1-1), \dots, c(s_p-1), u} + h_m \omega_{\mathbf{p}}^{a(s_1-1), \dots, c(s_p-1), um}, \quad (3.30)$$

$$\delta e_{\mathbf{p}}^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1)} = D \xi_{\mathbf{p}-1}^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1)} + h_m \xi_{\mathbf{p}-1}^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1), m}, \quad (3.31)$$

$$\delta \omega_{\mathbf{p}}^{a(s_1-1), \dots, c(s_p-1), u} = D \xi_{\mathbf{p}-1}^{a(s_1-1), \dots, c(s_p-1), u} + h_m \xi_{\mathbf{p}-1}^{a(s_1-1), \dots, c(s_p-1), um}. \quad (3.32)$$

Отметим почти тождественное сходство между напряжённостями и законами калибровочных преобразований, а также очевидную инвариантность напряжённостей.

Для произвольного s_p , $\mathbf{S} = \mathbb{Y}[p, q, r, h_4, \dots] = \mathbb{Y}(s_1, \dots, \overbrace{2, \dots, 2}^{q-r}, \overbrace{1, \dots, 1}^{p-q})$, также можно выписать аналогичные выражения. Ограничимся только напряжённостями

$$R_{\mathbf{p}+1}^{a_1(s_1-1), \dots, a_q(s_q-1)} = D e_{\mathbf{p}}^{a_1(s_1-1), \dots, a_q(s_q-1)} + \overbrace{h_m \dots h_m}^{p+1-q} \omega_{\mathbf{q}}^{a_1(s_1-1), \dots, a_q(s_q-1), \overbrace{m, \dots, m}^{p+1-q}},$$

$$R_{\mathbf{q}+1}^{a_1(s_1-1), \dots, a_r(s_r-1), \overbrace{u, \dots, u}^{p+1-r}} = D \omega_{\mathbf{q}}^{a_1(s_1-1), \dots, a_r(s_r-1), \overbrace{u, \dots, u}^{p+1-r}} + \overbrace{h_m \dots h_m}^{q+1-r} \omega_{\mathbf{r}}^{a_1(s_1-1), \dots, a_r(s_r-1), \overbrace{[um, \dots, um, u, \dots, u]}^{q+1-r, p-q}}.$$

3.2.6 Вычисление σ_- -когомологий

Для вычисления σ_- -когомологий нам придётся раскладывать связности $W_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{F}_i}$ на неприводимые представления согласно Приложению С.5, откуда мы также займствуем все обозначения.

Обозначим σ_- -комплекс на пространстве \mathcal{W} , (3.24), построенном по спине \mathbf{S} как $\mathcal{C}(\mathcal{W}, \sigma_-)$. Будут важны следующие простые свойства σ_- . (1) Если конвертировать все мировые индексы форм в касательные с помощью $h^{a\mu}$, то становится очевидно, что σ_- коммутирует с алгеброй Лоренца. (2) Действие σ_- заключается в антисимметризации некоторых касательных индексов с индексами формы и наложении, если необходимо, юнговского симметризатора, поэтому σ_- чувствителен только к конкретному типу симметрии. Если некоторая компонента характеризуется диаграммой с слишком малым числом рядов или действие σ_- приводит к тому, что антисимметризуемый индекс оказывается в одной группе симметричных индексов с некоторым индексом формы, то соответствующие компоненты оказываются σ_- -замкнутыми. В этом смысле σ_- действует максимально невырожденным образом, совместным с нильпотентностью, т.е. у σ_- нет 'случайных' нулей. (3) Каждый элемент $W_{\mathbf{q}'}^{\mathbf{F}_i} \in \mathcal{W}$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений алгебры Лоренца согласно

$$\mathbf{F}_i \otimes_{\mathfrak{so}(d)} \mathbb{Y}[q'] = \sum_{r=0}^{r=q} \sum_{i_r} N_{i_r}^r \mathbf{z}_{i_r}^r, \quad (3.33)$$

где $N_{i_r}^r$ есть кратность представления $\mathbf{Z}_{i_r}^r$ в тензорном произведении, а r есть порядок следа (количество индексов, которые сворачиваются с метрическим тензором при проектировании на данную компоненту). (4) σ_- сохраняет порядок следа r . Поэтому $\mathcal{C}(\mathcal{W}, \sigma_-)$ раскладывается в прямую сумму комплексов $\mathcal{C}(\mathcal{W}, r, \mathbf{Z}, \sigma_-)$

$$\mathcal{C}(\mathcal{W}, r, \mathbf{Z}, \sigma_-) : \quad \dots \longrightarrow [\mathcal{W}_{q'}^g]_{\mathbf{Z}} \longrightarrow [\mathcal{W}_{q'+1}^{g-1}]_{\mathbf{Z}} \longrightarrow \dots, \quad (3.34)$$

параметризованных некоторым представлением \mathbf{Z} алгебры Лоренца, возникающим как след порядка r в разложении (3.33) некоторого элемента из $\mathcal{W}_{q'}^g$ ($[\mathcal{W}_{q'}^g]_{\mathbf{Z}}$ обозначает проекцию на неприводимые представления типа \mathbf{Z}). Таким образом, σ_- «не смешивает» разные представления, и при ограничении на $\mathcal{C}(\mathcal{W}, r, \mathbf{Z}, \sigma_-)$ его действие даётся некоторой матрицей размера, определяемого кратностью \mathbf{Z} в $\mathcal{W}_{q'}^g$ и $\mathcal{W}_{q'+1}^{g-1}$.

Отметим, что ниже мы уделяем внимание только типу представлений и их кратности, а не тому, как конкретно неприводимые тензоры данного типа симметрии вложены в связности алгебры Лоренца из \mathcal{W} . Для наших целей этого вполне достаточно, хотя для динамического поля $\phi^{\mathbf{S}}$ вложение в обобщённую тетраду из $\mathcal{W}_p^{g=0}$ было уже явно предъявлено.

Для вычисления σ_- -когомологий теперь достаточно знать кратность вхождения \mathbf{Z} в $\mathcal{W}_{q' \pm i}^{g \mp i}$, поскольку σ_- действует максимально невырожденным способом. Диаграммы удобнее записывать в блочных обозначениях, см. Приложение С.1, т.е. $\mathbf{S} = \mathbb{Y}\{(s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N)\}$. Удобно определить $p = p_1 + \dots + p_N$. Среди всех \mathbf{Z} выделяются три случая, когда комплекс состоит из 2, 3 и 4 нетривиальных подпространств (в силу правил тензорного произведения и свойств \mathbf{F}_i , произвольное представление \mathbf{Z} может возникать лишь для небольшого диапазона i).

Когда диаграммы \mathbf{F}_i записаны в блочном базисе, явно видно, что скачки в степени форм q_i происходят при переходе от одного блока к другому, поэтому удобно ввести двойной индекс $\{n, k\}$ вместо градуировки g , так что $n = N, \dots, 0$ упорядочено по убыванию и нумерует блок в диаграмме, к которому приписываются клетки, а индекс $k = 0, 1, \dots, k_n^{max}$ равен количеству приписываемых клеток, которое ограничено сверху разностью длин k_n^{max} $(n+1)$ -го и n -го блоков.

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{c} s_1 - 1 \\ p_1 \end{array}} \\
 \boxed{\begin{array}{c} s_2 - 1 \\ p_2 \end{array}} \\
 \boxed{\begin{array}{c} s_N - 1 \\ p_N \end{array}} \\
 \boxed{k}
 \end{array}, \quad
 \begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{c} s_1 - 1 \\ p_1 \end{array}} \\
 \boxed{\begin{array}{c} s_2 - 1 \\ p_2 \end{array}} \\
 \boxed{\begin{array}{c} s_N - 1 \\ p_N \end{array}} \\
 \boxed{\begin{array}{c} s_N - 1 \end{array}}
 \end{array}, \quad (3.35)$$

$$\begin{array}{c}
\boxed{\begin{array}{c} s_1 - 1 \\ p_1 \end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{c} s_2 - 1 \\ p_2 \end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{c} s_N - 1 \\ p_N \end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{c} s_N - 1 \end{array}}
\end{array}
, \quad
\begin{array}{c}
\boxed{\begin{array}{c} s_1 - 1 \\ p_1 \end{array}} \quad \boxed{k} \\
\boxed{\begin{array}{c} s_2 - 1 \\ p_2 \end{array}} \quad \boxed{s_1 - s_2 - 1} \\
\boxed{\begin{array}{c} s_N - 1 \\ p_N \end{array}} \quad \boxed{s_2 - s_3 - 1} \\
\boxed{\begin{array}{c} s_N - 1 \end{array}}
\end{array}
. \quad (3.36)$$

Семейство диаграмм слева на (3.35) отвечает $\mathbf{F}_{\{n=N,k\}}$, $k = 0, \dots, s_N - 1$. После диаграммы $\mathbf{F}_{\{n=N,k\}}$ с $k = s_N - 1$ следует диаграмма $\mathbf{F}_{\{n=N-1,k=0\}}$, показанная справа на (3.35), и диаграммы $\mathbf{F}_{\{n=N-1,k\}}$, с $k = 0, \dots, s_{N-1} - s_N - 1$ получаются приписыванием строки длины k снизу к $(N-1)$ -му блоку, как показано слева на (3.36), и так далее, заканчивая $\mathbf{F}_{\{N=0,k\}}$ с $k = 0, 1, \dots$, показанным справа на (3.36).

Далее нам потребуется явный вид разложения тензорного произведения вида (3.33), который приведён в Приложении С.5. В леммах, приведённых ниже, $\mathcal{C}(\mathcal{W}, r, \mathbf{Z}, \sigma_-)$ параметризован некоторой $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{\{\alpha_j, \beta_i\}}$ вида (С.29), полученной в тензорном произведении (С.28) с \mathbf{X} , равным одной из $\mathbf{F}_{\{n,k\}}$. Также используется производящая функция (С.33) для разбиений (С.31). С каждым представлением $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{\{\alpha_j, \beta_i\}}$, возникающем в тензорном произведении $\mathbf{F}_i \otimes_{\mathfrak{so}(d)} \mathbb{Y}[q']$, ассоциировано число ρ , которое определяется, как

$$q' = \left[\begin{array}{c} \text{количество клеток в } \mathbf{Z}, \\ \text{которые не совпадают с } \mathbf{F}_i, \\ \text{т.е. были приписаны или вычеркнуты} \end{array} \right] + 2\rho. \quad (3.37)$$

Более подробно см. формулу (С.30).

Лемма. 1. σ_- -когомологии $\mathbf{H}_{g=0}^q$ и $\mathbf{H}_{g=1}^q$ нетривиальны и даются

$$\mathbf{H}_g^q = \begin{cases} \mathbb{Y}((s_i - 1, p_i))^{\{\alpha_j, \beta_i\}} M_{\{\alpha_j, \beta_i\}} : \begin{array}{l} \alpha_{N+1} = 0, \\ \sum_{i=0}^N \alpha_i = q, \end{array} & q \in [0, p], \quad g = 0, \\ \sim \mathbf{H}_{g=0}^{2p-q+1}, & q \in [p+1, 2p+1], \quad g = 1, \\ \emptyset, & q > 2p+1, \quad \text{для любого } g, \end{cases} \quad (3.38)$$

где кратность $M_{\{\alpha_j, \beta_i\}}$ представления $\mathbb{Y}((s_i - 1, p_i))^{\{\alpha_j, \beta_i\}}$ определена ниже. Обозначение $\sim \mathbf{H}_{g=0}^{2p-q+1}$ подразумевает, что старшие $q \geq p+1$ группы как прямая сумма неприводимых модулей изоморфны соответствующим младшим $q \leq p$ группам.

Доказательство. Пусть $\mathbf{Z} = \mathbb{Y}\{(s_i - 1, p_i)\}^{\{\alpha_j, \beta_i\}}$ есть элемент из $\mathbf{F}_{\{N,0\}} \otimes \mathbb{Y}[q]$. Из формы $\mathbf{F}_{\{N,0\}}$ и правил тензорного произведения следует, что \mathbf{Z} кроме $\mathcal{W}_q^{g=0} \sim \mathbf{F}_{\{N,0\}} \otimes \mathbb{Y}[q]$ может присутствовать ещё только в $\mathcal{W}_{q-1}^{g=1}$, т.е. он не встречается в $\mathcal{W}_{q-k}^{g=k}$ с $k > 1$. Поэтому $\mathcal{C}(\mathcal{W}, r, \mathbf{Z}, \sigma_-)$ состоит из двух подмодулей $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_0 \longrightarrow 0$,

где размерность V_0 и V_1 даётся кратностью \mathbf{Z} в $\mathcal{W}_{q-1}^{g=1}$ и $\mathcal{W}_q^{g=0}$ соответственно,

$$\dim(V_1) = \begin{cases} \begin{cases} \mathbb{P}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \rho - 1) & \rho \geq 1, \\ 0, & \rho = 0, \end{cases} & \alpha_{N+1} = 0, \\ \mathbb{P}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \rho), & \alpha_{N+1} > 0, \end{cases}$$

$$\dim(V_0) = \mathbb{P}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \rho), \quad (3.39)$$

Если $\alpha_{N+1} > 0$, то размерности V_0 и V_1 совпадают, и следовательно, произвольная компонента $\mathcal{W}_q^{g=0}$ с $\alpha_{N+1} > 0$ может быть исключена с помощью некоторой компоненты в $\mathcal{W}_{q-1}^{g=1}$, т.е. является точной. Отсюда следует, что $\mathbb{H}^{k > 2p+1} = \emptyset$, поскольку $\rho \leq p$ и неприводимые компоненты формы со степенью большей $(2p+1)$ обязательно имеют $\alpha_{N+1} > 0$. Если $\alpha_{N+1} = 0$, то размерности V_0 и V_1 различны: $\dim(V_1) < \dim(V_0)$ для $q \leq p$, $\dim(V_1) = \dim(V_0)$ для $q = p+1$ и $\dim(V_1) > \dim(V_0)$ для $q > p$. Поэтому кратность компонент \mathbf{Z} в $\mathcal{W}_q^{g=0}$ при $q \leq p$, представляющих класс когомологий, равна $M_{\{\alpha_j, \beta_i\}} = |\dim(V_1) - \dim(V_0)|$, и этому же равна кратность представителей когомологий в $\mathcal{W}_{q-1}^{g=1}$ при $q > p+1$. Из очевидного свойства разбиений целых чисел

$$\mathbb{P}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N | m) = \mathbb{P}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \epsilon_1 + \dots + \epsilon_N - m) \quad (3.40)$$

следует, что существует дуальность на группах когомологий вида $\mathbb{H}_{r,g=0}^{p-k} \sim \mathbb{H}_{r+k+1,g=1}^{p+k+1}$ или, схематично, $\mathbb{H}^p \sim \mathbb{H}^{p+1}$, $\mathbb{H}^{p-1} \sim \mathbb{H}^{p+2}$ и т.д. ■

Лемма. 2. Если \mathbf{Z} есть элемент из $\mathbf{F}_{\{n,k\}} \otimes \mathbb{Y}[q]$ для некоторых $q \geq 0$ и $1 < k < k_n^{max} - 1$, то комплекс $\mathcal{C}(\mathcal{W}, r, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\sigma}_-)$ ацикличесен.

Доказательство. Из правил тензорного произведения имеем, что в комплексе лишь три подмодуля нетривиальны, $0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0$, где размерности даются $\dim(V_0) = \mathbb{P}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \rho)$, $\dim(V_1) = \mathbb{P}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N, 1 | \rho + 1)$, $\dim(V_2) = \mathbb{P}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \rho + 1)$. Простые вычисления с производящими функциями приводят к $\dim(V_0) \leq \dim(V_1)$, $\dim(V_2) \leq \dim(V_1)$ и $\dim(V_0) - \dim(V_1) + \dim(V_2) = 0$, что говорит об отсутствии когомологий. ■

Лемма. 3. Если \mathbf{Z} есть элемент $\mathbf{F}_{\{n,k\}} \otimes \mathbb{Y}[q]$ для некоторых $q \geq 0$ с $k = 0$ и $n < N$, то комплекс $\mathcal{C}(\mathcal{W}, r, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\sigma}_-)$ ацикличесен.

Доказательство. Для данного \mathbf{Z} может быть не более четырёх нетривиальных подмодулей в комплексе, $0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$, где размерности даются

$$\begin{aligned} \dim(V_0) &= \mathbb{P}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \rho), \\ \dim(V_1) &= \mathbb{P}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}, \epsilon_n + 1, \epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_N | \rho), \\ \dim(V_2) &= \begin{cases} \mathbb{P}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}, p_n - \epsilon_n, \epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_N | \rho - \epsilon_n - 1) & \rho \geq \epsilon_n + 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \\ \dim(V_3) &= \begin{cases} \mathbb{P}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}, p_n - \epsilon_n - 1, \epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_N | \rho - \epsilon_n - 2) & \rho \geq \epsilon_n + 2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

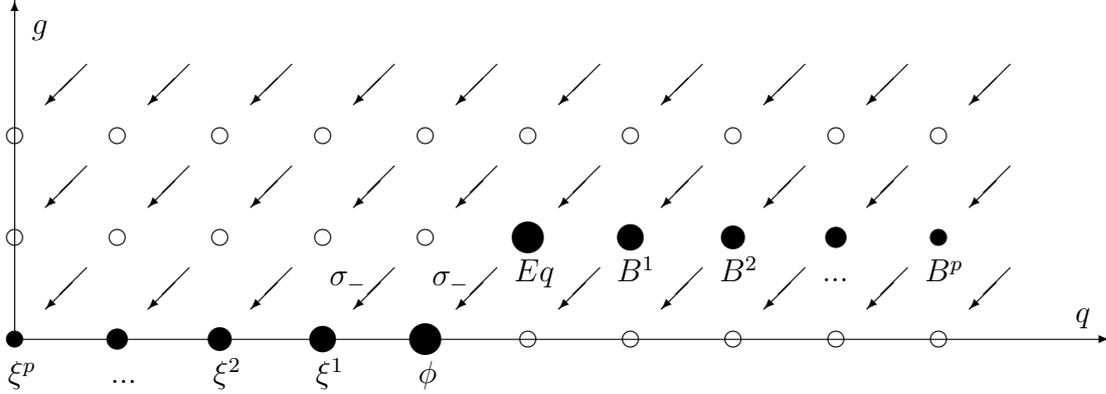


Рис. 3.1: Схематическая картина σ_- -комплекса в случае бозонов. По горизонтальной оси отложен ранг форм, по вертикальной — градуировка. Стрелки обозначают действие σ_- , жирными точками отмечены места, где коhomологии нетривиальны. Точки одинакового радиуса отвечают коhomологиям, изоморфным как модули алгебры Лоренца. Видна дуальность между полями ϕ и уравнениями Eq , калибровочными параметрами на k -ом уровне ξ^k и тождествами Бьянки k -го порядка B^k . Уравнения имеют второй порядок.

Вновь простые вычисления приводят к $\dim(V_0) - \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_3) = 0$ и соответствующим неравенствам для размерностей, и следовательно, последовательность точна. ■

Вышеперечисленные три случая покрывают все возможные неприводимые представления, возникающие при разложении элементов \mathcal{W} . Случай с $s_N = 1$ или $\mathbf{Y} = \mathbb{Y}(0)$ не являются случаями общего положения, но приводят к тому же ответу.

В случае фермионных полей вычисления совершенно аналогичны, поскольку тензорное произведение спин-тензорного представления на $\mathbb{Y}[q]$ может быть представлено через правила для бозонного случая (С.34). Отличие фермионного случая заключается в том, что все нетривиальные коhomологии сидят в нулевой градуировке, поскольку уравнения движения имеют первый порядок по производным и дуальность имеет вид $\mathbb{H}_{r,g=0}^{p-k} \sim \mathbb{H}_{r+k+1,g=0}^{p+k+1}$, где r равно порядку Γ -следа, или, огрубляя, $\mathbb{H}^p \sim \mathbb{H}^{p+1}$, $\mathbb{H}^{p-1} \sim \mathbb{H}^{p+2}$ и т.д.

3.2.7 Интерпретация σ_- -коhomологий

Из Лемм 1-3 предыдущего раздела, 3.2.6, следует

1. Нетривиальны только $\mathbb{H}_{g=0}^{p-k}$ и $\mathbb{H}_{g=1}^{p+k+1}$, $k = 1, \dots, p$. Следовательно, динамические поля и дифференциальные калибровочные параметры находятся в $\mathcal{W}_q^{g=0}$, $q = 0, \dots, q_0$, $q_0 = p = h_1$;

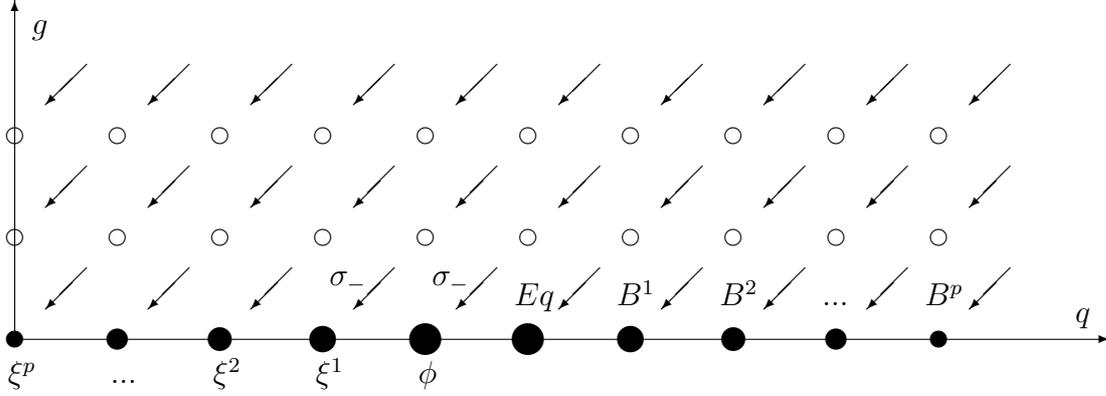


Рис. 3.2: Та же картина в случае фермионов. Видна дуальность между полями ϕ и уравнениями Eq , калибровочными параметрами на k -ом уровне ξ^k и тождествами Бьянки k -го порядка B^k . Уравнения имеют первый порядок.

2. Уравнения имеют второй порядок и принадлежат $\mathbf{H}_{g=1}^{p+1}$, тождества Бьянки для симметрии k -го уровня имеют $(k+2)$ -й порядок.
3. Имеется дуальность вида $\mathbf{H}_{g=0}^{p-k} \sim \mathbf{H}_{g=1}^{p+k+1}$, см. рис. 3.1, т.е. имеется взаимнооднозначное соответствие между динамическими полями и уравнениями движения $\mathbf{H}^p \sim \mathbf{H}^{p+1}$, калибровочными параметрами k -го уровня и тождествами Бьянки k -го порядка $\mathbf{H}^{p-k} \sim \mathbf{H}^{p+1+k}$.
4. Примарные компоненты $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -модулей, параметризующих представителей $\mathbf{H}^{p-k}(\sigma_-)$, соответствуют (3.16) с $\alpha_2 \leq h_1 - h_2$ и $\alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = h_1 - k$, что совпадает со структурой представления (1.26).

Дуальность в σ_- -когомологиях является строгим указанием на то, что безмассовое поле произвольного спина допускает лагранжево описание. Это оказывается действительно так, и чрезвычайно простой лагранжиан будет построен в Главе 4.

Отметим, что последовательность приводимых алгебраических симметрий

$$\dots \longrightarrow \xi_{q_2-2}^{\mathbf{F}_2} \longrightarrow \xi_{q_1-1}^{\mathbf{F}_1} \longrightarrow e_{q_0}^{\mathbf{F}_0} \longrightarrow \phi^{\mathbf{S}} \longrightarrow 0 \quad (3.41)$$

даёт алгебраическую резольвенту для поля Лабастиды — метрическое поле с некоторыми следовыми условиями, эквивалентное большому числу неприводимых $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -модулей, представляется как точная последовательность простых объектов — неприводимых $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -связностей.

В случае фермионов дуальность имеет немного другой вид, см. рис. 3.2, $\mathbf{H}_{g=0}^{p-k} \sim \mathbf{H}_{g=1}^{p+k+1}$, т.е. все выводы остаются в силе с единственным изменением в том, что уравнения имеют первый порядок.

Аналогично уже разобранным примерам 2.6 и 3.2.1, развёрнутая система (3.23) содержит бесконечное число дуальных описаний, получающихся ограничением системы на градуировки $g \geq g_0$. Среди дуальных формулировок присутствует конечное число калибровочных дуальных описаний и бесконечное число некалибровочных дуальных описаний.

В заключение отметим, что если разбить все поля на калибровочные и ноль-формы (вейлевский модуль), то обобщённый тензор Вейля, как ноль-форма с наименьшей градуировкой, автоматически становится представителем σ_- -когомологий в Вейлевском модуле.

Дуальное описание с обобщённым тензором Вейля в качестве динамического поля исследовалось в [69, 97, 98, 195]. Наиболее существенный недостаток такого описания заключается в нелокальности действия, построенного в [98].

3.2.8 Редукция к уравнениям Лабастиды

Покажем прямыми вычислениями, как уравнения Лабастиды (1.52) выводятся из развёрнутой формулировки.

Для простоты изложения мы рассматриваем случай $s_p > 2$ и $s_p > 1$ (после взятие проекции от второй напряжённости, когда экстра-поле выпадает из рассмотрения), т.е. мы будем использовать выражения (3.29)-(3.30) для напряжённостей полей $e_p^{\mathbf{F}^0}$ и $\omega_p^{\mathbf{F}^1}$.

Для получения уравнений Лабастиды достаточно потребовать равенства нулю лишь некоторых проекций напряжённостей для $e_p^{\mathbf{F}^0}$ и $\omega_p^{\mathbf{F}^1}$, а не всех напряжённостей целиком, поскольку напряжённости удовлетворяют тождествам Бьянки, и также нам не требуются пока уравнения, выражающие экстра-поле. Рассмотрим следующие проекции

$$R^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1) | a_1 \dots a_p b} = 0, \quad (3.42)$$

$$R^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1), m | a_1 \dots a_p m} = 0. \quad (3.43)$$

Преобразуем индексы формы в (3.29) и (3.30) в касательные

$$\partial^u e^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1) | u[p]} + \omega^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1), u | u[p]} = 0, \quad (3.44)$$

$$\partial^u \omega^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1), m | u[p]} + \omega^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1), mu | u[p]} = 0. \quad (3.45)$$

Выберем алгебраическую калибровку так, что все «лишние поля» в $e_p^{\mathbf{F}^0}$ равны нулю и, следовательно, $e_p^{\mathbf{F}^0}$ эквивалентно полю Лабастиды как набор Лоренцевых модулей. Уравнения (3.42) и (3.43) получаются из (3.44) и (3.45) симметризацией индексов u_1, \dots, u_p с a_1, \dots, a_p и, затем, взятием следа в (3.45) по индексам m и u_{p+1} (последняя

операция как раз исключает экстра-поле), что даёт⁶

$$\sum_{i=1}^p (-)^{i+1} \partial^{a_i} e^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1) | a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_p m} + (-)^p \partial^m e^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1) | a[p]} +$$

$$+ (-)^p \omega^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1), m | a[p]} = 0, \quad (3.46)$$

$$\sum_{i=1}^p (-)^{i+1} \partial^{a_i} \omega^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1), m | a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_p} + (-)^p \partial_m \omega^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1), m | a[p]} = 0. \quad (3.47)$$

Последнее слагаемое в (3.47) прямо выражается из (3.46). Для того чтобы выразить k -ое слагаемое в (3.47), возьмём след в (3.46) по индексам a_k и m , что приводит к

$$\sum_{i=1}^p (-)^{i+1} \partial^{a_i} e^{a_1(s_1-1), \dots, a_k(s_k-2)m, \dots, a_p(s_p-1) | a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_p} +$$

$$+ (-)^p \partial_m e^{a_1(s_1-1), \dots, a_k(s_k-2)m, \dots, a_p(s_p-2) | a[p]} + (-)^k \omega^{a_1(s_1-1), \dots, a_p(s_p-1), m | a_1 \dots \hat{a}_k \dots a_p} = 0. \quad (3.48)$$

Поставляя (3.48) и (3.46) в (3.47) и отождествляя различные слагаемые согласно

$$\eta_{mn} \phi^{a(s_1), \dots, a_i(s_i-1)n, \dots, a_j(s_j-1)m, \dots, a_p(a_p)} =$$

$$= \eta_{mn} e^{a_1(s_1-1), \dots, a_i(s_i-2)m, \dots, a_j(s_j-1), \dots, a_p(s_p-1) | a_1 \dots \hat{a}_j n \dots a_p} +$$

$$+ \eta_{mn} e^{a_1(s_1-1), \dots, a_i(s_i-1), \dots, a_j(s_j-2)m, \dots, a_p(s_p-1) | a_1 \dots \hat{a}_i n \dots a_p}, \quad (3.49)$$

$$\eta_{mn} \phi^{a(s_1), \dots, a_i(s_i-2)nm, \dots, a_p(a_p)} =$$

$$= 2\eta_{mn} e^{a_1(s_1-1), \dots, a_i(s_i-2)m, \dots, a_p(s_p-1) | a_1 \dots \hat{a}_i n \dots a_p} \quad (3.50)$$

и исходному определению (3.14), получаем уравнения Лабастиды (1.52).

3.2.9 Степени свободы

В оригинальной работе Лабастиды [90] не было доказано за исключением частных примеров, что предложенные уравнения действительно описывают правильное число степеней свободы. Доказательство было проведено позже в [98] и совсем недавно в [194]. Хотя этот вопрос можно считать закрытым, однако мы хотим продемонстрировать на простейших примерах, что подсчёт числа степеней свободы может быть осуществлён с помощью σ -когомологий.

Хорошо известно, что в системах со связями первого рода, к которым относятся безмассовые поля в пространстве Минковского, определить число степеней свободы можно просто подсчитав количество независимых данных задачи Коши, которые могут быть исключены с помощью калибровочных параметров. При этом калибровочный параметр и его производные по времени разных порядков рассматриваются

⁶Индекс с крышкой пропускается.

на поверхности Коши как независимые данные. Если закон калибровочных преобразований имеет вид $\delta_\xi \phi_{\mu\nu\dots} = \partial_\mu \xi_{\nu\dots}$, то с помощью $\xi_{\nu\dots}$ можно исключить степеней свободы в два раза больше числа параметров $\xi_{\nu\dots}$, так как на поверхности Коши в закон калибровочных преобразований входят $\xi_{\nu\dots}$ и $\dot{\xi}_{\nu\dots}$. Схематически можно написать⁷ $p.d.o.f. = \#\phi - 2\#\xi$.

Если имеются приводимые симметрии вида $\delta_\chi \xi_{\nu\dots} = \partial_\nu \chi_{\dots}$, $\delta_\chi \phi_{\mu\nu\dots} \equiv 0$, то не все из $\xi_{\nu\dots}$ действуют на $\phi_{\mu\nu\dots}$ эффективно, и поэтому исключают меньшее число компонент. Количество таких «неисключённых» компонент равно количеству χ_{\dots} , $\dot{\chi}_{\dots}$ и $\ddot{\chi}_{\dots}$, т.е. утроенному количеству калибровочных параметров на втором уровне. Поэтому подсчёт числа степеней свободы даёт $p.d.o.f. = \#\phi - 2\#\xi + 3\#\chi$. Данное простое правило может быть распространено на случай произвольной квадратичной калибровочной теории с приводимыми симметриями [196, 197]. Например, в случае безмассового поля спина 2 в размерности d имеем $\frac{d(d-3)}{2}$ степеней свободы, что даётся $\frac{d(d+1)}{2} - 2d$, где $\frac{d(d+1)}{2}$ — число полей (количество компонент метрики $\phi_{\mu\nu}$) и d — количество калибровочных параметров ξ_μ .

Полная информация о «количестве» полей и калибровочных параметров, точнее набор неприводимых модулей алгебры Лоренца, содержится в $\mathbf{H}_{g=0}^k(\sigma_-)$ для $k = 0, \dots, p$. Оказывается, с этой информацией можно не просто «сосчитать» количество степеней свободы, но восстановить точную последовательность (1.26), которая определяет неприводимое представление алгебры $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$, называемое свободным безмассовым полем. По модулю зависимости от координат x^μ или после Фурье преобразования от импульсов p_μ , элементами этой последовательности являются некоторые $\mathfrak{so}(d-1)$ -представления, определяющие представление малой алгебры Вигнера $\mathfrak{so}(d-2)$ как фактор пространство, например (1.38). Разложение полей алгебры $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ на тензоры $\mathfrak{so}(d-1)$ осуществляется с помощью ∂_μ или после Фурье преобразования с помощью вектора импульса p_μ .

Например, для поля спина 2 σ_- -когомологии в секторе полей и калибровочных параметров и их разложение на представления $\mathfrak{so}(d-1)$ имеют вид

	$\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -представители	редукция $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ до $\mathfrak{so}(d-1)$
\mathbf{H}^0	$\square \sim \xi_\mu$	$\square \oplus \bullet$
\mathbf{H}^1	$\square \oplus \bullet \sim \phi_{\mu\nu}, \phi^\nu_\nu \neq 0$	$\square \oplus \square \oplus 2\bullet$

Процесс наложения калибровок и исключения полей на языке диаграмм Юнга соответствует вычёркиванию одинаковых диаграмм в $0 \longrightarrow 2\mathbf{H}^0 \longrightarrow \mathbf{H}^1 \longrightarrow ?? \longrightarrow 0$, приводя к $0 \longrightarrow \square \longrightarrow \square \longrightarrow ?? \longrightarrow 0$, что как раз и определяет неприводимое представление $\mathfrak{so}(d-2)$ с симметрией \square , таким образом в случае спина 2 мы восстанавливаем определение (1.26) $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$ -представления $\mathcal{H}(0; \square)$.

Менее тривиальный пример — простейшее поле смешанного типа симметрии спина \square , которое имеет два уровня калибровочных симметрий и таблица представителей \mathbf{H}^0 , \mathbf{H}^1 и \mathbf{H}^2 , а также их редукция до $\mathfrak{so}(d-1)$ имеет вид

⁷ $p.d.o.f.$ — сокращение от physical degrees of freedom, а $\#\phi$ обозначает число компонент ϕ .

	$\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -представители	редукция $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ до $\mathfrak{so}(d-1)$
\mathbf{H}^0	$\square \sim \xi_\mu$	$\square \oplus \bullet$
\mathbf{H}^1	$\square \oplus \square \oplus \bullet \sim \xi_{\mu\nu}^A \oplus \xi_{\mu\nu}^S, \xi_\nu^{S\nu} \neq 0$	$\square \oplus \square \oplus 2\square \oplus 2\bullet$
\mathbf{H}^2	$\square \oplus \square \sim \phi_{\mu\nu, \lambda}, \phi_{\mu\nu, \nu} \neq 0$	$\square \oplus \square \oplus \square \oplus 2\square \oplus \bullet$

Снова, простое сокращение диаграмм в $0 \longrightarrow 3\mathbf{H}^0 \longrightarrow 2\mathbf{H}^1 \longrightarrow \mathbf{H}^2 \longrightarrow ?? \longrightarrow 0$ даёт (1.39).

Таким образом, проблема отождествления развёрнутой системы уравнений с некоторым неприводимым унитарным представлением $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$ сводится к простой комбинаторной проблеме (i) разложения $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -представителей $\mathbf{H}(\sigma_-)$ на представления $\mathfrak{so}(d-1)$; (ii) сокращения одинаковых диаграмм в

$$0 \longrightarrow (p+1)\mathbf{H}^0 \longrightarrow p\mathbf{H}^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow 2\mathbf{H}^{p-1} \longrightarrow \mathbf{H}^p \longrightarrow \mathcal{H}(0; \mathbf{S}) \longrightarrow 0. \quad (3.51)$$

Опуская комбинаторные вычисления, мы заключаем, что на решениях предложенных развёрнутых уравнений для безмассового поля спина \mathbf{S} действительно реализуется неприводимое унитарное представление $\mathcal{H}(0; \mathbf{S})$ алгебры $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$.

Отсылая к замечанию о степенях свободы в 6.5, лишь отметим, что правильность развёрнутых уравнений сразу следует из того факта, что уравнения зануляют представления всех когомологий, кроме обобщённого тензора Вейля.

3.3 Выводы

В данной главе была построена развёрнутая система уравнений (3.23), описывающая безмассовое поле в пространстве Минковского, которое имеет спин, определяемый произвольным неприводимым конечномерным представлением \mathbf{S} малой алгебры Вигнера $\mathfrak{so}(d-2)$. Система имеет вид условий обобщённого ковариантного постоянства. Поля являются неприводимыми связностями алгебры Лоренца.

Показано, что формулировка Лабастиды получается путём наложения алгебраической калибровки на поля развёрнутой системы и исключением вспомогательных полей. При этом связности алгебры Лоренца приходится раскладывать на тензоры, что разрушает важные свойства развёрнутой системы, например, явную калибровочную инвариантность, и заметно усложняет теорию. В частности показано, что следовые условия Лабастиды естественно получаются из полей развёрнутой системы.

Примечательно, что развёрнутые уравнения для фермионного поля спина $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1 + \frac{1}{2}, \dots, s_p + \frac{1}{2})$ имеют тот же вид в декартовых координатах, что и развёрнутые уравнения для бозонного поля $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_p)$. Единственное различие состоит в замене лоренцевых связностей со значениями в тензорных модулях на неприводимые спин-тензорные модули, характеризуемые теми же диаграммами Юнга.

Глава 4

Реперная формулировка

Реперной или тетрадоподобной формулировкой называется обобщение переменных тетрада e_μ^a и спин-связность $\omega_\mu^{a,b}$ на случай полей произвольного спина и построение на их основе действия первого порядка.

Следуя работе автора [2], в данной главе на основе результатов предыдущей главы получена реперная формулировка для безмассовых полей произвольного спина в пространстве Минковского. Основным результатом состоит в построении действия для таких полей. Действие для поля произвольного спина состоит всего из двух слагаемых, полученных свёрткой индексов тетрады и первого вспомогательного поля, что заметно проще действия Лабастиды [90].

Если ограничиться задачей построения свободного квадратичного действия, то большинство полей развёрнутой системы, а именно те, что выражаются через старшие производные (выше первого порядка), оказываются несущественными и не входят (или входят в виде полных производных) в соответствующее действие. Хотя изначально реперная или тетрадоподобная формулировка, кажется, не связана прямо с развёрнутой, но так как полями и в той и в другой являются дифференциальные формы со значениями в некоторых представлениях алгебры Лоренца, то на самом деле, реперная формулировка оперирует с небольшим подмножеством полей развёрнутой формулировки, которое включает в себя обобщённую тетраду и часть вспомогательных полей.

Сначала в 4.1 рассматривается хорошо известный пример реперного действия для поля спина s . В 4.2 приводятся основные формулы для реперной формулировки и затем в 4.3 строится собственно действие для безмассового поля произвольного спина в d -мерном пространстве Минковского. Выводы приведены в 4.4.

4.1 Пример поля спина s

Лагранжиан для симметричного безмассового поля спина s в терминах обобщённых тетрады $e_1^{a(s-1)}$ и связности $\omega_1^{a(s-1),b}$, что является обобщением действия Вейля-Гильберта для поля спина 2, был построен ещё в [40], и имеет вид

$$S = \int_{M^d} \left(De_1^{ua(s-2)} + \frac{1}{2} h_m \omega_1^{ua(s-2),m} \right) \omega_1^u{}_{a(s-2)}{}^{,u} \epsilon_{uuuv_4 \dots v_d} h^{v_4} \dots h^{v_d}, \quad (4.1)$$

где D есть Лоренц-ковариантная производная, определённая в (2.19), а $\epsilon_{v_1 v_2 \dots v_d}$ - полнотью антисимметричный тензор Леви-Чивиты инвариантный относительно действия алгебры Лоренца на касательные индексы. По построению, действие явно Лоренц инвариантно. Подынтегральное выражение является дифференциальной формой степени d и поэтому может быть проинтегрирована по d -мерному пространству Минковского. Так как действие неявно содержит ещё один символ Леви-Чивиты, свёрнутый с индексами дифференциальной формы, оно инвариантно относительно обращения пространственно-временных координат.

Форма действия (4.1) однозначно фиксируется с точностью до общего фактора требованием калибровочной инвариантности относительно преобразований (2.51) и (2.53). Для сравнения, действие в метрическом формализме с полем Фронсдала $\phi^{a(s)}$, см. (1.35), имеет значительно более сложный вид

$$S = \frac{(-)^s}{2} \int_{M^d} \left(\partial_m \phi^{a(s)} \partial^m \phi_{a(s)} - \frac{s(s-1)}{2} \partial_m \phi_n^{a(s-2)} \partial^m \phi_k^k{}_{a(s-2)} + \right. \\ \left. + s(s-1) \partial^m \phi_n^{a(s-2)} \partial^k \phi_{kma(s-2)} - s \partial_m \phi^{ma(s-1)} \partial^n \phi_{na(s-1)} + \right. \\ \left. - \frac{s(s-1)(s-2)}{4} \partial_m \phi_n^{ma(s-3)} \partial^r \phi_r^k{}_{ka(s-3)} \right) \quad (4.2)$$

и содержит больше свободных коэффициентов, которые должны быть зафиксированы из требования калибровочной инвариантности. При этом количество слагаемых в действии для метрических полей комбинаторно возрастает при увеличении числа строк в диаграмме Юнга, определяющей спин, чего, как мы увидим, не происходит в реперном формализме.

Докажем, что действие (4.1) — калибровочно инвариантно. Удобно определить вспомогательный объект: дифференциальную форму $E_{u[k]}$ степени $(d-k)$ с k антисимметричными касательными индексами

$$E_{u[k]} \equiv \epsilon_{u[k]b_1 \dots b_{d-k}} h^{b_1} \dots h^{b_{d-k}}, \quad (4.3)$$

которая построена из фоновой тетрады. Как следствие тождества

$$\epsilon_{[u_1 \dots u_k b_2 \dots b_{d-k+1}] \delta_{b_1}^c} h^{b_1} h^{b_2} \dots h^{b_{d-k}} \equiv 0 \quad (4.4)$$

$E_{u[k]}$ удовлетворяет соотношению

$$h^c E_{u_1 \dots u_k} = \frac{1}{d-k+1} \sum_{i=1}^{i=k} (-)^{i+k} \delta_{u_i}^c E_{u_1 \dots \hat{u}_i \dots u_k}. \quad (4.5)$$

Действие (4.1) инвариантно относительно $\xi_0^{a(s-1)}$ -преобразований (2.51) поскольку $D^2 = 0$. Для проверки $\xi_0^{a(s-1),b}$ -инвариантности следует заметить что несмотря на то, что второе слагаемое в действии, квадратичное по полю $\omega_1^{a(s-1),b}$, кажется несимметричным, на самом деле оно симметрично. В самом деле, применение (4.5) даёт

$$h_m \delta \omega_1^{ua(s-2),m} \omega_1^v{}_{a(s-2)}{}^w E_{uvw} \sim \delta \omega_1^{ua(s-2),m} \omega_1^v{}_{a(s-2)}{}^w (\eta_{um} E_{vw} + \eta_{vm} E_{wu} + \eta_{wm} E_{uv}).$$

Первое слагаемое равно тождественно нулю поскольку касательные тензоры неприводимы, в частности бесследовы. Третье слагаемое имеет явно симметричный вид по отношению к $\delta\omega$ и ω

$$\delta\omega_1^{ua(s-2),m}\omega_1^v{}_{a(s-2)},{}^m E_{uv}. \quad (4.6)$$

Второе слагаемое оказывается пропорционально третьему, если воспользоваться юнговскими условиями, что даёт

$$\delta\omega_1^{ua(s-2),m}\omega_1^m{}_{a(s-2)},{}^w = \frac{1}{s-1}\delta\omega_1^{ua(s-2),a}\omega_1^m{}_{a(s-1)},{}^w = -\frac{1}{s-1}\delta\omega_1^{a(s-1),u}\omega_1^m{}_{a(s-1)},{}^w \quad (4.7)$$

Таким образом, $\xi_0^{a(s-1),b}$ -вариация действия (4.1) имеет вид

$$\int \left\{ D \left(h_m \xi_0^{ua(s-1),m} \right) \omega_1^u{}_{a(s-2)},{}^u E_{uuu} + \frac{1}{2} h_m D \xi_0^{ua(s-2),m} \omega_1^u{}_{a(s-2)},{}^u E_{uuu} + \right. \\ \left. + D e_1^{ua(s-2)} D \xi_0^u{}_{a(s-2)},{}^u E_{uuu} + \frac{1}{2} h_m \omega_1^{ua(s-2),m} D \xi_0^u{}_{a(s-2)},{}^u E_{uuu} \right\}. \quad (4.8)$$

Третье слагаемое есть полная производная и может быть отброшено. Второе и четвёртое слагаемые равны друг другу по свойству симметрии и сокращаются с первым. Следовательно, действие (4.1) - калибровочно инвариантно.

Более того, действие (4.1) оказывается инвариантным относительно дополнительной алгебраической симметрии вида

$$\delta\omega_1^{a(s-1),b} = h_m \xi_0^{a(s-1),bm}, \quad (4.9)$$

где касательные индексы ноль-формы $\xi_0^{a(s-1),bb}$ имеют симметрию $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ и полностью бесследовы. Доказательство аналогично случаю $\xi_0^{a(s-1),b}$ -преобразований и использует свойства юнговости, бесследовости и (4.5). Обнаружение факта инвариантности относительно дополнительной симметрии в [40] имело очень важные последствия, поскольку именно это послужило отправной точкой для введения 'экстра' калибровочного поля ассоциированного с этой симметрией и, затем, всей башни экстра-полей, 'оживающих' в нелинейной теории.

4.2 Реперная формулировка

Для построения и анализа лагранжиана нам будет достаточно первых трёх полей развёрнутой формулировки безмассового поля спина \mathbf{S} , т.е. обобщённой тетрады $e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0}$, её вспомогательного поля $\omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1}$ и первого экстра-поля $\omega_{\mathbf{r}}^{\mathbf{F}_2}$, которое выражается через вторые производные тетрады и в само действие входить не будет. Однако, ассоциированный с ним калибровочный параметр $\xi_{\mathbf{r}-1}^{\mathbf{F}_2}$ входит в закон преобразования $\omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1}$.

Диаграммы Юнга \mathbf{S} , \mathbf{F}_0 , \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 удобнее изобразить, выделив первые три колонки

у диаграммы \mathbf{S} , характеризующей спин

\mathbf{S}

\mathbf{F}_0

\mathbf{F}_1

\mathbf{F}_2

(4.10)

$$\mathbb{Y}[p, q, r, h_4, \dots, h_{s_1}] \quad \mathbb{Y}[q, r, h_4, \dots, h_{s_1}] \quad \mathbb{Y}[p+1, r, h_4, \dots, h_{s_1}] \quad \mathbb{Y}[p+1, q+1, h_4, \dots, h_{s_1}]$$

Напряжённости для $e_p^{\mathbf{F}_0}$, $\omega_q^{\mathbf{F}_1}$ и $\omega_r^{\mathbf{F}_2}$ имеют вид

$$R_{p+1}^{\mathbf{F}_0} = D e_p^{\mathbf{F}_0} + \sigma_-(\omega_q^{\mathbf{F}_1}), \quad (4.11)$$

$$R_{q+1}^{\mathbf{F}_1} = D \omega_q^{\mathbf{F}_1} + \sigma_-(\omega_r^{\mathbf{F}_2}), \quad (4.12)$$

$$R_{r+1}^{\mathbf{F}_2} = D \omega_r^{\mathbf{F}_2} + \sigma_-(\dots), \quad (4.13)$$

где σ_- обозначает свёртку некоторого количества фоновых тетрад с касательными индексами поля плюс быть может юнговский симметризатор, т.е. знаковый фактор не включён в определение и будет контролироваться непосредственно. $\sigma_-(\dots)$ обозначает вклад следующего экстра-поля, которое не войдёт в лагранжиан. Напряжённости $R_{p+1}^{\mathbf{F}_0}$ и $R_{q+1}^{\mathbf{F}_1}$ инвариантны относительно калибровочных преобразований вида

$$\delta e_p^{\mathbf{F}_0} = D \xi_{p-1}^{\mathbf{F}_0} + o_1 \sigma_-(\xi_{q-1}^{\mathbf{F}_1}), \quad (4.14)$$

$$\delta \omega_q^{\mathbf{F}_1} = D \xi_{q-1}^{\mathbf{F}_1} + o_2 \sigma_-(\xi_{r-1}^{\mathbf{F}_2}), \quad (4.15)$$

$$\delta \omega_r^{\mathbf{F}_2} = D \xi_{r-1}^{\mathbf{F}_2} + o_3 \sigma_-(\dots), \quad (4.16)$$

где знаковые факторы $o_1 = (-)^{p-q}$, $o_2 = (-)^{q-r}$ и o_3 возникают из-за суперкоммутативности дифференциальных форм. Также напряжённости удовлетворяют тождествам Бьянки

$$D R_{p+1}^{\mathbf{F}_0} + o_1 \sigma_-(R_{q+1}^{\mathbf{F}_1}) \equiv 0, \quad (4.17)$$

$$D R_{q+1}^{\mathbf{F}_1} + o_2 \sigma_-(R_{r+1}^{\mathbf{F}_2}) \equiv 0. \quad (4.18)$$

Для того, чтобы убедиться в калибровочной инвариантности напряжённостей и выполнении тождеств Бьянки, необходимо воспользоваться нильпотентностью σ_- и $D h^a = 0$ (2.17), $(D)^2 = 0$ (2.18).

4.3 Лагранжиан

Для построения действия нам необходимо определить некоторое скалярное произведение для реперных полей, что делается в 4.3.1. Введённое скалярное произведение

доказательства (4.21) выпишем явно $\langle \sigma_-(\Theta_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{F}_1}) | \Psi_{\mathbf{q}_2}^{\mathbf{F}_1} \rangle$

$$h_m \Theta_{\mathbf{q}_1}^{ua(s_1-2), \dots, uc(s_r-2), \overbrace{u, \dots, u}^{q-r}, m} \Psi_{\mathbf{q}_2}^u{}_{a(s_1-2)} \dots, u{}_{c(s_r-2)} \overbrace{u, \dots, u}^{p+1-r} E_{u[p+1+q]},$$

применение тождества (4.5) приводит к

$$\langle \sigma_-(\Theta_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{F}_1}) | \Psi_{\mathbf{q}_2}^{\mathbf{F}_1} \rangle \sim \int \left(A_{\mathbf{2q}}^{u[2q]} + (-)^{p+1} B_{\mathbf{2q}}^{u[2q]} + (-)^{p+1} C_{\mathbf{2q}}^{u[2q]} \right) E_{u[2q]}, \quad (4.23)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{2q}}^{u[2q]} &= \sum_{i=1}^{i=p+1} (-)^i \Theta_{\mathbf{q}_1}^{ua(s_1-2), \dots, \overbrace{b(s_i-2), \dots, uc(s_r-2)}^{p-r}, m} \Psi_{\mathbf{q}_2}^u{}_{a(s_1-2)} \dots, u{}_{b(s_i-2)} \dots, u{}_{c(s_r-2)} \overbrace{u, \dots, u}^{p+1-r}, \\ B_{\mathbf{2q}}^{u[2q]} &= \sum_{i=1}^{i=r} (-)^i \Theta_{\mathbf{q}_1}^{ua(s_1-2), \dots, ub(s_i-2), \dots, uc(s_r-2), \overbrace{u, \dots, u}^{p-r}, m} \Psi_{\mathbf{q}_2}^u{}_{a(s_1-2)} \dots, mb(s_i-2) \dots, u{}_{c(s_r-2)} \overbrace{u, \dots, u}^{p+1-r}, \\ C_{\mathbf{2q}}^{u[2q]} &= \sum_{i=r+1}^{p+1} (-)^i \Theta_{\mathbf{q}_1}^{ua(s_1-2), \dots, uc(s_r-2), \overbrace{u, \dots, u}^{p-r}, m} \Psi_{\mathbf{q}_2}^u{}_{a(s_1-2)} \dots, u{}_{c(s_r-2)} \overbrace{u, \dots, u}^{i-r-1}, \overbrace{u, \dots, u}^{p+1-i}, m. \end{aligned}$$

Выражение $A_{\mathbf{2q}}^{u[2q]}$ обращается тождественно в ноль, поскольку касательные тензоры неприводимы и следовательно бесследовы. $B_{\mathbf{2q}}^{u[2q]}$ и $C_{\mathbf{2q}}^{u[2q]}$, могут быть преобразованы в выражения явно симметричные относительно Θ и Ψ . Знаковый фактор $(-)^{q_1 q_2 - q^2}$ возникает при перестановке Θ и Ψ как форм степени q_1 и q_2 имеющих q антисимметричных касательных индексов. В самом деле, Ψ явно антисимметрично по индексам из групп $r+1, \dots, p+1$, так как каждая группа состоит только из одного индекса. Поэтому, индекс m у формы Ψ может быть переставлен с индексом u из $p+1$ -ой группы в каждом слагаемом суммы в $C_{\mathbf{2q}}^{u[2q]}$, что даёт

$$C_{\mathbf{2q}}^{u[2q]} = (p-r+1)(-)^{p+1} \Theta_{\mathbf{q}_1}^{ua(s_1-2), \dots, uc(s_r-2), \overbrace{u, \dots, u}^{p-r}, m} \Psi_{\mathbf{q}_2}^u{}_{a(s_1-2)} \dots, u{}_{c(s_r-2)} \overbrace{u, \dots, u}^{p-r}, m.$$

Рассмотрим $B_{\mathbf{2q}}^{u[2q]}$. Несмотря на то, что индексы $b(s_i-2)$ и m у Θ принадлежат разным группам, по ним производится неявная симметризация поскольку они принадлежат одной и той же группе симметричных индексов у Ψ . Используя простое следствие юнговских свойств

$$C^{a(k_1), \dots, b(k_i-1)u, \dots, bc(k_j-1), \dots} = -C^{a(k_1), \dots, b(k_i), \dots, uc(k_j-1), \dots} \quad (4.24)$$

индекс m в Θ может быть переставлен с соответствующим u , что даёт

$$B_{\mathbf{2q}}^{u[2q]} = \sum_{i=1}^{i=p+1} \frac{(-)^{p+1}}{s_i-1} \Theta_{\mathbf{q}_1}^{ua(s_1-2), \dots, b(s_i-1), \dots, uc(s_r-2), \overbrace{u, \dots, u}^{p+1-r}} \Psi_{\mathbf{q}_2}^u{}_{a(s_1-2)} \dots, b(s_i-1) \dots, u{}_{c(s_r-2)} \overbrace{u, \dots, u}^{p+1-r}.$$

Таким образом, $A_{\mathbf{2q}}^{u[2q]}$ - тождественный ноль, а $C_{\mathbf{2q}}^{u[2q]}$ и $B_{\mathbf{2q}}^{u[2q]}$ явно симметричны по модулю знакового фактора $(-)^{q_1 q_2 - q^2}$ по отношению к перестановке $\Theta_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{F}_1}$ и $\Psi_{\mathbf{q}_2}^{\mathbf{F}_1}$.

Рассмотрим теперь случай $p > q$, когда $\sigma_-(\Theta_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{F}_1})$ содержит $(p + 1 - q)$ фоновых тетрад

$$h_{m_1} \dots h_{m_{p+1-q}} \Theta_{\mathbf{q}_1}^{ua(s_1-2), \dots, uc(s_r-2), \overbrace{u, \dots, u}^{q-r}, m_1, \dots, m_{p+1-q}}. \quad (4.25)$$

Последовательным применением (4.5), индексы m_1, \dots, m_{p+1-q} оказываются свёрнутыми с некоторыми индексами u, \dots, u из групп i_1, \dots, i_{p+1-q} касательных индексов $\Psi_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_1}$ (подразумевается сумма по всем перестановкам i_1, \dots, i_{p+1-q}). Только те свёртки могут быть нетривиальными для которых все m_1, \dots, m_{p+1-q} сворачиваются с некоторыми индексами $\Psi_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_1}$, поскольку любая свёртка с самим $\Theta_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{F}_1}$ обращается тождественно в ноль из-за бесследовости. Если некоторый i_k находится в промежутке $1, \dots, r$, то m_{i_k} оказывается симметризованным с $s_{i_k} - 2$ из i_k -ой группы и следовательно, в силу (4.24), m_{i_k} может быть переставлен с u_{i_k} так, что конечное выражение явно симметрично по Θ и Ψ . Если некоторый i_k принадлежит отрезку $r + 1, \dots, p + 1$, то он может быть переставлен с u_{i_k} поскольку Θ явно антисимметрично по индексам из групп $r + 1, \dots, p + 1$, и следовательно эти слагаемые также могут быть приведены к форме явно симметричной по Θ и Ψ . ■

Отщепление экстра-полей (4.22). Пусть $\Phi_{\mathbf{p}'}^{\mathbf{F}_0}$ и $\Upsilon_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{F}_2}$ две формы степени p' и r' со значениями в неприводимых представлениях \mathbf{F}_0 и \mathbf{F}_2 , соответственно, и такие что $p + r = p' + r'$. Предположим сначала $q = r$. Выпишем явно $\langle \Phi_{\mathbf{p}'}^{\mathbf{F}_0} | \sigma_-(\Upsilon_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{F}_2}) \rangle$

$$\Phi_{\mathbf{p}'}^{ua(s_1-2), \dots, uc(s_r-2)} h_m \Upsilon_{\mathbf{r}'}^{u_{a(s_1-2)}, \dots, u_{c(s_r-2)}, \overbrace{um, u, \dots, u}^{p-q}} E_{u[p+q+1]}.$$

Если $p > q$, то $\sigma_-(\Upsilon_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{F}_2})$ может содержать дополнительные слагаемые, отвечающие юнговскому симметризатору, так как $h_m \Upsilon_{\dots, um, v, \dots, w}$ не обладает определёнными свойствами симметрии по индексам u, v, \dots, w . Дополнительные слагаемые имеют вид $h_m \Upsilon_{\dots, uv, m, \dots, w} + \dots$. Если индексы u, v, \dots, w сворачиваются с антисимметричным тензором, то эти дополнительные слагаемые равны нулю, поскольку два индекса сворачиваемые с антисимметричным тензором попадают в одну группу симметричных индексов. Следовательно, только первое слагаемое в $\sigma_-(\Upsilon_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{F}_2})$ может давать нетривиальный вклад в скалярное произведение.

Применение тождества (4.5) приводит к

$$\langle \Phi_{\mathbf{p}'}^{\mathbf{F}_0} | \sigma_-(\Upsilon_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{F}_2}) \rangle = \left(D_{\mathbf{p}+q}^{u[p+q]} + F_{\mathbf{p}+q}^{u[p+q]} \right) E_{u[p+q]}, \quad (4.26)$$

где

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{p}+q}^{u[p+q]} &= \sum_{i=1}^{i=r} (-)^i \Phi_{\mathbf{p}'}^{ua(s_1-2), \dots, mb(s_i-2), \dots, uc(s_r-2)} \Upsilon_{\mathbf{r}'}^{u_{a(s_1-2)}, \dots, m_{b(s_i-2)}, \dots, u_{c(s_r-2)}, m, \overbrace{u, \dots, u}^{p-q}} + \\ &+ \Phi_{\mathbf{p}'}^{ua(s_1-2), \dots, uc(s_r-2)} \Upsilon_{\mathbf{r}'}^{u_{a(s_1-2)}, \dots, u_{c(s_r-2)}, m, \overbrace{u, \dots, u}^{p-q}}, \\ F_{\mathbf{p}+q}^{u[p+q]} &= \sum_{i=1}^{i=r} (-)^i \Phi_{\mathbf{p}'}^{ua(s_1-2), \dots, mb(s_i-2), \dots, uc(s_r-2)} \Upsilon_{\mathbf{r}'}^{u_{a(s_1-2)}, \dots, u_{b(s_i-2)}, \dots, u_{c(s_r-2)}, m, \overbrace{u, \dots, u}^{p-q}}. \end{aligned}$$

$D_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{u[p+q]}$ обращается в тождественный ноль из-за условия бесследовости. Индексы $b(s_i-2)$ и m в Υ оказываются неявно симметризованы, поскольку в Φ индексы $b(s_i-2)$ и m принадлежат к одной группе симметричных индексов. Используя (4.24), для того чтобы переставить m и u , получаем

$$F_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{u[p+q]} = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{(-)^i}{s_i - 1} \Phi_{\mathbf{p}'}^{ua(s_1-2), \dots, b(s_i-1), \dots, uc(s_r-2)} \Upsilon_{\mathbf{r}'}^{u_{a(s_1-2)}, \dots, u_{b(s_i-1)}, \dots, u_{c(s_r-2)}, \overbrace{uu, u, \dots, u}^{p-q}} = 0,$$

поскольку два антисимметризуемых индекса u оказываются в одной группе.

Распространение утверждения на случай $q > r$ производится аналогично доказательству (4.21): среди фоновых тетрад $h_{m_1} \dots h_{m_{q-r+1}}$ входящих в

$$\sigma_-(\Upsilon_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{F}_2}) \longleftrightarrow h_{m_1} \dots h_{m_{q-r+1}} \Upsilon_{\mathbf{r}'}^{ua(s_1-2), \dots, uc(s_r-2), \overbrace{um, \dots, um}^{q+1-r}, \overbrace{u, \dots, u}^{p-q}}, \quad (4.27)$$

по крайней мере один из m_i оказывается свёрнутым с одним из индексов Φ из групп 1, ..., r , и следовательно, в силу (4.24), может быть переставлен с u , что даёт ноль. ■

4.3.3 Действие и калибровочная инвариантность

Из общих соображений относительно вида действия первого порядка, а также основываясь на случае полей спина s , см. (4.1), действие должно иметь следующий вид

$$S = \frac{1}{2} \int \langle R_{\mathbf{p}+1}^{\mathbf{F}_0} | \omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1} \rangle + \beta \langle e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0} | R_{\mathbf{q}+1}^{\mathbf{F}_1} \rangle, \quad (4.28)$$

где для дальнейшего удобства введён коэффициент $\frac{1}{2}$. Параметр β должен быть зафиксирован требованием калибровочной инвариантности. На самом деле анзац (4.28) представляет наиболее общее выражение, которое может быть написано в терминах обобщённой тетрады и её вспомогательного поля в терминах дифференциальных форм.

Рассмотрим часть вариации действия

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \langle R_{\mathbf{p}+1}^{\mathbf{F}_0} | \delta \omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1} \rangle + \beta \langle \delta e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0} | R_{\mathbf{q}+1}^{\mathbf{F}_1} \rangle + \langle \delta R_{\mathbf{p}+1}^{\mathbf{F}_0} | \omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1} \rangle + \beta \langle e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0} | \delta R_{\mathbf{q}+1}^{\mathbf{F}_1} \rangle,$$

ассоциированную с вариацией напряжённостей полей, т.е.

$$\frac{1}{2} \int \langle D \delta e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0} + \sigma_-(\delta \omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1}) | \omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1} \rangle + \beta \langle e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0} | D \delta \omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1} + \sigma_-(\delta \omega_{\mathbf{r}}^{\mathbf{F}_2}) \rangle. \quad (4.29)$$

Принимая во внимание (I) $\langle e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0} | \sigma_-(\delta \omega_{\mathbf{r}}^{\mathbf{F}_2}) \rangle = 0$ по (4.22); (II) $\langle \sigma_-(\delta \omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1}) | \omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1} \rangle = \langle \sigma_-(\omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1}) | \delta \omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1} \rangle$, где было использовано (4.21); и интегрируя по частям с помощью теоремы Стокса первое и третье слагаемые в (4.29), вариация принимает вид

$$\delta S = \frac{1}{2} \int (-)^{p+1} \langle \delta e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0} | D \omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1} + \sigma_-(\omega_{\mathbf{r}}^{\mathbf{F}_2}) \rangle + \langle \beta (-)^{p+1} D e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}_0} + \sigma_-(\omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1}) | \delta \omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}_1} \rangle,$$

где было добавлено слагаемое $\sigma_-(\omega_r^{\mathbf{F}^2})$ в силу (4.22). Выбирая $\beta = (-)^{p+1}$, имеем

$$\int \langle R_{p+1}^{\mathbf{F}^0} | \delta \omega_q^{\mathbf{F}^1} \rangle + \beta \langle \delta e_p^{\mathbf{F}^0} | R_{q+1}^{\mathbf{F}^1} \rangle = \int \langle \delta R_{p+1}^{\mathbf{F}^0} | \omega_q^{\mathbf{F}^1} \rangle + \beta \langle e_p^{\mathbf{F}^0} | \delta R_{q+1}^{\mathbf{F}^1} \rangle$$

Таким образом, вариация напряжённостей даёт вклад равный вариации по явным полям $e_p^{\mathbf{F}^0}$, $\omega_q^{\mathbf{F}^1}$. Поэтому для $\beta = (-)^{p+1}$ действие калибровочно-инвариантно, поскольку калибровочная вариация напряжённостей обращается тождественно в ноль. Таким образом, калибровочно-инвариантное действие имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \langle R_{p+1}^{\mathbf{F}^0} | \omega_q^{\mathbf{F}^1} \rangle + \frac{1}{2} (-)^{p+1} \langle e_p^{\mathbf{F}^0} | R_{q+1}^{\mathbf{F}^1} \rangle \quad (4.30)$$

что эквивалентно

$$S = \left\langle D e_p^{\mathbf{F}^0} + \frac{1}{2} \sigma_-(\omega_q^{\mathbf{F}^1}) | \omega_q^{\mathbf{F}^1} \right\rangle, \quad (4.31)$$

где вместо $R_{p+1}^{\mathbf{F}^0}$ и $R_{q+1}^{\mathbf{F}^1}$ были подставлены их явные выражения (4.11) и (4.12) через реперные поля. Слагаемое $\omega_r^{\mathbf{F}^2}$ обращается в ноль в силу (4.22). $\langle e_p^{\mathbf{F}^0} | D \omega_q^{\mathbf{F}^1} \rangle$ было проинтегрировано по частям.

Форма (4.31) более компактна и демонстрирует, что экстра-поля не входят в действие, а форма (4.30) более симметрична и удобна для вывода полевых уравнений.

4.3.4 Уравнения движения

Тот факт, что действие калибровочно-инвариантно гарантирует, что лагранжевы уравнения могут быть записаны в терминах напряжённостей $R_{p+1}^{\mathbf{F}^0}$ и $R_{q+1}^{\mathbf{F}^1}$. Однако, это ещё не гарантирует правильности полученных уравнений.

Полная вариация действия по отношению к полям $e_p^{\mathbf{F}^0}$ и $\omega_q^{\mathbf{F}^1}$ отличается от вариации по явно входящим полям $e_p^{\mathbf{F}^0}$ и $\omega_q^{\mathbf{F}^1}$ фактором 2

$$\delta S = \langle R_{p+1}^{\mathbf{F}^0} | \delta \omega_q^{\mathbf{F}^1} \rangle + (-)^{p+1} \langle \delta e_p^{\mathbf{F}^0} | R_{q+1}^{\mathbf{F}^1} \rangle. \quad (4.32)$$

В декартовых координатах лагранжевы уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \omega} \delta \omega &= R_{\mu[p+1]}^{ua(s_1-2), \dots, uc(s_r-2), \overbrace{u, \dots, u}^{q-r}} \delta \omega_{\mu[q]}^{u \quad a(s_1-2) \quad \dots, u \quad c(s_r-2) \quad \overbrace{u, \dots, u}^{p+1-r}} \delta \mu_{u[p+q+1]}^{\mu[p+q+1]} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow R^{ua(s_1-2), \dots, uc(s_r-2), \overbrace{u, \dots, u}^{q-r} | v[p+1]} \delta \omega_{va(s_1-2), \dots, vc(s_r-2), \underbrace{v, \dots, v}_{p+1-r} | u[q]} = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta e} \delta e &= R_{\mu[q+1]}^{ua(s_1-2), \dots, uc(s_r-2), \overbrace{u, \dots, u}^{p+1-r}} \delta e_{\mu[p]}^{u \quad a(s_1-2) \quad \dots, u \quad c(s_r-2) \quad \overbrace{u, \dots, u}^{q-r}} \delta \mu_{u[p+q+1]}^{\mu[p+q+1]} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow R^{ua(s_1-2), \dots, uc(s_r-2), \overbrace{u, \dots, u, m}^{p-r} | v[q]} \delta e_{va(s_1-2), \dots, vc(s_r-2), \underbrace{v, \dots, v}_{q-r} | u[p]} = 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Специальная вариация по отношению к симметричной части $\delta\omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}^1}$ и $e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}^0}$ вида

$$\delta\omega^{a_1(s_1-1), \dots, a_r(s_r-1), a_{r+1}, \dots, a_{p+1} | a_1 \dots a_q} \quad \text{и} \quad \delta e^{a_1(s_1-1), \dots, a_r(s_r-1), a_{r+1}, \dots, a_q | a_1 \dots a_r \dots a_q \dots a_{p+1}}$$

приводит к уравнениям

$$R^{a_1(s_1-1), \dots, a_r(s_r-1), a_{r+1}, \dots, a_q | a_1 \dots a_r \dots a_q \dots a_{p+1}} = 0, \quad (4.34)$$

$$R^{a_1(s_1-1), \dots, a_r(s_r-1), a_{r+1}, \dots, a_q, \dots, a_p, m | a_1 \dots a_q} = 0, \quad (4.35)$$

из которых в разделе 3.2.8 были выведены уравнения Лабастиды. Следовательно, лагранжевы уравнения являются правильными.

4.4 Выводы

В данной главе было построено действие для калибровочных полей произвольного типа симметрии в пространстве Минковского. Действие имеет простой вид (4.31) или более симметричный (4.30). Форма (4.31) содержит всего два слагаемых, получаемых свёрткой всех индексов у соответствующих полей. Действие полностью фиксируется требованием калибровочной инвариантности и порядком производных.

Действие (4.31) охватывает хорошо известные случаи скалярного поля, полей спина 0, 1, 2, полей спина s [40] и антисимметричные поля.

Полученное действие в частных случаях $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s)$ [40] и $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(2, 1)$, $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(2, 2)$, $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(2, 1, 1)$ [91, 93] совпадает с известными в литературе (если переписать результаты [91, 93] на языке дифференциальных форм).

Следует отметить, что переход к действию первого порядка в терминах реперных полей значительно упрощает рассмотрение. На этом языке, громоздкость действия, предложенного Лабастидой в [90], есть результат наложения алгебраических калибровок и явного разрешения вспомогательного поля $\omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{F}^1}$ через производные обобщённого репера $e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}^0}$ и последующего выделения метрических компонент в $e_{\mathbf{p}}^{\mathbf{F}^0}$, входящих в поле Лабастиды.

Глава 5

Геометрическое описание частично-безмассовых полей

5.1 Введение

В данной главе, следуя работе автора [1], рассматривается один из наиболее простых случаев калибровочной теории в пространстве (анти)-де Ситтера — частично-безмассовое поле спина s , т.е. поле, определяемое $(\mathbb{Y}(s), 1, t)$. На данном примере будут продемонстрированы преимущества описания калибровочных полей в терминах естественного обобщения полей Янга-Миллса алгебры (анти)-де Ситтера, тогда как общий случай произвольного калибровочного поля (\mathbf{S}, q, t) рассматривается в главе 6. Также в случае симметричного частично-безмассового поля удаётся продвинуться дальше и построить явно калибровочно-инвариантное действие в геометрических терминах; разобрать вопрос о Лоренц-ковариантном описании, в котором пояснить преимущество техники σ_- -когомологий, так как в случае симметричных полей основные σ_- -когомологии могут быть легко найдены из полевого анализа.

Отметим, что в литературе уже существовало некоторое количество результатов относительно $(\mathbb{Y}(s), 1, t)$ -полей, [75–77, 80–84, 198], из которых нам наиболее важен лагранжиан в терминах метрических полей, полученный в [84].

5.1.1 Спин-два, гравитация

Как уже упоминалось, фундаментальными переменными в теории гравитации являются тетрада (репер) e_μ^a и Лоренцева спин-связность $\omega_\mu^{a,b} = -\omega_\mu^{b,a}$. Важным шагом, сделанным в [20], было отождествление тетрады и спин-связности с полями Янга-Миллса, соответствующими генераторам трансляции и Лоренцевых вращений алгебры (анти)-де Ситтера, $A_\mu dx^\mu = (P_a h_\mu^a + L_{a,b} \varpi_\mu^{a,b}) dx^\mu$, где P_a и $L_{a,b}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям вида (1.5)-(1.7). Напряжённость

$$R = dA + [A, \wedge A] = P_a R^a + L_{a,b} R^{a,b} \quad (5.1)$$

поля $A_\mu dx^\mu$ имеет компоненты R^a и $R^{a,b}$, представляющие собой кручение и тензор Римана, поправленный на космологический член, явный вид которых дан в (2.17) и (2.18).

Также можно построить действие [20], которое аналогично действию Янга-Миллса квадратично по напряжённости поля,

$$S = \frac{1}{4\kappa^2\lambda^2} \int_{M_d} R^{a_1, a_2} R^{a_3, a_4} e^{a_5} \dots e^{a_d} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_d} \quad (5.2)$$

и в $d = 4$ эквивалентно действию Эйнштейна с космологической постоянной плюс топологический инвариант Гаусса-Боне. Для $d > 4$ действие было рассмотрено в [146, 182], где было показано, что на линейном уровне оно описывает поле спина 2, хотя и отличается от действия Эйнштейна на нелинейном уровне.

Рассматривая теории в пространстве (анти)-де Ситтера, естественно реализовать симметрию пространства-времени явным образом, как описано в 2.3. Основными объектами являются поле Янга-Миллса $\Omega_\mu^{A,B} dx^\mu$ алгебры (анти)-де Ситтера, нединамическое векторное поле V^A (компенсатор) и построенная по ним обобщённая тетрада $E_\mu^A dx^\mu$.

Действие (5.2) также может быть переписано [21, 146] в явно ковариантном виде относительно симметрий пространства (анти)-де Ситтера

$$S = \frac{1}{4\kappa^2\lambda^2} \int_{M^d} R_2^{A_1, A_2} R_2^{A_3, A_4} E^{A_5} \dots E^{A_d} V^B \epsilon_{A_1 A_2 \dots A_d B}, \quad (5.3)$$

где введена два-форма напряжённости $R_2^{A,B} = d\Omega^{A,B} + \Omega^A{}_C \wedge \Omega^{C,B}$.

5.1.2 Спин- s

Принимая во внимание тот факт, что, как было описано в 2.2, линейаризованные развёрнутые уравнения имеют тесную связь с алгебрами Ли, можно заключить, что набор полей (см. раздел 2.6)

$$e_\mu^{a(s-1)} \quad \omega_\mu^{a(s-1), b} \quad \omega_\mu^{a(s-1), bb} \quad \dots \quad \omega_\mu^{a(s-1), b(s-2)} \quad \omega_\mu^{a(s-1), b(s-1)}, \quad (5.4)$$

необходимый для реперного описания безмассового поля спина s [147], образует некоторый конечномерный модуль алгебры симметрий пространства-времени. В отличие от алгебры Пуанкаре симметрий пространства Минковского, не обладающей тензорными представлениями, все конечномерные представления алгебры симметрий пространства (анти)-де Ситтера ($\mathfrak{so}(d-1, 2)$ или $\mathfrak{so}(d, 1)$) являются тензорами или спин-тензорами, что позволяет упростить работу с ними.

В работе [146] было замечено, что набор полей (5.4) алгебры Лоренца эквивалентен одному полю со значениями в неприводимом представлении алгебры (анти)-де Ситтера, определяемом двухстрочной прямоугольной диаграммой Юнга

$$\begin{array}{|c|} \hline s-1 \\ \hline s-1 \\ \hline \end{array}, \quad W_\mu^{A(s-1), B(s-1)} dx^\mu \quad \longrightarrow \quad (5.4) \quad \longrightarrow \quad \delta\phi_{\mu(s)} = D_\mu \xi_{\mu(s-1)}. \quad (5.5)$$

Из одного данного поля, посредством взятия всех возможных проекций по отношению к полю компенсатора V^A , получается набор полей (5.4), которые описывают на метрическом языке теорию безмассового поля $\phi_{\mu(s)}$. Например, выбрав стандартную

калибровку для компенсатора (2.25), репер и обобщённая спин-связность выражаются следующим образом¹

$$e_1^{a(s-1)} = W_1^{a(s-1), \bullet(s-1)} \equiv W_1^{a(s-1), B(s-1)} V_B \dots V_B, \quad (5.6)$$

$$\omega_1^{a(s-1), b} = W_1^{a(s-1), b \bullet(s-2)} \equiv W_1^{a(s-1), bB(s-2)} V_B \dots V_B, \quad (5.7)$$

что обобщает (2.21) на случай произвольного спина.

По аналогии с обычным полем Янга-Миллса $\Omega_\mu^{A,B} dx^\mu$, поля $W_\mu^{A(s-1), B(s-1)} dx^\mu$ и их дальнейшие обобщения будем называть обобщёнными полями Янга-Миллса алгебры (анти)-де Ситтера.

Сложные выражения для калибровочно-инвариантных напряжённостей и законов калибровочных преобразований Лоренцевых полей (5.4), которые будут выписаны в разделе 5.4 для общего случая частично-безмассовых полей, заметно упрощаются в терминах единственного поля алгебры (анти)-де Ситтера.

Согласно общему подходу теории полей высших спинов, существует некоторая бесконечномерная алгебра \mathfrak{g} , алгебра высших спинов [149, 176–178], которая является бесконечномерным расширением алгебры \mathfrak{h} пространственно временных симметрий $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(d-1, 2)$. В нелинейные уравнения входят поля со значениями в алгебре высших спинов.

Свободные поля высших спинов получаются путем следующей процедуры: рассмотрим вакуумное решение ω_0 , такое что ω_0 принимает значения в подалгебре \mathfrak{h} и, таким образом, описывает фоновое пространство анти-де Ситтера. Рассмотрим пертурбативное разложение над фоном ω_0 , т.е. полная связность $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots$ состоит из вакуумного решения ω_0 и поправок первого порядка малости ω_1 , так что ω_1 принимает значения во всей алгебре высших спинов \mathfrak{g} , которая в данном приближении рассматривается как совокупность \mathfrak{h} -модулей.

Полная напряжённость $R = d\omega + [\omega, \omega]$ в алгебре высших спинов принимает вид

$$R = R_0 + R_1 + o(\omega_1), \quad (5.8)$$

где

$$R_0 = d\omega_0 + [\omega_0, \omega_0], \quad (5.9)$$

$$R_1 = d\omega_1 + [\omega_0, \omega_1]. \quad (5.10)$$

а $[\cdot, \cdot]$ обозначает произведение Ли в \mathfrak{g} . Вакуумное решение ω_0 удовлетворяет $R_0 = 0$ и описывает (см. раздел 2.3), геометрию пространства анти-де Ситтера. Поправка первого порядка R_1 имеет вид ковариантной производной D_0 от ω_1 . В силу того, что $(D_0)^2 = 0$ эквивалентно $R_0 = 0$, R_1 инвариантно относительно калибровочных преобразований $\delta\omega_1 = D_0\xi$.

Пусть в компонентах ω_0 описывается плоской связностью $\Omega_\mu^{A,B} dx^\mu$. Тогда закон калибровочных преобразований и выражение для напряжённости принимают простой вид

$$\delta W_1^{A(s-1), B(s-1)} = D_\Omega \xi_0^{A(s-1), B(s-1)}, \quad (5.11)$$

¹Напомним, что \bullet обозначает лишнее значение индексов алгебры (анти)-де Ситтера A, B, \dots , пробегающих $d+1$ значение, по сравнению с индексами алгебры Лоренца a, b, \dots , пробегающими d значений.

$$R_2^{A(s-1),B(s-1)} = D_\Omega W_1^{A(s-1),B(s-1)}, \quad (5.12)$$

где $D_\Omega = d + \Omega$ есть ковариантная производная по отношению к $\Omega_\mu^{A,B} dx^\mu$.

Действие для безмассовых полей в пространстве (анти)-де Ситтера было построено в [146] и имеет вид

$$S^s = \frac{1}{2\lambda} \sum_{q=0}^{q=s-2} b_q^s \int_{M^d} \epsilon_{A_1 \dots A_{d+1}} V^{A_5} E^{A_6} \dots E^{A_{d+1}} \times \times R_2^{A_1 B(s-2), A_2 C(q) D(s-q-2)} R_2^{A_3 B(s-2), A_4 C(q) D(s-q-2)} V_{C(2q)}, \quad (5.13)$$

где $V_{C(p)} = \overbrace{V_C \dots V_C}^p$. Действие содержит $(s-1)$ слагаемых, входящих с некоторыми коэффициентами b_q^s перед членами с различным числом сверток компенсатора. При произвольных b_q^s действие калибровочно-инвариантно, так как построено из явно калибровочно-инвариантных напряжённостей. Как уже известно, поля $\omega^{a(s-1),b(k)}$ с k индексами во второй группе выражаются через производные тетрады $e^{a(s-1)}$ порядка k . Поэтому в свободное действие поля с $k > 1$ должны входить только в виде полных производных, что можно записать в следующем виде

$$\Pi_L \left[V^{C(k)} \frac{\delta S}{\delta W^{A(s-1),B(s-k-1)C(k)}} \right] \equiv 0, \quad k < s-2, \quad (5.14)$$

где Π_L — проектор на поперечную к V^A компоненту. Данное условие называется условием отщепления экстра-полей и фиксирует коэффициенты b_q^s с точностью до общего фактора

$$b_q^s = b^s \frac{(d-5+2q)!!(q+1)}{q!}. \quad (5.15)$$

Основное утверждение данной главы состоит в том, что обобщённые поля Янга-Миллса со значениями в неприводимых представлениях алгебры (анти)-де Ситтера, определяемыми произвольными двухрядными диаграммами Юнга, а не только прямоугольными, как в случае безмассовых полей, описывают частично-безмассовые поля, т.е.

$$\boxed{\begin{array}{c} s-1 \\ s-t \end{array}}, \quad W_\mu^{A(s-1),B(s-t)} dx^\mu \quad \longrightarrow \quad \delta\phi_{\mu(s)} = \overbrace{D_\mu \dots D_\mu}^t \xi_{\mu(s-t)} + \dots \quad (5.16)$$

5.2 Частично-безмассовые поля спина s

Хотя классификация полей произвольного спина была описана в Главе 1, мы остановимся подробнее на некоторых примерах, включающих в себя в том числе и офф-шелльные описания, чтобы пояснить особенности частично-безмассовых полей.

5.2.1 Массивное поле произвольного спина

Следуя Дираку [199], массивное поле спина s можно описать симметричным тензорным полем $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}(x)$ ранга s , на который наложены условия массовой оболочки,

поперечности и бесследовости, т.е.

$$(\square + m^2)\phi_{\mu_1\dots\mu_s} = 0, \quad (5.17)$$

$$\partial^\nu\phi_{\nu\mu_2\dots\mu_s} = 0, \quad (5.18)$$

$$\eta^{\nu\rho}\phi_{\nu\rho\mu_3\dots\mu_s} = 0. \quad (5.19)$$

Очевидно, что это все Лоренц-ковариантные локальные условия, которые могут быть наложены на $\phi_{\mu_1\dots\mu_s}(x)$. Третье уравнение представляет собой алгебраическую связь, которая может быть включена в определение поля $\phi_{\mu_1\dots\mu_s}(x)$. Однако, для $s > 1$ данная система уравнений нелагранжева. Как было замечено Фирцем и Паули в [14], её можно сделать лагранжевой, если ввести дополнительные поля, которые не несут физических степеней свободы и обращаются в ноль на массовой оболочке. Фирц и Паули рассмотрели пример массивного поля спина 2, $\phi_{\mu\nu}$, для которого необходимо ввести одно дополнительное поле, являющееся скаляром $\phi(x)$, который удобно объединить вместе с бесследовым полем $\phi_{\mu\nu}$ в одно поле $\phi_{\mu\nu} \rightarrow \phi_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\phi$.

Уравнения, полученные из лагранжиана Фирца-Паули, имеют вид

$$G_{\mu\nu} = (\square + m^2)(\phi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\phi^\sigma{}_\sigma) + \partial_\mu\partial_\nu\phi^\sigma{}_\sigma + \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma\phi_{\rho\sigma} - 2\partial_{(\mu}\partial^\sigma\phi_{\sigma\nu)} = 0. \quad (5.20)$$

Рассмотрим некоторые простые следствия этих уравнений, полученные сворачиванием их с производными и взятием следов,

$$\partial^\nu G_{\nu\mu} = m^2(\partial^\nu\phi_{\nu\mu} - \partial_\mu\phi^\sigma{}_\sigma), \quad (5.21)$$

$$\partial^\mu\partial^\nu G_{\mu\nu} - \frac{m^2}{d-2}G^\sigma{}_\sigma = m^4\frac{d-1}{d-2}\phi^\sigma{}_\sigma. \quad (5.22)$$

Таким образом, как следствие уравнений движения, дополнительное скалярное поле, отождествляемое со следом $\phi^\sigma{}_\sigma$, обращается в ноль в силу (5.22), затем из (5.21) следует, что дивергенция динамического поля $\partial^\nu\phi_{\nu\mu}$ также обращается в ноль. Подстановка условия бесследовости (5.19) и поперечности (5.18) обратно в уравнения Фирца-Паули, даёт волновое уравнение (5.17).

Отметим, что при $m^2 = 0$, соответствующем безмассовому полю спина 2 в пространстве Минковского, (5.21) становится тождеством, которое обычно называется тождеством Бьянки и свидетельствует о появлении калибровочной инвариантности (в данном случае линейризованных диффеоморфизмов).

Для массивных полей спина s набор дополнительных полей состоит из бесследовых тензорных полей рангов $s-2$, $s-3$, ..., 1, 0 и не допускает уже такой же простой интерпретации в терминах одного тензорного поля без следовых условий, как в случае спина 2. Соответствующий лагранжиан имеет достаточно сложный вид и был получен в работе [179].

5.2.2 Частично-безмассовое поле спина 2

Путем ковариантизации производных и добавления массовоподобных членов пропорциональных космологической постоянной λ^2 , уравнения Фирца-Паули могут быть распространены на случай (анти)-де Ситтера [80, 82]

$$G_{\mu\mu} = (\square - \lambda^2 d)(\phi_{\mu\mu} - g_{\mu\mu}\phi^\sigma{}_\sigma) + \frac{1}{2}D_\mu D_\mu\phi^\sigma{}_\sigma + g_{\mu\mu}D^\rho D^\sigma\phi_{\rho\sigma} - 2D_\mu D^\nu\phi_{\mu\nu} - (d-1)\lambda^2 g_{\mu\mu}\phi^\sigma{}_\sigma = 0,$$

где λ^2 имеет тот же смысл, что и в (2.18). Тот факт, что производные больше не коммутируют, приводит к поправкам пропорциональным λ^2 в следствиях уравнений движения (5.22), (5.21), которые модифицируются до

$$\partial^\nu G_{\nu\mu} = (m^2 + 2\lambda^2)(D^\nu \phi_{\nu\mu} - D_\mu \phi^\sigma{}_\sigma) \quad (5.23)$$

$$D^\mu D^\nu G_{\mu\nu} - \frac{m^2}{d-2} G^\sigma{}_\sigma = (m^2 + 2\lambda^2)(m^2 + d\lambda^2) \frac{d-1}{d-2} \phi^\sigma{}_\sigma. \quad (5.24)$$

Отсюда следует, что существуют три различных случая:

$m^2 \neq -2\lambda^2, -d\lambda^2$. Массивный случай, когда, аналогично массивному полю в пространстве Минковского, (5.23) и (5.24) позволяют исключить дополнительное поле и получить $(A)dS_d$ версию уравнений (5.17), (5.18), (5.19). Можно показать, что в $d = 4$ эти уравнения описывают поле с пятью степенями свободы, соответствующими поляризациям $\pm 2, \pm 1, 0$.

$m^2 = -2\lambda^2$. В данном случае уже первое следствие уравнений движения (5.23) превращается в тождество, что свидетельствует о появлении калибровочной инвариантности с векторным калибровочным параметром (так как тождество векторное)

$$\delta\phi_{\mu\nu} = D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu. \quad (5.25)$$

Как известно, это приводит к тому, что в $d = 4$ безмассовое поле спина 2 имеет две степени свободы, соответствующие поляризациям ± 2 .

$m^2 = -d\lambda^2$. В то время как (5.23) остаётся нетривиальным соотношением, (5.24) вырождается в тождество, которое свидетельствует о появлении калибровочной инвариантности со скалярным калибровочным параметром

$$\delta\phi_{\mu\nu} = D_\mu D_\nu \xi + 2\lambda^2 g_{\mu\nu} \xi. \quad (5.26)$$

Можно показать, что данная калибровочная симметрия исключает скалярную степень свободы массивного поля спина 2 и, таким образом, в $d = 4$ распространяются четыре степени свободы, соответствующие поляризациям $\pm 2, \pm 1$.

5.2.3 Массивное поле спина s

Лагранжиан для массивного поля спина s , распространяющегося в пространстве (анти)-де Ситтера, был получен в работе [84].

Следует отметить, что в работе Синга и Хагена [179] коэффициенты в лагранжиане фиксировались из условия того, что дополнительные поля должны зануляться в силу уравнений движения и давать в результате систему (5.17), (5.18) для динамического поля $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}(x)$. Таким образом приходилось рассматривать все следствия уравнений движения, что сложно технически и не позволяет каким-либо простым способом доказать правильность лагранжиана. В [84] был предложен простой принцип, фиксирующий свободные коэффициенты в лагранжиане. А именно, в работе Зиновьева [84] было предложено рассмотреть лагранжиан \mathcal{L} , представляющий из себя сумму лагранжианов \mathcal{L}_s^F Фронсдала (4.2) безмассовых полей спинов от 0 до s

плюс слагаемые первого и нулевого порядка по производным, которые смешивают поля разных спинов и вводят массовоподобные слагаемые

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{k=s} \mathcal{L}_s^F + m \sum_{k=0}^{k=s} (\phi^k D\phi^{k-1} + Dtr(\phi^k)\phi^{k-1} + Dtr(\phi^{k-1})tr(\phi^k)) + \quad (5.27)$$

$$+ m^2 \sum_{k=0}^{k=s} (tr(\phi^k)\phi^{k-2} + (\phi^k)^2 + (tr(\phi^k))^2), \quad (5.28)$$

где $\phi^k \equiv \phi_{\mu_1 \dots \mu_k}$ поле Фронсдала, которое по определению удовлетворяет условию двойной бесследовости (1.35), $tr(\phi^k)$ обозначает первый след $\phi^\sigma_{\sigma\mu_3 \dots \mu_k}$ и $D\phi^k \equiv D_{\mu_1} \phi_{\mu_2 \dots \mu_s}$. Перед каждым слагаемым во второй и третьей сумме предполагается некоторый неизвестный пока коэффициент. Размерный коэффициент массы вынесен явно.

Закон калибровочного преобразования безмассового поля $\delta\phi_{\mu(k)} = D_\mu \xi_{\mu(k-1)}$ также деформируется поправками от калибровочных параметров полей других спинов

$$\delta\phi_{\mu(k)} = D_\mu \xi_{\mu(k-1)} + \xi_{\mu(k)} + g_{\mu\mu} \xi_{\mu(k-2)}, \quad (5.29)$$

где перед вторым и третьим слагаемым стоят некоторые коэффициенты.

Оказывается, что требование калибровочной инвариантности (5.29) фиксирует полностью все коэффициенты, кроме параметра массы m^2 . Наличие калибровочной инвариантности позволяет сразу заключить, что данная теория описывает столько же степеней свободы, сколько и сумма безмассовых полей спинов от 0 до s , т.е. как раз столько сколько должно быть у массивного поля спина s .

Заметим, что закон калибровочных преобразований (5.29) содержит в себе алгебраическую часть, что позволяет наложить калибровку прямо в лагранжиане без риска заработать лишние степени свободы. Также легко видеть, что каждый калибровочный параметр входит алгебраически в закон преобразований некоторого поля. Таким образом, путем наложения алгебраической калибровки по всем параметрам теория сводится к некалибровочной, как и должно быть для массивных полей. Более того, странный набор полей Синга-Хагена естественно получается путем фиксации калибровки в лагранжиане Зиновьева.

Данный подход к рассмотрению лагранжианов массивных полей как составленных из лагранжианов безмассовых полей плюс слагаемые меньшего порядка по производным работает и в общем случае массивных полей смешанного типа симметрии [85, 88, 91–93, 153]. Калибровочная симметрия позволяет эффективно контролировать число степеней свободы при рассмотрении различных вопросов введения взаимодействия, тогда как контроль за числом связей второго рода в некалибровочном подходе к массивным полям чрезвычайно сложен.

5.2.4 Частично-безмассовое поле спина s

В лагранжиане Зиновьева в пространстве (анти)-де Ситтера при определенных значениях массы происходит зануление некоторых коэффициентов так, что лагранжиан распадается на две части: одну, содержащую поля Фронсдала спинов $s, \dots, s - t + 1$,

и другую, содержащую поля спинов $s - t, \dots, 0$. Соответствующие коэффициенты в калибровочных преобразованиях, смешивающие эти две части, также зануляются.

m^2 общего положения. В случае общего положения, лагранжиан Зиновьева после фиксации алгебраической симметрии сводится к некалибровочной теории и описывает массивное поле спина s . В $d = 4$ степени свободы соответствуют поляризациям $\pm s, \pm(s - 1), \dots, \pm 1, 0$.

$m^2 = \lambda^2((s - 2)(d + s - 3) - s)$. Лагранжиан распадается на две части, первая из которых содержит только одно поле Фронсдала $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ спина s и описывает безмассовое поле спина s с калибровочным законом

$$\delta\phi_{\mu(s)} = D_\mu \xi_{\mu(s-1)}. \quad (5.30)$$

В $d = 4$ степени свободы соответствуют поляризациям $\pm s$. Вторая часть лагранжиана описывает массивное поле спина $s - 1$ с некоторым специальным значением параметра массы.

$m^2 = \lambda^2((s - t - 1)(d + s - t - 2) - s)$, $t = 1, \dots, s$. Существует s критических значений массы. Для t -ого из них лагранжиан распадается на две части, первая из которых содержит поля Фронсдала спинов $s, \dots, (s - t + 1)$. Калибровочная симметрия усеченного лагранжиана содержит параметры $\xi_{\mu(s-1)}, \dots, \xi_{\mu(s-t)}$. Как видно из закона калибровочных преобразований, все параметры, кроме имеющего наименьший ранг $\xi_{\mu(s-t)}$, могут быть использованы для наложения алгебраических калибровок. В результате часть полей исключается, и получается усеченный набор полей Синга-Хагена. Однако, теория остаётся калибровочной, и закон преобразований с параметром $\xi_{\mu(s-t)}$ имеет вид

$$\delta\phi_{\mu(s)} = \overbrace{D_\mu \dots D_\mu}^t \xi_{\mu(s-t)} + \dots, \quad (5.31)$$

где многоточие обозначает слагаемые меньшего порядка по производным. В $d = 4$ степени свободы соответствуют поляризациям $\pm s, \pm(s - 1), \dots, \pm(s - t + 1)$. Поля с $t > 1$, т.е. с более чем одной производной в законе калибровочных преобразований, называются частично-безмассовыми [75–77, 80–84, 198].

Вторая часть лагранжиана описывает массивное поле спина $s - t$ с некоторым специальным значением параметра массы.

Заметим, что безмассовые поля естественным образом встраиваются в семейство калибровочных полей, параметризуемое числом производных t в законе калибровочных преобразований, как случай $t = 1$.

5.3 Ковариантное описание

В работе [3], излагаемой в данном разделе, было предложено простое геометрическое описание частично-безмассовых полей, прямо обобщающее таковое для безмассовых. А именно, предлагалось рассмотреть связность алгебры (анти)-де Ситтера

со значениями в неприводимом представлении, характеризующемся произвольной двухрядной диаграммой Юнга вида

$$\begin{array}{|c|} \hline s-1 \\ \hline s-t \\ \hline \end{array}. \quad (5.32)$$

Соответственно, калибровочное поле можно явно записать как

$$W_\mu^{A(s-1),B(s-t)} dx^\mu. \quad (5.33)$$

Закон калибровочных преобразований, калибровочно-инвариантная напряжённость поля и тождества Бьянки для неё имеют простой вид

$$\delta W_1^{A(s-1),B(s-t)} = D_\Omega \xi_0^{A(s-1),B(s-t)}, \quad (5.34)$$

$$R_2^{A(s-1),B(s-t)} = D_\Omega W_1^{A(s-1),B(s-t)}, \quad (5.35)$$

$$D_\Omega R_2^{A(s-1),B(s-t)} = 0. \quad (5.36)$$

Согласно общему правилу редукции (см. Приложение С.4), представление (5.32) алгебры (анти)-де Ситтера имеет следующее разложение на неприводимые представления алгебры Лоренца

$$\begin{array}{|c|} \hline s-1 \\ \hline s-t \\ \hline \end{array} \longrightarrow \bigoplus_{k=s-t}^{s-1} \bigoplus_{l=0}^{l=s-t} \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline l \\ \hline \end{array} \quad (5.37)$$

Таким образом, в терминах связностей Лоренца мы имеем следующий набор полей

$$\omega_1^{\{k, l\}} \equiv \omega_1^{a(k),b(l)}, \quad k = s-t, \dots, s-1, \quad l = 0, \dots, s-t, \quad (5.38)$$

и аналогично для калибровочных параметров $\xi_0^{a(k),b(l)}$ и напряжённостей $R_2^{a(k),b(l)}$.

Оставляя технические детали, связанные с вычислением σ_- -когомологий, до раздела 5.4, приведём выражения для динамически значимых величин теории. Как нетрудно видеть из формы калибровочного закона в лоренцевых компонентах, все проекции $\xi_0^{A(s-1),B(s-t)}$, кроме максимально параллельной полю компенсатора, не являются σ_- -замкнутыми и следовательно с их помощью часть полей может быть откалибрована в ноль. Таким образом, единственный дифференциальный калибровочный параметр отвечает проекции вида

$$\xi_0^{b(s-t)} = \xi_0^{A(s-1),b(s-t)} V_{A_1} \dots V_{A_{s-1}}, \quad (5.39)$$

где $\xi_0^{b(s-t)}$ есть симметричный тензор ранга $(s-t)$, след которого автоматически равен нулю вследствие юнговских свойств и бесследовости $\xi_0^{A(s-1),B(s-t)}$. Действительно, в стандартной калибровке $V^A = \delta^A_\bullet$

$$\xi_0^{b(s-t)} \eta_{bb} = -\eta_{\bullet\bullet} \xi_0^{A(s-1),\bullet\bullet b(s-t-2)} V_{A_1} \dots V_{A_{s-1}} = \xi_0^{\bullet\dots\bullet, \bullet\bullet b(s-t-2)} \equiv 0, \quad (5.40)$$

поскольку симметризация по любым s индексам $\xi_0^{A(s-1),B(s-t)}$ дает тождественный ноль. Динамическое поле $\phi^{a(s)}$ определяется как

$$\phi^{a(s)} = \mathbf{\Pi}(W_\mu^{a(s-1),C(s-t)} h^{\mu a} V_{C_1} \dots V_{C_{s-t}}), \quad (5.41)$$

где $\mathbf{P}()$ есть проектор на бесследовую компоненту.

Поле $\phi^{a(s)}$ имеет закон калибровочных преобразований частично-безмассовых полей

$$\delta\phi^{a(s)} = \overbrace{D^a \dots D^a}^t \xi^{a(s-t)} + \dots, \quad (5.42)$$

где многоточие обозначает слагаемые с меньшим числом производных, а также слагаемые, обеспечивающие бесследовость выражения.

Согласно общим принципам развёрнутого подхода, вычисление когомологий σ_- даст полный ответ на вопрос о динамическом содержании системы. Однако в данном достаточно простом случае, используя результаты, известные ранее в литературе, а именно метрический лагранжиан Зиновьева для полностью симметричных частично-безмассовых полей [84] и реперный лагранжиан Васильева для безмассовых полей [40, 146], можно отождествить предложенную формулировку с частично-безмассовыми полями и прямым способом.

Для этого мы наложим на действие самого общего вида в терминах поля (5.33) некоторые условия и покажем, что в плоском пределе он сводится к сумме лагранжианов безмассовых полей спинов от $(s - t + 1)$ до s .

Случай $t = s - 1$, соответствующий конформному обобщению теории Максвелла, рассмотренному в [198], является специальным, так как действие не может быть записано в терминах явно калибровочно-инвариантной напряжённости $R_2^{A(s-1)}$.

Наиболее общее явно калибровочно-инвариантное действие строится как билинейная комбинация напряжённостей, свёрнутых всевозможными способами с использованием компенсатора, и имеет вид

$$S^{s,t} = \frac{1}{2\lambda} \sum_{k,m} \tilde{b}_{k,m}^{s,t} \int_{M^d} \epsilon_{A_1 A_2 \dots A_{d+1}} V^{A_5} E^{A_6} \dots E^{A_{d+1}} \quad (5.43)$$

$$R_2^{A_1 B(s-k-2) C(k), A_2 D(s-t-m-1) C(m)} R_2^{A_3}_{B(s-k-2)} \quad \begin{matrix} C(k), A_4 \\ D(s-t-m-1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} C(m) \\ V_{C(2k+2m)} \end{matrix},$$

где

$$\tilde{b}_{k,m}^{s,t} = b_{k,m}^{s,t} \theta(m) \theta(k) \theta(s - t - m - 1) \theta(s - m - k - 2), \quad (5.44)$$

$$\theta(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (5.45)$$

т.е. пределы суммирования ограничены при фиксированном спине.

Параметры s и t , определяющие спин и глубину частичной-безмассовости, предполагаются фиксированными. Разные выборы коэффициентов $b_{k,m}^{s,t}$ приводят к различным калибровочно-инвариантным системам. Для упрощения формул, пределы суммирования по k и m в (5.43) выбраны так, что слагаемые с $k > t - 1$, которые, вообще говоря, линейно-зависимы с таковыми при $k \leq t - 1$, тоже входят в действие.

Имеется следующие соответствие с подходом Зиновьева [84] и с реперной формулировкой безмассовых полей [40, 146]. Наиболее симметричные проекции $\omega_1^{a(k)}$, где $k = s - t, \dots, s - 1$, поля (5.33) являются реперными полями $e_1^{a(k)}$ и путём наложения алгебраических калибровок сводятся к полям Фронсдала $\phi_{\mu(k+1)}$, которые входят в лагранжиан Зиновьева. Проекция $\omega_1^{a(k),b}$ есть аналоги первого вспомогательного поля

для реперов $\omega_1^{a(k)}$. Как и в случае безмассовых полей в реперном подходе, вариация по $\omega_1^{a(k)}$ даёт уравнения, из которых $\omega_1^{a(k),b}$ выражается через первые производные $\omega_1^{a(k)}$.

Поля $\omega^{a(k),b(m)}$ с $m > 1$ по аналогии с безмассовым случаем называются экстра-полями, так как они выражаются через старшие производные полей $\phi^{a(k)}$. Поэтому первое условие, которое необходимо наложить на действие — это хорошо известное в теории высших спинов условие отщепления экстра-полей. Если действие нетривиально зависит от экстра-полей, то это означает, что действие неявно содержит старшие производные, которые появятся после вариации по экстра-полям и решения чисто алгебраических уравнений движения для них. Условие отщепления экстра-полей требует, чтобы все экстра-поля входили в действие только в виде полных производных, т.е. вариация действия по ним тождественно равна нулю.

Условие отщепления экстра полей имеет вид

$$\Pi_L \left[V^{C(m+k)} \frac{\delta S^{s,t}}{\delta W^{A(s-k-1)C(k), B(s-t-m)C(m)}} \right] \equiv 0, \quad \begin{matrix} m = 0, 1, \dots, s-t-2, \\ k = 0, 1, \dots, t-1, \end{matrix} \quad (5.46)$$

где Π_L — проектор на подпространство, ортогональное полю компенсатора, и означает, что эффективно в действие входят только поля $\omega_\mu^{a(k)}$ и $\omega_\mu^{a(k),b}$.

Используя $\delta R_2^{A(s-1), B(t)} = D_\Omega \delta W_1^{A(s-1), B(t)}$, свойства симметрии полей, тождества Бьянки (5.36), определение E^A (2.22), свойство $D_\Omega E^A = 0$ и тождества

$$\epsilon_{A_1 \dots A_{d+1}} = V^F (V_{A_1} \epsilon_{FA_2 \dots A_{d+1}} + V_{A_2} \epsilon_{A_1 F A_3 \dots A_{d+1}} + \dots + V_{A_{d+1}} \epsilon_{A_1 \dots A_d F}), \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{A_1 \dots A_5 H_6 \dots H_{d+1}} E^F E^{H_6} \dots E^{H_{d+1}} &= \\ &= \frac{1}{d-3} \left(\sum_{k=1}^{k=5} \epsilon_{A_1 \dots \hat{A}_k \dots A_5 H_5 \dots H_{d+1}} \delta_{A_k}^F (-)^{k+1} \right) E^{H_5} \dots E^{H_{d+1}}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

вариация действия сводится к виду

$$\begin{aligned} \delta S^{s,t} &= \frac{1}{d-3} \sum_{k,m} \int_{M^d} \epsilon_{A_1 A_2 \dots A_{d+1}} V^{A_4} E^{A_5} \dots E^{A_{d+1}} V_{C(2k+2m+1)} \times \\ &\times \left\{ \delta W_1^{A_1 B(s-k-2)C(k), A_2 D(s-t-m-1)C(m)} R_2^{A_3 \quad C(k), \quad D(s-t-m-1) \quad C(m+1)} \right. \\ &\times \left([d-3+2(k+m)] \tilde{b}_{k,m}^{s,t} - (m+1) \tilde{b}_{k,m+1}^{s,t} + \frac{(k+1)^2}{(s-k-2)} \tilde{b}_{k+1,m}^{s,t} \right) + \\ &+ \delta W_1^{A_1 B(s-k-2)C(k), A_2 D(s-t-m-1)C(m)} R_2^{C(k+1), A_3 \quad D(s-t-m-1) \quad C(m)} \times \\ &\times \left(-[d-3+2(k+m)] \tilde{b}_{k,m}^{s,t} + \frac{(k+1)(s-k-m-1)}{(s-k-2)} \tilde{b}_{k+1,m}^{s,t} \right) + \\ &\left. + (\delta W \longleftrightarrow R) \right\}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Условие отщепления экстра-полей требует, чтобы большинство коэффициентов при структурах в вариации (5.49) обращалось в ноль (5.46), что приводит к системе

уравнений

$$\begin{cases} -[d-3+2(k+m)]b_{k,m}^{s,t} + \frac{(k+1)(s-k-m-1)}{(s-k-2)}b_{k+1,m}^{s,t} = 0, \\ [d-3+2(k+m)]b_{k,m}^{s,t} - (m+1)b_{k,m+1}^{s,t} + \frac{(k+1)^2}{(s-k-2)}b_{k+1,m}^{s,t} = 0, \\ s-t > 1, k=0, \dots, t-1, m=0, \dots, s-t-2, \end{cases} \quad (5.50)$$

и фиксирует $b_{k,m}^{s,t}$ с точностью до общего фактора $b^{s,t}$

$$b_{k,m}^{s,t} = b^{s,t} \frac{(s-k-m-1)!(d-5+2(k+m))!!}{k!m!(s-k-2)!(s-m)!}. \quad (5.51)$$

Нетривиальная часть вариации действия имеет вид

$$\begin{aligned} \delta S^{s,t} &= \frac{1}{d-3} \sum_k \int_{M^d} \epsilon_{A_1 A_2 \dots A_{d+1}} V^{A_4} E^{A_5} \dots E^{A_{d+1}} V_{C(2k+2t-1)} \times \\ &\times \{ \delta W_1^{A_1 B(s-k-2)C(k), A_2 C(t-1)} R_2^{A_3}_{B(s-k-2)}{}^{C(k), C(t)} + (\delta W \longleftrightarrow R) \} \times \\ &\times \left([d-5+2(k+t)] \tilde{b}_{k,t-1}^{s,t} + \frac{(k+1)^2}{(s-k-2)} \tilde{b}_{k+1,t-1}^{s,t} \right). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Как объясняется в разделе 5.4, коэффициенты (5.51) гарантируют согласие плоского предела с результатами Зиновьева. В случае чисто безмассового поля $t=1$, действие сводится к (5.13) [146].

Случаи $t=s$ and $t=s-1$ являются специальными. В случае $t=s-1$ действие не содержит экстра-полей, и свободные коэффициенты фиксируются из условия правильности плоского предела. Вариация действия имеет вид

$$\begin{aligned} \delta S^{s,1} &= \frac{1}{d-3} \sum_k \int_{M^d} \epsilon_{A_1 A_2 \dots A_{d+1}} V^{A_4} E^{A_5} \dots E^{A_{d+1}} V_{C(2k+1)} \{ \\ &\delta W_1^{A_1 B(s-k-2)C(k), A_2} R_2^{A_3}_{B(s-k-2)}{}^{C(k), C} [(d-3+2k)\tilde{b}_{k,0}^{s,1} + \frac{(k+1)^2}{(s-k-2)}\tilde{b}_{k+1,0}^{s,1}] + \\ &+ \delta W_1^{A_1 B(s-k-2)C(k), A_2} R_2^{C(k+1), A_3}_{B(s-k-2)} [-(d-3+2k)\tilde{b}_{k,0}^{s,1} + \frac{(k+1)(s-k-1)}{(s-k-2)}\tilde{b}_{k+1,0}^{s,1}] + \\ &+ (\delta W \longleftrightarrow R) \}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Как показано в разделе 5.4, после надлежащего рескейлинга полей первое слагаемое в (5.53) переходит в плоском пределе в вариацию действия безмассового поля, в то время как второе слагаемое содержит неустранимую сингулярность. Условие правильности плоского предела требует, чтобы второе слагаемое обращалось в ноль, что фиксирует $b_{k,0}^{s,t}$ в форме

$$b_{k,0}^{s,1} = b^{s,1} \frac{(s-k-1)(d-5+2k)!!}{k!s!}, \quad (5.54)$$

т.е. (5.51) также дают решение в случае $t=s-1$.

В случае $t = s$ действие не может быть записано в форме (5.43) потому, что нет места для индексов A_2 и A_4 . В данном случае действие приходится строить в терминах обобщённого тензора Вейля $C^{a(s),b}$, как это например происходит в обычной электродинамике,

$$S^{s,0} = \frac{1}{2} \int_{M^d} \epsilon_{c_1 \dots c_d} e^{c_1} \dots e^{c_d} \left(C^{a(s),b} C_{a(s),b} - \frac{1}{2} C^{a(s-1)m, m} C_{a(s-1)n, n} \right). \quad (5.55)$$

Для $d = 4$ теория соответствует рассмотренной Дезером и Волдроном в [198], и совпадает с $4d$ электродинамикой Максвелла как частным случаем $s = 1$, для которого $C^{a,b}$ отождествляется с тензором напряжённости Максвелла.

5.4 Лоренц-ковариантное описание

В данном разделе мы рассмотрим явно Лоренц-ковариантную формулировку, которая обобщает результаты [132, 147] для безмассовых полей на случай частично-безмассовых. В [132, 147] были впервые введены старшие связности $\omega^{a(s-1),b(k)}$, $k = 2, \dots, (s-1)$, и построено соответствующее действие.

(A) dS_d -ковариантная производная в терминах Лоренц-полей представляется в виде

$$R_2^{\{k, l\}} = D_\Omega(\omega_1^{\{k, l\}}) = D(\omega_1^{\{k, l\}}) + \lambda \sigma_-^1(\omega_1^{\{k+1, l\}}) + \lambda \sigma_-^2(\omega_1^{\{k, l+1\}}) + \lambda \sigma_+^1(\omega_1^{\{k-1, l\}}) + \lambda \sigma_+^2(\omega_1^{\{k, l-1\}}), \quad (5.56)$$

где операторы σ_-^1 , σ_-^2 , σ_+^1 , σ_+^2 имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_+^1(C^{a(k),b(l)}) &= g(k, l)(k+1) \left(h^a C^{a(k),b(l)} - \frac{k}{(d+2k-2)} h_m C^{a(k-1)m,b(l)} \eta^{aa} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{l}{d+k+l-3} h_m C^{a(k),mb(l-1)} \eta^{ab} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{l(d+2k-2)(d+k+l-3)} h_m C^{a(k-1)b,b(l-1)m} \eta^{aa} \right), \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \sigma_+^2(C^{a(k),b(l)}) &= G(k, l)(l+1) \left(h^b C^{a(k),b(l)} - \frac{k}{k-l} h^a C^{a(k-1)b,b(l)} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{l}{d+2l-4} h_m C^{a(k),b(l-1)m} \eta^{bb} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{k(k-l-1)}{(k-l)(d+k+l-3)} h_m C^{a(k-1)m,b(l)} \eta^{ab} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{lk(d+2k-4)}{(k-l)(d+2l-4)(d+k+l-3)} h_m C^{a(k-1)b,b(l-1)m} \eta^{ab} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k(k-1)}{(k-l)(d+k+l-3)} h_m C^{a(k-2)mb,b(l)} \eta^{aa} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{lk(k-1)}{(k-l)(d+k+l-3)(d+2l-4)} h_m C^{a(k-2)bb,b(l-1)m} \eta^{aa} \right), \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\sigma_-^1(C^{a(k),b(l)}) = f(k,l)(h_m C^{a(k-1)m,b(l)} + \frac{l}{k-l+1} h_m C^{a(k-1)b,b(l-1)m}), \quad (5.59)$$

$$\sigma_-^2(C^{a(k),b(l)}) = F(k,l)(h_m C^{a(k),b(l-1)m}), \quad (5.60)$$

и факторы $g(k,l)$, $G(k,l)$, $f(k,l)$ и $F(k,l)$ могут быть либо прямо выведены путем выполнения редукции (5.37) в тензорных терминах, либо получены, что технически проще, из условия калибровочной инвариантности напряжённостей $R_2^{a(k),b(l)}$ относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \delta\omega_1^{\{k,l\}} = D_\Omega(\xi_0^{\{k,l\}}) = & D(\xi_0^{\{k,l\}}) + \lambda\sigma_-^1(\xi_0^{\{k+1,l\}}) + \lambda\sigma_-^2(\xi_0^{\{k,l+1\}}) + \\ & + \lambda\sigma_+^1(\xi_0^{\{k-1,l\}}) + \lambda\sigma_+^2(\xi_0^{\{k,l-1\}}), \end{aligned} \quad (5.61)$$

Структура выражения (5.56) может быть легко понята, если взглянуть на выражение (2.23) для Лоренц-ковариантной производной. В выражении $D_\Omega W^{A\dots}$ слагаемые $V^A E_M W^{M\dots}$ приводят к членам вида $h_m \omega^{a(k)m,b(l)}$ и $h_m \omega^{a(k),b(l)m}$, а слагаемые $E^A V_M W^{M\dots}$ к членам вида $h^a \omega^{a(k-1),b(l)}$ и $h^b \omega^{a(k),b(l-1)}$. Остальные слагаемые в операторах $\sigma_\pm^{1,2}$ возникают из условий юнговости и бесследовости полей и фиксируют их с точностью до общих факторов. $\sigma_\pm^{1,2}$ можно понимать как операторы, осуществляющие следующие преобразования над обобщёнными связностями Лоренца

$$\sigma_+^1 : \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline m \\ \hline \end{array} \mathbf{q} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline k+1 \\ \hline m \\ \hline \end{array} \mathbf{q}+1, \quad \sigma_+^2 : \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline m \\ \hline \end{array} \mathbf{q} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline m+1 \\ \hline \end{array} \mathbf{q}+1 \quad (5.62)$$

$$\sigma_-^1 : \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline m \\ \hline \end{array} \mathbf{q} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline k-1 \\ \hline m \\ \hline \end{array} \mathbf{q}+1, \quad \sigma_-^2 : \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline m \\ \hline \end{array} \mathbf{q} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline m-1 \\ \hline \end{array} \mathbf{q}+1 \quad (5.63)$$

Из (5.61) следует, что все калибровочные параметры кроме $\xi_0^{\{s-t,0\}}$ позволяют с помощью оператора $\sigma_- = \sigma_-^1 + \sigma_-^2$ наложить алгебраические калибровки на некоторые поля. В качестве операторов, посредством которых накладываются калибровки, был выбран оператор σ_- , уменьшающий число касательных индексов, поскольку мы стремимся найти ассоциированную с развёрнутой формулировкой метрическую формулировку в терминах потенциалов, т.е. ту, в которой динамическое поле имеет наименьший ранг. Выбрав вместо σ_- какую-либо комбинацию $\sigma_+^1 + \sigma_+^2$, динамическим полем оказался бы тензор с наибольшим рангом. Как отмечалось в Главе 2, развёрнутая формулировка включает в себя дуальные описания и, устанавливая соответствие с метрической формулировкой, необходимо выбрать способ исключения вспомогательных полей и наложения алгебраических калибровок.

Выяснение вопроса о том, какие поля являются динамическими, оказывается более трудным в полевых терминах, и мы отсылаем к Главе 6, где найдены σ_- -когомологии в общем случае. Принадлежность (5.41), которое вложено в $\omega_1^{a(s-1)}$, к σ_- -когомологиям можно выяснить более простым образом. Действительно, градуировка, которую σ_- уменьшает на единицу, есть просто количество касательных индексов. Очевидно, (5.41) не может быть откалибровано с помощью какого-либо $\xi_0^{\{k,m\}}$, так как среди последних нет бесследового тензора ранга s . В тоже время, поля с градуировкой на единицу больше, чем у (5.41), есть $\omega_1^{\{k,m\}}$ с $k+m=s$, из которых только $\omega_1^{a(s-1),b}$ вносит вклад в напряжённость для $\omega_1^{a(s-1)}$ через σ_- , т.е. σ_- в этом месте такой же как у безмассового поля. Однако, из анализа безмассового поля

спина s , см. раздел 2.6, следует, что в данном месте у σ_- есть кохомология вида (5.41). Отметим, что приведённое рассуждение не работает для следовой части $\omega_1^{\{k, m\}}$, поскольку та даёт вклад в напряжённость $R_2^{a(s-2)}$, что позволяет исключить её через производные поля $\omega_1^{a(s-2)}$. (5.41) остаётся кохомологией и в частично-безмассовом случае, поскольку не даёт вклада в $R_2^{a(s-2)}$.

Из общих рассуждений проведённых, в разделе 2.5, о связи разницы градуировок калибровочного параметра и динамического поля с количеством производных в законе калибровочных преобразований, сразу получаем, что имеет место закон вида (5.42), точные коэффициенты в котором не представляют интереса, поскольку не существует других калибровочных теорий с данным составом полей и законом калибровочных преобразований.

Наиболее общее Лоренц-ковариантное калибровочно-инвариантное P-чётное действие имеет следующий вид

$$S^{s,t} = \frac{1}{2\lambda} \sum_{k,m} \tilde{a}_{k,m}^{s,t} \int_{M^d} \epsilon_{c_1 \dots c_d} e^{c_5} \dots e^{c_d} R_2^{c_1 a(k-1), c_2 b(m-1)} R_2^{c_3 a(k-1), c_4 b(m-1)}, \quad (5.64)$$

где

$$\tilde{a}_{k,m}^{s,t} = a_{k,m}^{s,t} \theta(k-t)\theta(m)\theta(t-m)\theta(s-k-1) \quad (5.65)$$

и коэффициенты $a_{k,m}^{s,t}$ предстоит определить. Данный лагранжиан при $t = s - 1$ сводится к лагранжиану для безмассового поля, полученного в [147].

Рассмотрим внутреннее произведение вида

$$\langle \phi_{\mathbf{p}}^{\{k,l\}} | \psi_{\mathbf{q}}^{\{k,l\}} \rangle = \int_{M^d} \epsilon_{c_1 c_2 \dots c_d} e^{c_5} \wedge \dots \wedge e^{c_d} \wedge \phi_{\mathbf{p}}^{c_1 a(k-1), c_2 b(l-1)} \wedge \psi_{\mathbf{q}}^{c_3 a(k-1), c_4 b(l-1)}, \quad (5.66)$$

которое отлично от нуля, если p -форма $\phi_{\mathbf{p}}^{\{k,l\}}$ и q -форма $\psi_{\mathbf{q}}^{\{k,l\}}$ принимают значение в одном и том же представлении алгебры Лоренца и $p + q = 4$.

С помощью введенного произведения действие (5.64) можно записать в следующем виде

$$S^{s,t} = \frac{1}{2\lambda} \sum_{k,m} \tilde{a}_{k,m}^{s,t} \langle R_2^{\{k,m\}} | R_2^{\{k,m\}} \rangle. \quad (5.67)$$

Свобода в рескейлинге полей позволяет выбрать факторы $g_{k,l}$, $G_{k,l}$, $f_{k,l}$ и $F_{k,l}$ таким способом, чтобы операторы $\sigma_+^{1,2}$ были сопряжены $\sigma_-^{1,2}$ по отношению к введенному произведению

$$\langle \phi_{\mathbf{p}}^{\{k,l\}} | \sigma_+^{1,2} | \psi_{\mathbf{q}}^{\{k,l\}} \rangle = (-)^{pq+p+q} \langle \psi_{\mathbf{q}}^{\{k,l\}} | \sigma_-^{1,2} | \phi_{\mathbf{p}}^{\{k,l\}} \rangle. \quad (5.68)$$

Явные выражения для $g(k, l)$, $G(k, l)$, $f(k, l)$ и $F(k, l)$, удовлетворяющие поставленным условиям, приведены в Приложении Приложение D.

Используя тождества Бьянки и выражение для вариации напряжённости

$$\begin{aligned} \delta R_2^{\{k,m\}} = D_{\Omega}(\delta\omega_1^{\{k,m\}}) = & D(\delta\omega_1^{\{k,m\}}) + \lambda\sigma_-^1(\delta\omega_1^{\{k+1,m\}}) + \lambda\sigma_-^2(\delta\omega_1^{\{k,m+1\}}) + \\ & + \lambda\sigma_+^1(\delta\omega_1^{\{k-1,m\}}) + \lambda\sigma_+^2(\delta\omega_1^{\{k,m-1\}}), \end{aligned}$$

вариация действия приобретает вид

$$\begin{aligned} \delta S^{s,t} = & \sum_{k,m} \langle \delta \omega_1^{\{k,m\}} | \sigma_-^1 | R_2^{\{k+1,m\}} \rangle (\tilde{a}_{k+1,m}^{s,t} - \tilde{a}_{k,m}^{s,t}) + \\ & + \langle \delta \omega_1^{\{k,m\}} | \sigma_-^2 | R_2^{\{k,m+1\}} \rangle (\tilde{a}_{k,m+1}^{s,t} - \tilde{a}_{k,m}^{s,t}) + \\ & + \langle \delta \omega_1^{\{k,m\}} | \sigma_+^1 | R_2^{\{k-1,m\}} \rangle (\tilde{a}_{k-1,m}^{s,t} - \tilde{a}_{k,m}^{s,t}) + \\ & + \langle \delta \omega_1^{\{k,m\}} | \sigma_+^2 | R_2^{\{k,m-1\}} \rangle (\tilde{a}_{k,m-1}^{s,t} - \tilde{a}_{k,m}^{s,t}). \end{aligned}$$

Условие отщепления экстра-полей (5.46) в Лоренц компонентах переписывается как

$$\frac{\delta S^{s,t}}{\delta \omega_1^{a(k),b(m)}} \equiv 0, \quad k = s - t, \dots, s - 1, \quad m = 2, 3, \dots, t - 1. \quad (5.69)$$

и удовлетворяется если

$$a_{k,m}^{s,t} = a^{s,t}. \quad (5.70)$$

В случае $t < s - 1$ вариация сводится к

$$\delta S^{s,t} = a^{s,t} \sum_{k=t}^{k=s-1} \left(\langle \delta \omega_1^{\{k,0\}} | \sigma_-^2 | R_2^{\{k,1\}} \rangle - \langle \delta \omega_1^{\{k,1\}} | \sigma_+^2 | R_2^{\{k,0\}} \rangle \right) \quad (5.71)$$

Осуществляя рескейлинг

$$\omega_1^{a(k),b} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \omega_1^{a(k),b}, \quad R_2^{a(k),b} \rightarrow \frac{1}{\lambda} R_2^{a(k),b}, \quad (5.72)$$

$$S \rightarrow \lambda S, \quad (5.73)$$

напряжённости (5.56) редуцируются к

$$R_2^{\{k,0\}} = D(\omega_1^{\{k,0\}}) + \sigma_-^1(\omega_1^{\{k,1\}}) + O(\lambda), \quad (5.74)$$

$$R_2^{\{k,1\}} = D(\omega_1^{\{k,1\}}) + O(\lambda). \quad (5.75)$$

В пределе пространства Минковского, $\lambda \rightarrow 0$, слагаемые, смешивающие поля с разными k , стремятся к нулю и напряжённости стремятся к напряжёностям для безмассовых полей в плоском пространстве [147] (см. раздел 2.6)

$$R_2^{\{k,0\}} = D(\omega_1^{\{k,0\}}) + \sigma_-^1(\omega_1^{\{k,1\}}), \quad (5.76)$$

$$R_2^{\{k,1\}} = D(\omega_1^{\{k,1\}}), \quad (5.77)$$

где в последнем выражении мы отбросили экстра-поле.

В результате, для $t < s - 1$ условие отщепления экстра-полей (5.69) гарантирует, что в плоском пределе действие (5.64) для частично-безмассового поля сводится к сумме действий безмассовых полей спинов от $s - t + 1$ до s , что находится в согласии с результатом Зиновьева [84]. Симметричные части $\omega^{a(k)|a}$ связностей $\omega_\mu^{a(k)}$, $k = s - t, \dots, s - 1$, отождествляются с полями Фронсдала.

В специальном случае $t = s - 1$ экстра-поля отсутствуют, поэтому условие (5.69) не применимо. Вариация действия (5.64) в терминах переменных (5.72) сводится к

$$\delta S^{s,1} = \sum_{k=1}^{k=s-1} \left(\langle \delta\omega_1^{\{k,0\}} | \sigma_-^2 | R_2^{\{k,1\}} \rangle - \langle \delta\omega_1^{\{k,1\}} | \sigma_+^2 | R_2^{\{k,0\}} \rangle \right) a_{k,0}^{s,1} + \quad (5.78)$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \left(\langle \delta\omega_1^{\{k,1\}} | \sigma_+^1 | R_2^{\{k-1,1\}} \rangle - \langle \delta\omega_1^{\{k-1,1\}} | \sigma_-^1 | R_2^{\{k,1\}} \rangle \right) (\tilde{a}_{k-1,0}^{s,1} - \tilde{a}_{k,0}^{s,1}). \quad (5.79)$$

Отсутствие сингулярных слагаемых при $\lambda \rightarrow 0$ приводит к $a_{k,0}^{s,1} = a^{s,1}$, что совпадает с (5.70). Оставшееся вариация в плоском пределе равна сумме вариаций действий для безмассовых полей спинов от 2 до s .

5.5 Выводы

В данной главе было предложено простое геометрическое описание для частично-безмассовых полей спина s , относящихся к серии $(\mathbb{Y}(s), 1, t)$ из общей классификации Главы 1. Формулировка в терминах обобщённого поля Янга-Миллса (5.33) обладает явной калибровочной инвариантностью, а также инвариантностью относительно глобальных преобразований симметрии пространства-времени.

Было построено явно калибровочно-инвариантное действие (5.43), свободные коэффициенты в котором фиксируются (5.51) из условия отщепления экстра-полей для $t < s - 1$ и из условия правильного плоского предела для $t = s - 1$. Случай $t = s$ — особый и аналогичен электродинамике, для которой действие также не строится в терминах потенциалов, если использовать только операции с дифференциальными формами. Действие в этом случае имеет вид (5.55).

Формулировка в терминах связностей алгебры Лоренца также была рассмотрена. Лоренц-ковариантная формулировка оказывается заметно сложнее, поскольку выражения для калибровочно-инвариантных напряженностей (5.56) строятся в терминах операторов $\sigma_-^1, \sigma_-^2, \sigma_+^1, \sigma_+^2$, сложный вид которых объясняется необходимостью соблюдения условий Лоренц-неприводимости. Лоренц-ковариантное действие (5.67) также было построено. Используя произвол в рескейлинге компонентных полей, коэффициенты могут быть фиксированы в форме (5.70). Наложением алгебраических калибровок и исключением вспомогательных полей действие может быть приведено к действию, полученному Зиновьевым в [84].

Отметим, что недавно лагранжиан [84] был переписан в [200] в рамках реперного формализма через связности алгебры Лоренца, но без введения калибровочно-инвариантных напряжённости. Поэтому становится ещё более очевидно, что безмассовый и частично-безмассовые пределы данного лагранжиана совпадают с полученными в этой главе лагранжианами в терминах Лоренцевых компонент. Совсем недавно в [201] было получено полное развёрнутое описание массивного поля спина s в пространстве (анти)-де Ситтера, т.е. построены калибровочно-инвариантные напряжённости, а также был выведен соответствующий лагранжиан и проанализированы безмассовый и частично-безмассовые пределы, и показано полное согласие с работой {3}, изложенной в данной главе.

Глава 6

Обобщённые поля Янга-Миллса и калибровочные поля в $(A)dS_d$

6.1 Введение

В данной главе, следуя работам автора [4], [5]мы, в терминах обобщённых полей Янга-Миллса получена простая полевая реализация для всех калибровочных полей в пространстве (анти)-де Ситтера произвольной размерности, т.е. полей типа (\mathbf{S}, q, t) , см. 1.1.2.

Как следует из теории представлений, рассмотренной в главе 1, классификация релятивистских полей в пространстве (анти)-де Ситтера кардинально отличается от таковой в пространстве Минковского. С полевой точки зрения это выражается в том, что безмассовое поле не определяется однозначно спином, необходим ещё некоторый дискретный параметр q , определяющий тип безмассовости; также существует новый тип полей — частично-безмассовые. С каждым типом безмассовых полей ассоциирована серия частично-безмассовых, естественным образом объединяющихся с помощью параметра t в одно семейство с безмассовыми; сам спин поля характеризует представление малой алгебры Вигнера $\mathfrak{so}(d-1)$, а не $\mathfrak{so}(d-2)$, как в пространстве Минковского. Удобно объединить все безмассовые и частично-безмассовые поля в единый класс калибровочных полей.

	Минковский	(анти)-де Ситтер
спин калибровочного поля классифицируется согласно представлениям	$\mathfrak{so}(d-2)$	$\mathfrak{so}(d-1)$
калибровочная теория однозначно определяется	спин \mathbf{S}	спин \mathbf{S}, q, t
калибровочный закон имеет вид	$\delta\phi^{\mathbf{S}} = \sum_i \partial\xi^{\mathbf{S}^i}$	$\delta\phi^{\mathbf{S}} = \overbrace{D\dots D}^t \xi^{\mathbf{S}_1(q,t)}$

В пространстве (анти)-де Ситтера, как однородном пространстве, можно ввести естественный геометрический объект - обобщённое поле Янга-Миллса алгебры (анти)-де Ситтера или обобщённую связность алгебры (анти)-де Ситтера.

Обычное поле Янга-Миллса $A_{\mu}^I t_I dx^{\mu}$ представляет собой дифференциальную фор-

му степени один со значениями в присоединённом представлении некоторой алгебры Ли \mathfrak{g} , t_X — генераторы этой алгебры. Для ортогональных алгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$, которые могут быть реализованы как алгебры Ли антисимметричных матриц $t_{ab} = -t_{ba}$, присоединённое представление совпадает с неприводимым тензорным представлением на антисимметричных тензорах второго ранга. Данное представление обозначается диаграммой Юнга \square . Таким образом, поле Янга-Миллса для $\mathfrak{so}(n)$ естественно записывать в виде $A_\mu^{ab} dx^\mu$, $A_\mu^{ab} = -A_\mu^{ba}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots = 1, \dots, n$.

Обобщённое поле Янга-Миллса $W_q^{\mathbf{A}}$ алгебры \mathfrak{g} определяется как дифференциальная форма произвольной степени $q = 1, \dots, d$ со значениями в любом конечномерном представлении \mathbf{A} алгебры \mathfrak{g} . В нашем случае \mathfrak{g} — это алгебра симметрий пространства де Ситтера или анти-де Ситтера, т.е. $\mathfrak{so}(d, 1)$ или $\mathfrak{so}(d - 1, 2)$.

Тот факт, что обобщённое поле Янга-Миллса принимает значения в представлении алгебры симметрий пространства-времени, позволяет простым образом строить калибровочные теории явно ковариантные относительно преобразований симметрии пространства-времени. Данный подход является далеко идущим обобщением подхода MacDowell-Mansouri-Stelle-West [20, 21] к гравитации, когда безмассовое поле спина 2 описывается с помощью обычного поля Янга-Миллса $W_\mu^{A,B}$ алгебры (анти)-де Ситтера.

Будет показано, что каждое калибровочное поле, определяемое тремя параметрами (\mathbf{S}, q, t) , может быть описано некоторым обобщённым полем Янга-Миллса с определёнными (\mathbf{A}, q) .

Все результаты данной главы оказываются нечувствительными к сигнатуре алгебры симметрий пространства-времени, поэтому для простоты мы будем работать в пространстве анти-де Ситтера, формулы для де Ситтера получаются заменой $\lambda^2 \rightarrow -\lambda^2$.

В пространстве Минковского для того, чтобы построить развёрнутую систему уравнений, описывающую безмассовое поле произвольного спина, использовались сначала эвристические соображения, позволившие определить первое уравнение в системе развёрнутых уравнений, и затем путём последовательного решения тождеств Бьянки были получены остальные уравнения. В пространстве Минковского связность алгебры Пуанкаре хотя и является естественным геометрическим объектом, но не допускает простого описания из-за неполупростоты алгебры Пуанкаре, не имеющей тензорных представлений. Более того, одной связности алгебры Пуанкаре, которая ищется в виде разложения на связности алгебры Лоренца, оказалось недостаточно в общем случае для того, чтобы описать весь калибровочный модуль. Имелась некоторая цепочка таких связностей, которые подклеивались к напряжённым для других связностей.

Строя развёрнутую формулировку для полей в (анти)-де Ситтере, можно было бы пойти таким же путём, как и в пространстве Минковского, определяя из разных соображений реперные поля алгебры Лоренца, но эти связности неминуемо составляют некоторый модуль алгебры (анти)-де Ситтера, а так как калибровочный модуль всегда конечномерен, то он в конечном итоге описывается некоторым обобщённым полем Янга-Миллса.

Поэтому эффективнее выяснить, используя технику σ_- -когомологий, какое калибровочное поле описывается тем или иным обобщённым полем Янга-Миллса. Так-

же будет продемонстрировано согласие между массовым слагаемым, автоматически получаемым из развёрнутых уравнений, и (1.14)-(1.30), полученным в результате теоретико-групповых рассуждений в Главе 1.

Отметим, что в частных случаях такая идентификация уже была проведена на примере безмассового поля спина s в [146], где впервые были введены обобщённые связности алгебры (анти)-де Ситтера; на примере частично-безмассового поля спина s в Главе 5 настоящей диссертации; для полей серии $(\mathbb{Y}[h_1, h_2], 1, 1)$ в [150]; для полей серии $(\mathbf{S}, q_{\min}, 1)$, где q_{\min} есть высота последней колонки в \mathbf{S} , некоторые результаты были получены в [152]. Поля серии $(\mathbf{S}, q_{\min}, 1)$ также исследовались в [86, 87]. В последней работе появились достаточно общие представления алгебры (анти)-де Ситтера, что и поставило вопрос о том, что описывает произвольное обобщённое поле Янга-Миллса, — на этот вопрос ниже получен исчерпывающий ответ.

Следует сказать, что все поля, кроме принадлежащих серии $(\mathbf{S}, q_{\min}, 1)$, неунитарны в пространстве анти-де Ситтера, хотя, по-видимому, унитарны в де Ситтере. В перспективе для нас наибольший интерес представляет построение нелинейной унитарной теории калибровочных полей в пространстве анти-де Ситтера в рамках развёрнутого подхода, которая, естественно, будет основываться на нелинейных теориях обобщённых полей Янга-Миллса. Поэтому условия унитарности, выраженные в ограничениях на спектр обобщённых связностей, возникающих в теории, будут играть ключевую роль. Подробнее связь с нелинейной теорией обсуждается в конце данного раздела.

6.2 Обобщённые поля Янга-Миллса

Сразу же отметим, что в отличие, например, от метрического поля $\phi_{\mu\nu\lambda\dots}$, в обобщённое поле Янга-Миллса явно заложена информация о геометрии пространства-времени и, как мы увидим далее, оно содержит информацию и о локальной калибровочной симметрии подобно обычному полю Янга-Миллса.

Обобщённое поле Янга-Миллса, или связность алгебры (анти)-де Ситтера, представляет собой некоторую q -форму $W_q^{AB\dots}$ на пространстве $(A)dS_d$ со значениями в любом тензорном или спин-тензорном представлении алгебры (анти)-де Ситтера, т.е. касательные индексы A, B, \dots пробегает $0, \dots, d$ и опускаются и поднимаются при помощи η_{AB} . Касательные индексы могут подчиняться некоторым условиям симметрии или следовым условиям - пока это не имеет значения.

Геометрию пространства $(A)dS_d$ удобно описывать с помощью обычной связности Янга-Миллса $\Omega^{A,B}$, удовлетворяющей условию нулевой кривизны, как было показано в разделе 2.3. Тогда можно определить ковариантную производную¹ D_Ω обобщённого поля Янга-Миллса $W_q^{AB\dots}$

$$D_\Omega W_q^{AB\dots} = dW_q^{AB\dots} + \Omega^A{}_M W_q^{MB\dots} + \Omega^B{}_M W_q^{AM\dots} + \dots \quad (6.1)$$

Очевидно, D_Ω сохраняет тип тензорного представления.

¹Для спин-тензоров необходимо добавить слагаемое $\frac{1}{8}\Omega^{A,B}[\Gamma_A, \Gamma_B]$, где Γ_A — генераторы алгебры Клиффорда, $\Gamma_A\Gamma_B + \Gamma_B\Gamma_A = 2\eta_{AB}$.

Для данного поля $W_q^{AB\dots}$ степени q можно построить $(q+1)$ -форму напряжённости $R_{q+1}^{AB\dots} = D_\Omega W_q^{AB\dots}$, инвариантную относительно калибровочных преобразований вида $\delta W_q^{AB\dots} = D_\Omega \xi_{q-1}^{AB\dots}$ в силу условия нулевой кривизны $D_\Omega^2 = 0$, (2.20), где калибровочный параметр есть $(q-1)$ -форма со значениями в том же представлении алгебры (анти)-де Ситтера, что и поле $W_q^{AB\dots}$. Аналогично, само $W_q^{AB\dots}$ инвариантно относительно калибровочных симметрий второго уровня $\delta \xi_{q-1}^{AB\dots} = D_\Omega \xi_{q-2}^{AB\dots}$ и так далее вплоть до $\delta \xi_1^{AB\dots} = D_\Omega \xi_0^{AB\dots}$. В добавок напряжённость удовлетворяет тождествам Бьянки $D_\Omega R_{q+1}^{AB\dots} \equiv 0$.

В линейной теории достаточно ограничиться рассмотрением неприводимых представлений, поэтому ниже мы считаем, что поля принимают значения в неприводимых тензорных представлениях алгебры (анти)-де Ситтера, т.е. (i) касательные тензоры имеют симметрию определённой диаграммы Юнга; (ii) свёртка любых двух касательных индексов с инвариантным тензором η_{AB} тождественно равна нулю.

При записи поля в компонентах удобно использовать базис с явной симметрией по касательным индексам². Например, q -форма со значениями в неприводимом представлении \mathbf{A} алгебры (анти)-де Ситтера, определяемом диаграммой $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$, обозначается $W_q^{\mathbf{A}}$,

$$W_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}^{A(s_1), B(s_2), \dots, U(s_n)} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q} \equiv W_q^{\mathbf{A}}, \quad (6.2)$$

и симметрична по индексам из каждой группы, т.е. по $A_1 \dots A_{s_1}$, ..., по $U_1 \dots U_{s_n}$, удовлетворяет условиям Юнга³

$$W_q^{A(s_1), \dots, B(s_i), \dots, BC(s_j-1), \dots, U(s_n)} \equiv 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i < j, \quad (6.3)$$

и свёртка любых двух индексов с η_{CD} обращается в ноль.

Калибровочную теорию в терминах связности $W_q^{\mathbf{A}}$ можно последовательно редуцировать сначала до теории в терминах обобщённых реперов (тетрад) и затем до теории в терминах метрических полей.

Как поле алгебры (анти)-де Ситтера связность $W_q^{\mathbf{A}}$ может быть разложена по отношению к подалгебре Лоренца на набор полей со значениями в неприводимых представлениях алгебры Лоренца, что приводит к теории *a la* теория гравитации в переменных тетрада-связность. Затем, путём наложения алгебраических калибровок и исключения вспомогательных полей можно привести теорию к некоторому минимальному набору реперных полей и затем с помощью фоновой тетрады h_μ^a или её обратной h_a^μ преобразовать все формы с касательными индексами алгебры Лоренца либо полностью в мировые тензоры, либо полностью в касательные тензоры, что приводит к формулировке в терминах метрических полей. Ниже мы рассмотрим каждый этап редукции более подробно.

6.2.1 Редукция к реперному формализму

С теоретико-групповой точки зрения редукция к реперному формализму в терминах связностей алгебры Лоренца тривиальна и заключается в применении 'branching

²Конечно, все результаты не зависят от способа записи полей в компонентах.

³Как и всегда подразумевается симметризация индексов, обозначенных одной буквой.

rules', см. Приложение С.4, к представлению \mathbf{A} алгебры (анти)-де Ситтера \mathfrak{g} . Подалгебра Лоренца отождествляется с подалгеброй стабильности поля компенсатора V^A , см. раздел 2.3.

Результат разложения \mathfrak{g} -модуля $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$ на неприводимые представления подалгебры Лоренца имеет вид⁴

$$\text{Res}_{\mathfrak{so}(d-1,1)}^{\mathfrak{g}} \mathbf{A} = \bigoplus_{k_1, \dots, k_N} \mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}, \quad (6.4)$$

где кратность каждого представления $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}$ равна единице и

$$\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}} = \begin{cases} \mathbb{Y}(k_1, \dots, k_n), & k_1 \in [s_2, s_1], \dots, k_{n-1} \in [s_n, s_{n-1}], k_n \in [0, s_n], \\ \emptyset, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6.5)$$

Таким образом, типы симметрий модулей, возникающих в результате ограничения, получаются отрезанием произвольного числа клеток от разных рядов диаграммы \mathbf{A} так, что каждый обрезанный ряд должен быть не короче следующего ряда исходной диаграммы \mathbf{A} . Удобно ввести V -градуировку g на пространстве $\text{Res}_{\mathfrak{so}(d-1,1)}^{\mathfrak{g}}$ равную $k_1 + \dots + k_n - s_2 - \dots - s_p$ для элемента $\mathbb{Y}(k_1, \dots, k_{n-1}, k_n)$, так что $g = 0$ для представления наименьшего ранга и $g = s_1$ для представления наибольшего ранга, которое имеет тот же тип симметрии что и \mathbf{A} . По определению подалгебра Лоренца действует на каждом представлении $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}$, не смешивая их между собой. Напротив, генераторы $(A)dS_d$ -трансляций действуют между различными $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}$, переводя элементы градуировки g в элементы градуировки $(g \pm 1)$.

Удобно определить вообще говоря приводимые $\mathfrak{so}(d-1,1)$ -модули \mathbf{A}_g как прямую сумму неприводимых $\mathfrak{so}(d-1,1)$ -модулей $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}$, имеющих одну и ту же градуировку g (один и тот же ранг),

$$\mathbf{A}_g = \bigoplus_{k_1 + \dots + k_n = g} \mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}, \quad (6.6)$$

так что $\text{Res}_{\mathfrak{so}(d-1,1)}^{\mathfrak{g}} \mathbf{A} = \bigoplus_g \mathbf{A}_g$.

Таким образом, \mathfrak{g} -связность $W_q^{\mathbf{A}}$ редуцируется на V -градуированный набор связностей алгебры Лоренца

$$W_q^{\mathbf{A}} \quad \longleftrightarrow \quad \omega_q^{\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}}, \quad \begin{cases} k_1 = s_2, \dots, s_1, \\ \dots, \\ k_{n-1} = s_n, \dots, s_{n-1}, \\ k_n = 0, \dots, s_n. \end{cases} \quad (6.7)$$

Очевидно, что некоторый неприводимый тензор $R^{\mathbf{X}}$ алгебры \mathfrak{g} такой, что свёртка любого его индекса с полем компенсатора равна нулю, эквивалентен неприводимому тензору подалгебры Лоренца с тем же типом симметрии \mathbf{X} . Поэтому неприводимый

⁴Строго говоря, ниже рассматриваются только тензорные представления. В случае $n = [(d+1)/2]$ условия (анти)-самодуальности не накладываются, т.е. (анти)-самодуальные поля входят парами.

тензор $T^{\mathbf{A}}$ алгебры \mathfrak{g} имеет следующее разложение на неприводимые тензоры подалгебры Лоренца

$$T^{\mathbf{A}} = \sum_{k_1, \dots, k_p} \left(\underbrace{V \dots V}_{s_1 - k_1} \dots \underbrace{V \dots V}_{s_n - k_n} T^{\mathbf{A}\{k_1, \dots, k_n\}} + \text{perm} + \eta \right), \quad (6.8)$$

где каждый тензор $T^{\mathbf{A}\{k_1, \dots, k_n\}}$ алгебры \mathfrak{g} полностью ортогонален V^C . 'perm' обозначает некоторые слагаемые с перестановками индексов, и η обозначает некоторые слагаемые с метрическим тензором η_{AB} , которые присутствуют в общем случае, поскольку $T^{\mathbf{A}}$ удовлетворяет условиям юнговости и бесследовости⁵.

Чтобы получить компоненту $T^{\mathbf{A}\{k_1, \dots, k_n\}}$, необходимо сначала свернуть $(s_i - k_i)$ компенсаторов с i -ой группой касательных индексов $T^{\mathbf{A}}$

$$T^{A(k_1)A'(s_1-k_1), B(k_2)B'(s_2-k_2), \dots, U(k_n)U'(s_n-k_n)} \underbrace{V_{A'} \dots V_{A'}}_{s_1-k_1} \underbrace{V_{B'} \dots V_{B'}}_{s_2-k_2} \dots \underbrace{V_{U'} \dots V_{U'}}_{s_n-k_n}. \quad (6.9)$$

Для упрощения обозначений индекс, свёрнутый с компенсатором, будет обозначаться \bullet , поскольку всегда может быть выбрана стандартная калибровка для компенсатора V^A , как в (2.21). В стандартной калибровке тензор подалгебры Лоренца $r^{a(k_1), \dots, u(k_n)}$ можно легко вложить в тензор $R^{A(k_1), \dots, U(k_n)}$ алгебры \mathfrak{g} , а именно $R^{a(k_1), \dots, u(k_n)} = r^{a(k_1), \dots, u(k_n)}$ и $R^{A(k_1), \dots, C(k_i-1)\bullet, \dots, U(k_n)} = 0$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Следовательно, вместо того, чтобы работать с V -ортогональными тензорами алгебры \mathfrak{g} , можно прямо использовать тензоры алгебры Лоренца. Например, в стандартной калибровке $T^{\mathbf{A}\{k_1, \dots, k_n\}}$ может быть получен из

$$T^{a(k_1)\bullet(s_1-k_1), b(k_2)\bullet(s_2-k_2), \dots, u(k_n)\bullet(s_n-k_n)} \quad (6.10)$$

путём добавления некоторых слагаемых с перестановками индексов и слагаемых со следами данного тензора. Несмотря на то, что (6.9) и (6.10) содержат правильное число тензорных индексов в каждой группе, они вообще говоря не обладают определёнными следовыми или юнговскими свойствами и не ортогональны компенсатору. Тем не менее такие выражения упростят ниже вычисления массово-подобного слагаемого.

Заметим, что свёртка выражений вида (6.10) с метрикой η_{ab} алгебры Лоренца не равна нулю, а в силу $0 \equiv T^{\dots AB \dots} \eta_{AB} = T^{\dots ab \dots} \eta_{ab} \pm T^{\dots \bullet \bullet \dots} \eta_{\bullet \bullet}$ приводит к свёртке индексов с ещё двумя компенсаторами.

Также отметим, что свёртка более чем $(s_i - s_{i+1})$ компенсаторов с i -ой группой индексов, вообще говоря, не обращается в ноль, а выражается через линейную комбинацию слагаемых с не более чем $(s_j - s_{j+1})$ свёрнутыми компенсаторами в j -ой группе.

Существуют случаи, когда слагаемые типа 'perm' отсутствуют в (6.8), именно так возникают физически интересные компоненты, такие как обобщённый репер:

⁵ Например, неприводимый тензор $T^{AA,B}$, имеющий симметрию \boxplus , раскладывается на $T^{AA,B} = R^{AA,B} + V^A R^{A,B} + [V^A R^{AB} - V^B R^{AA}] + [(V^A V^A R^B - V^A V^B R^A) - \frac{1}{d} V^C V_C (\eta^{AA} R^B - \eta^{AB} R^A)]$, где $R^{AA,B}$, $R^{A,B}$, R^{AB} и R^A неприводимые ортогональные V^C тензоры, имеющие симметрии диаграмм \boxplus , \boxminus , \boxtimes и \square , соответственно. Эквивалентное утверждение состоит в том, что $T^{AA,B}$ раскладывается на неприводимые тензоры алгебры Лоренца $R^{aa,b}$, $R^{a,b}$, R^{aa} и R^a с симметрией \boxplus , \boxminus , \boxtimes и \square , имеющие градуировки 2, 1, 1 и 0 соответственно.

Лемма (А). При условии что i -ая группа, где $i = k, \dots, n$, свёрнута с $s_i - s_{i+1}$ (s_n для $i = n$; $s_i - s_{i+1}$ может быть нулём) компенсаторами, тензор вида (6.10) обладает симметрией диаграммы $\mathbb{Y}(s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_n)$, т.е. как если бы k -й ряд был выкинут. Также тензор бесследов по индексам из групп $k, \dots, n - 1$.

$${}_p a(s_1, \dots, b(s_{k-1}), c(s_{k+1}), \dots, u(s_{n-1})) = T a(s_1, \dots, b(s_{k-1}), c(s_{k+1}), \bullet(s_{k-s_{k+1}}), \dots, u(s_n), \bullet(s_{n-1-s_n}), \bullet(s_n)).$$

Поскольку при построении калибровочной теории использовалась ковариантная производная D_Ω и только она, то при редукции к подалгебре Лоренца удобно выделить Лоренц-ковариантную производную D из D_Ω в соответствии с (2.23)

$$\delta W_q^{AB\dots} = D \xi_{q-1}^{AB\dots} \pm \lambda V^A E_M \xi_{q-1}^{MB\dots} \mp \lambda E^A V_M \xi_{q-1}^{MB\dots} + \dots, \quad (6.11)$$

и совершенно аналогично для других выражений.

В силу $DV^A = 0$ и $DE^A = 0$, (2.24), само разложение (6.8), а также свойство ортогональности по отношению к компенсатору V^C сохраняются под действием D , а не D_Ω . Кроме D появились ещё два оператора в правой части (6.11). Первый $V \cdot E_M$ с висячим индексом у компенсатора уменьшает градуировку на один, тогда как второй, $E \cdot V_M$, увеличивает градуировку на один.

В терминах приводимых компонент вида (6.10) и со знаками для случая анти-де Ситтера (6.11) сводится к

$$\begin{aligned} \delta W_q^{a(k_1)\bullet(s_1-k_1), \dots, u(k_n)\bullet(s_n-k_n)} &= D \xi_{q-1}^{a(k_1)\bullet(s_1-k_1), \dots, u(k_n)\bullet(s_n-k_n)} + \\ &+ \lambda \sum_{i=1}^{i=n} (s_i - k_i) h_m \xi_{q-1}^{a(k_1)\bullet(s_1-k_1), \dots, c(k_i)m\bullet(s_i-k_i-1), \dots, u(k_n)\bullet(s_n-k_n)} + \\ &- \lambda \sum_{i=1}^{i=n} h^c \xi_{q-1}^{a(k_1)\bullet(s_1-k_1), \dots, c(k_i-1)\bullet(s_i-k_i+1), \dots, u(k_n)\bullet(s_n-k_n)}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где префакторы $(s_i - k_i)$ возникают за счёт тождественных перестановок индексов у компенсаторов. Хотя это и технически сложно, но в принципе можно перейти и к неприводимым компонентам

$$\omega_q^{a(k_1), \dots, u(k_n)} = \Pi \left(W_q^{a(k_1)\bullet(s_1-k_1), \dots, u(k_n)\bullet(s_n-k_n)} \right), \quad (6.13)$$

где через Π обозначен оператор, содержащий слагаемые типа 'perm' и η , проецирующий на неприводимую компоненту $\mathbb{Y}(k_1, \dots, k_n)$. Тогда (6.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta \omega_q^{a(k_1), \dots, u(k_n)} &= D \xi_{q-1}^{a(k_1), \dots, u(k_n)} + \\ &- \lambda \Pi \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{i=n} h_m \xi_{q-1}^{a(k_1), \dots, c(k_i)m, \dots, u(k_n)}}_{\sigma_- \left(\xi_{q-1}^{A_{k_1, \dots, k_i+1, \dots, k_n}} \right)} \right) + \lambda \Pi \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{i=n} h^c \xi_{q-1}^{a(k_1), \dots, c(k_i-1), \dots, u(k_n)}}_{\sigma_+ \left(\xi_{q-1}^{A_{k_1, \dots, k_i-1, \dots, k_n}} \right)} \right), \end{aligned} \quad (6.14)$$

где перед Π опущен некоторый числовой коэффициент. Операторы во второй строке отображают поле со значениями в неприводимом представлении с симметрией $\mathbb{Y}(k_1, \dots, k_i \pm 1, \dots, k_n)$ в поле со значениями в $\mathbb{Y}(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n)$. Эти операторы есть σ_- и σ_+ соответственно. σ_- и σ_+ — это операторы $V \cdot E_M$ и $E \cdot V_M$ из (6.11), переписанные в терминах неприводимых лоренцевых компонент.

6.2.2 Редукция к метрическому формализму

Из редукции калибровочной теории к связностям алгебры Лоренца можно далее получить формулировку в терминах метрических полей. Предположим, что нам дана q -форма $\omega_q^{\mathbf{X}}$ со значениями в представлении $\mathbf{X} = \mathbb{Y}(k_1, \dots, k_n)$ алгебры Лоренца

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_q}^{a(k_1), b(k_2), \dots, u(k_n)} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_q}. \quad (6.15)$$

С помощью обратной к фоновой тетраде $h^{a\mu}$, $h^{a\mu} h_\mu^b = \eta^{ab}$, все мировые индексы могут быть конвертированы в касательные индексы

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_q}^{a(k_1), b(k_2), \dots, u(k_n) | v_1 \dots v_q} = \omega_{\mu_1 \dots \mu_q}^{a(k_1), b(k_2), \dots, u(k_n)} h^{v_1 \mu_1} \dots h^{v_q \mu_q}. \quad (6.16)$$

Полученный касательный тензор, очевидно, антисимметричен по индексам v_1, \dots, v_q . Поскольку нет никаких алгебраических условий между индексами $a(k_1), \dots, u(k_n)$ и v_1, \dots, v_q , как представление касательной алгебры Лоренца поле $\omega_{\mu_1 \dots \mu_q}^{a(k_1), b(k_2), \dots, u(k_n) | v_1 \dots v_q}$ распадается в прямую сумму неприводимых модулей, даваемых $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -тензорным произведением

$$\mathbf{X} \otimes_{\mathfrak{so}(d-1, 1)} \mathbb{Y}(\overbrace{1, \dots, 1}^q) \quad (6.17)$$

представления \mathbf{X} и представления, отвечающего диаграмме Юнга с одной колонкой высоты q .

Наиболее простой способ получить q -форму со значениями в \mathbf{X} состоит в том, чтобы взять ноль форму $C^{\mathbf{Z}}$ со значениями в $\mathbf{Z} = \mathbb{Y}(k_1 + 1, \dots, k_q + 1, k_{q+1}, \dots, k_n)$, где \mathbf{Z} отвечает компоненте наибольшего веса (см. раздел 6.3.4) в (6.17),

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_q}^{a(k_1), b(k_2), \dots, u(k_n)} = C^{a(k_1)v_1, b(k_2)v_2, \dots, c(k_q)v_q, \dots, u(k_n)} h_{v_1 \mu_1} \dots h_{v_q \mu_q}. \quad (6.18)$$

Благодаря антикоммутативности h^a , (6.18) автоматически обладает симметрией \mathbf{X} .

Несмотря на то что связность $\omega_q^{\mathbf{X}}$ раскладывается на большое число неприводимых компонент, все физически значимые поля получаются посредством следующей леммы

Лемма (В). Пусть дана форма (6.15) и её касательная версия (6.16), тогда касательный тензор

$$B^{a_1(k_1+1), \dots, a_q(k_q+1), b(k_{q+1}), \dots, u(k_n)} = \omega^{a_1(k_1), \dots, a_q(k_q), b(k_{q+1}), \dots, u(k_n) | a_1 \dots a_q} \quad (6.19)$$

имеет симметрию \mathbf{Z} , т.е. юнговские симметризаторы тривиализуются в данном случае. Однако, B^{\dots} не неприводим в смысле следовых условий, которые наследуются из неприводимости (6.15) и имеют вид

$$\eta_{cc} \eta_{cc} B^{a_1(k_1+1), \dots, cccca_i(k_i-4), \dots, a_q(k_q+1), b(k_{q+1}), \dots, u(k_n)} \equiv 0, \quad i = 1 \dots q \quad (6.20)$$

$$\eta_{cc} B^{a_1(k_1+1), \dots, a_q(k_q+1), b(k_{q+1}), \dots, ccf(k_j-2), \dots, u(k_n)} \equiv 0, \quad j = q + 1 \dots n \quad (6.21)$$

Следовательно, поле B^{\dots} удовлетворяет следовым условиям Фронсдала-Лабастиды по индексам из первых q групп и полностью бесследово по индексам из оставшихся групп. Таким образом, следовые условия вроде условий Лабастиды и Фронсдала

возникают естественным образом из реперной формулировки в терминах связностей алгебры Лоренца [40], {1}.

Неприводимая компонента B^{\dots} максимального ранга, т.е. имеющая симметрию \mathbf{Z} , (так называемая компонента старшего веса, см. раздел 6.3.4, в (6.17)) будет представлять наибольший интерес, поскольку именно так появятся поле $\phi^{\mathbf{S}_0}$ с калибровочными параметрами $\xi^{\mathbf{S}_1}, \dots, \xi^{\mathbf{S}_q}$, см. (1.32).

6.3 σ_- -КОГОМОЛОГИИ

Цель данного раздела состоит в полном исследовании оператора σ_- , появляющегося при интерпретации обобщённых полей Янга-Миллса в терминах обычных метрических полей. Дадётся точное определение для реализации σ_- и соответствующего комплекса $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$, возникающего из $(A)dS_d$ -ковариантной производной. Показывается, что в некоторых простых случаях, когда следовые условия неприводимости полностью ослабляются и тогда система не содержит полевых уравнений, данный оператор известен в математической литературе, тогда как в общем случае σ_- , по видимому, не рассматривался. Основным результатом раздела состоит в вычислении σ_- -когомологий для $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$.

6.3.1 Реализация σ_- для обобщённых связностей алгебры (анти)-де Ситтера

Комплекс $\mathcal{C}(\mathbf{A}, D_\Omega)$. Пусть дана плоская связность Ω алгебры (анти)-де Ситтера \mathfrak{g} , $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(d, 1)$ (алгебра де Ситтера) и $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(d - 1, 2)$ (алгебра анти-де Ситтера). Пусть также дано некоторое представление \mathbf{A} алгебры \mathfrak{g} , которое мы будем считать неприводимым. Тогда естественным образом возникает комплекс $\mathcal{C}(\mathbf{A}, D_\Omega)$, отвечающий калибровочному модулю некоторой развёрнутой системы,

$$\mathcal{W}_0^{\mathbf{A}} \xrightarrow{D_\Omega} \dots \xrightarrow{D_\Omega} \mathcal{W}_{q-1}^{\mathbf{A}} \xrightarrow{D_\Omega} \mathcal{W}_q^{\mathbf{A}} \xrightarrow{D_\Omega} \mathcal{W}_{q+1}^{\mathbf{A}} \xrightarrow{D_\Omega} \dots, \quad (6.22)$$

где $\mathcal{W}_i^{\mathbf{A}}$ есть пространство форм степени i со значениями в \mathbf{A} . Из условия плоской связности следует, что ковариантная производная $D_\Omega = d + \Omega$ является нильпотентным оператором $D_\Omega^2 = 0$. Комплекс обрывается, когда i в $\mathcal{W}_i^{\mathbf{A}}$ достигает размерности пространства $(A)dS_d$. Комплекс $\mathcal{C}(\mathbf{A}, D_\Omega)$ представляет собой реализацию $\mathcal{C}(\mathcal{W}^{\text{gauge}}, \mathcal{D})$ с $\mathcal{D} = D_\Omega$, (2.31).

Согласно (2.23) D_Ω имеет следующее разложение

$$\Omega^{A,B} = \Omega_L^{A,B} + \nabla_-^{A,B} - \nabla_+^{A,B}, \quad \nabla_-^{A,B} = \pm \lambda V^A E^B, \quad \nabla_+^{A,B} = \pm \lambda E^A V^B. \quad (6.23)$$

Общее определение σ_- . Предположим, что даны некоторая алгебра Ли \mathfrak{g} , её представление \mathbf{A} и коммутативная подалгебра⁶ $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$. Существует хорошо известное

⁶Общее определение (ко)гомологий алгебры Ли, конечно, не требует коммутативности.

определение⁷ (ко)гомологий алгебры \mathfrak{f} с коэффициентами в \mathfrak{g} -модуле \mathbf{A} .

$$\partial(a \otimes u_1 \wedge \dots \wedge u_q) = \sum_{i=1}^{i=q} (-)^{i+1} u_i(a) \otimes u_1 \wedge \dots \wedge \hat{u}_i \wedge \dots \wedge u_q, \quad a \in \mathbf{A}, u_i \in \mathfrak{f}, \quad (6.24)$$

где $u_i(a)$ обозначает действие элемента $u_i \in \mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$ на векторе a из \mathbf{A} .

Данное определение, точнее дуальное к нему, приводит в точности к σ_- -когомологиям, если мы ограничиваемся рассмотрением только примарных компонент, т.е. технически работаем с тензорами $\mathfrak{sl}(d)$. В этом случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(d+1)$, тогда \mathfrak{f} в некотором базисе отождествляется с подалгеброй матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathfrak{f} \\ \hline * & \mathfrak{h} \end{array} \right) \quad (6.25)$$

Если мы перейдем к ортогональным алгебрам, т.е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(d+1)$, подалгебра Лоренца $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(d)$, то \mathfrak{f} как векторное пространство представляется антисимметричными матрицами, у которых все элементы, кроме первой строки и первого столбца, равны нулю

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & u \\ \hline -u & \mathfrak{h} \end{array} \right), \quad u \in \mathfrak{f}. \quad (6.26)$$

В случае алгебры (анти)-де Ситтера \mathfrak{f} есть не что иное как генераторы трансляции. Однако, \mathfrak{f} не является подалгеброй, поэтому классическое определение (ко)гомологий неприменимо.

Пусть снова дана некоторая алгебра Ли \mathfrak{g} , её модуль \mathbf{A} , а также некоторая подалгебра $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$, которая в будущем будет отождествлена с подалгеброй Лоренца. Существует каноническое разложение \mathfrak{g} как векторного пространства $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}$ на неприводимые представления \mathfrak{g}_{α} подалгебры \mathfrak{g}_0 .

При ограничении на подалгебру \mathfrak{g}_0 , \mathbf{A} раскладывается на прямую сумму \mathfrak{g}_0 -модулей \mathbf{A}_k

$$\text{Res}_{\mathfrak{g}_0}^{\mathfrak{g}} \mathbf{A} = \bigoplus_k \mathbf{A}_k. \quad (6.27)$$

В отличие от \mathfrak{g}_0 , действующей диагонально, т.е. $\mathfrak{g}_0(\mathbf{A}_k) \subset \mathbf{A}_k$, действие \mathfrak{g}_{α} будет отображать \mathbf{A}_k в какие-то другие \mathbf{A}_i . Важно, что морфизм $\rho_{\alpha} : \mathfrak{g}_{\alpha} \otimes \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, определяемый как $u \otimes a \rightarrow u(a)$, $u \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, $a \in \mathbf{A}$, является морфизмом двух \mathfrak{g}_0 -модулей.

Определение (6.24) опиралось на то, что \mathfrak{f} есть коммутативная подалгебра. Хотя это не так в нашем случае, тем не менее мы можем построить некоторые коммутирующие операторы, действующие уже в представлении. Для этого нам необходимо, чтобы действие \mathfrak{g}_{α} на \mathbf{A} было \mathbb{Z} -градуировано.

⁷Автор признателен Е.Фейгину за многочисленные обсуждения когомологий алгебр Ли, которые привели к более точному пониманию σ_- , и за ссылку [202].

Определим другое разложение $\mathbf{A} = \bigoplus_g \mathbf{A}_g$ \mathfrak{g} -модуля \mathbf{A} на, вообще говоря, неприводимые \mathfrak{g}_0 -модули, так что

$$\mathbf{A}_g = \bigoplus_{k: |\mathbf{A}_k|=g} \mathbf{A}_k \quad (6.28)$$

есть прямая сумма \mathbf{A}_k имеющих одинаковый ранг g ($|\mathbf{A}_k|$ обозначает ранг \mathbf{A}_k). Заметим, что понятие ранга представления определено, вообще говоря, для классических алгебр Ли.

Тензорное произведение $\mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathbf{A}$ двух \mathfrak{g}_0 -модулей может быть явно вычислено, причём ввиду общих свойств тензорного произведения $\mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathbf{A}_g$ может раскладываться на представления рангов от $|g - |\mathfrak{g}_\alpha||$ до $g + |\mathfrak{g}_\alpha|$. Поэтому ранг представления даёт естественную \mathbb{Z} -градуировку на \mathbf{A} , а действие \mathfrak{g}_α на \mathbf{A} также имеет разложение по градуировке. Обозначим операторы, реализующие представление \mathfrak{g} на \mathbf{A} , через $\vartheta_{\mathfrak{g}}$. Тогда $\vartheta_{\mathfrak{g}_0}$ по определению имеет единственную компоненту с нулевой градуировкой.

Далее предположим, что среди всех \mathfrak{g}_α существует то \mathfrak{g}_{\min} , в разложении $\vartheta_{\mathfrak{g}_{\min}}(\mathbf{A}_g)$ которого по градуировке имеется нетривиальная компонента с минимальной градуировкой (меньшей нуля), скажем $\vartheta_{\mathfrak{g}_{\min}}(\mathbf{A}_g)$ имеет компоненту в \mathbf{A}_{g-n} для некоторого $n > 0$, и это n максимально по всем \mathfrak{g}_α . Обозначим эту часть с минимальной градуировкой в разложении оператора $\vartheta_{\mathfrak{g}_{\min}}$ через $\vartheta_{\mathfrak{g}_{\min}}^{-n}$.

Из определения представления получаем

$$[\vartheta_x, \vartheta_y] = \vartheta_{[x,y]}, \quad x, y \in \mathfrak{g} \quad \implies \quad [\vartheta_{x'}^{-n}, \vartheta_{y'}^{-n}] = 0, \quad x', y' \in \mathfrak{g}_{\min}, \quad (6.29)$$

что $\vartheta_{\mathfrak{g}_{\min}}^{-n}$ - коммутирующие операторы.

Таким образом, имея на представлении \mathbb{Z} -градуированное разложение действия некоторой алгебры Ли можно выделить коммутирующие операторы, отвечающие минимальной (или максимальной) градуировке. Несмотря на то что \mathfrak{g}_{\min} не образует подалгебру, операторы $\vartheta_{\mathfrak{g}_{\min}}^{-n}$ образуют коммутативную подалгебру.

Комплекс определяется стандартным образом⁸:

$$\partial : \mathbf{A} \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_{\min}), \quad \partial : \mathbf{A}_g \otimes \Lambda^q(\mathfrak{g}_{\min}) \longrightarrow \mathbf{A}_{g-n} \otimes \Lambda^{q-1}(\mathfrak{g}_{\min}), \quad (6.30)$$

$$\partial(a \otimes u_1 \wedge \dots \wedge u_q) = \sum_{i=1}^{i=q} (-)^{i+1} \vartheta_{u_i}^{-n}(a) \otimes u_1 \wedge \dots \wedge \hat{u}_i \wedge \dots \wedge u_q, \quad a \in \mathbf{A}, u_i \in \mathfrak{g}_{\min}. \quad (6.31)$$

Для пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0) = (\mathfrak{sl}(d+1), \mathfrak{sl}(d))$, где \mathfrak{g}_α есть векторное, ковекторное и скалярное представления \mathfrak{g}_0 , определение $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \partial)$ совпадает с (6.24), поскольку каждое \mathfrak{g}_α уже образует коммутативную подалгебру \mathfrak{g} . Для нас будет интересен случай $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0) = (\mathfrak{so}(d+1), \mathfrak{so}(d))$, в котором \mathfrak{g}_α есть векторное представление \mathfrak{g}_0 . Ещё один пример даётся парой $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(d)$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(d)$, в данном случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \square$. Разложение \mathbf{A} на неприводимые представления \mathfrak{g}_0 оказывается разложением по следам.

Ниже будет изучаться комплекс $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ дуальный $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \partial)$. Наиболее важным при вычислении (ко)гомологий будет тот факт, что как следствие

$$[\vartheta_w, \vartheta_u^{-n}] = \vartheta_{[w,u]}^{-n}, \quad [w, u] \in \mathfrak{g}_{\min}, \quad w \in \mathfrak{g}_0, \quad u \in \mathfrak{g}_{\min} \quad (6.32)$$

⁸ Данное определение, по-видимому, не встречается в математической литературе, поэтому мы не можем воспользоваться результатами, например, [202], как в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(d+1)$ и следовательно σ_- -комплекс представляет собой нечто новое сам по себе.

дифференциал ∂ (и σ_-) коммутирует с действием \mathfrak{g}_0 . Поэтому \mathfrak{g}_0 действует и на (ко)гомологиях, а следовательно элементы групп (ко)гомологий удобно нумеровать весами неприводимых представлений \mathfrak{g}_0 , т.е. диаграммами Юнга.

Специализация σ_- для $(\mathbf{A})dS_d$. σ_- -комплекс $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ появляется из комплекса $\mathcal{C}(\mathbf{A}, D_\Omega)$ при нарушении локальной калибровочной симметрии с алгеброй (анти)-де Ситтера до алгебры Лоренца путём введения поля компенсатора. Но на самом деле, как мы увидим, от $\mathcal{C}(\mathbf{A}, D_\Omega)$ требуется очень мало информации для построения $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ — фактически это только \mathfrak{g} -модуль \mathbf{A} , а также невырожденность D_Ω , приводящая к хорошо определённой фоновой тетраде h^a .

Алгебра (анти)-де Ситтера \mathfrak{g} как векторное пространство имеет разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, где \mathfrak{h} есть подалгебра Лоренца $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ и \mathfrak{p} есть векторное представление \mathfrak{h} , а именно \mathfrak{p} есть линейная оболочка генераторов трансляций P_a . Из разложения $\Omega = \Omega_L + \nabla_- \nabla_+$ (6.23) связности Ω алгебры \mathfrak{g} следует, что $\nabla_- - \nabla_+$ есть часть, ассоциированная с генераторами трансляции, причём ∇_- и ∇_+ как раз и представляют собой градуированное разложение $\vartheta_{\mathfrak{p}}$. Действительно, поскольку \mathfrak{p} есть векторное представление, то $\mathfrak{p} \otimes \mathbf{A}_g$ отображается в \mathbf{A}_{g-1} и \mathbf{A}_{g+1} . Поэтому действие операторов трансляции, которые не замыкают некоторую подалгебру, можно «расщепить» на две части, каждая из которых уже образует коммутативную подалгебру операторов на \mathbf{A} . Заметим, что хотя каждый из операторов ∇_- , ∇_+ и порождён действием элементов алгебры, оператором в представлении будет только их сумма $\nabla_- - \nabla_+$.

q -коцепь определяется следующим образом: $C^q(\mathbf{A}) = \bigoplus_g C_g^q(\mathbf{A})$, где $C_g^q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_g \otimes \Lambda^q(\mathfrak{p})$. Обозначение $\Lambda^q(\mathfrak{p})$ понимается как внешняя степень \mathfrak{p} как векторного пространства. Тогда ∇_\pm индуцируют два нильпотентных оператора σ_\pm

$$\sigma_\pm : C_g^q(\mathbf{A}) \longrightarrow C_{g\pm 1}^{q+1}(\mathbf{A}). \quad (6.33)$$

В терминах тензоров мы рассматриваем $\mathcal{W}_q^{\mathbf{A}}$ как набор связностей алгебры Лоренца и с помощью фоновой тетрады преобразуем все индексы формы в касательные индексы, после чего алгебра Лоренца \mathfrak{h} начинает также действовать на «индексах форм».

В качестве оператора, классифицирующего динамически значимые величины, мы выберем σ_- , а не σ_+ , поскольку он понижает градуировку по тензорному рангу и поэтому, отвечая за выражение полей с большим рангом через производные полей с меньшим рангом, должен соответствовать фундаментальному описанию в терминах потенциалов, поскольку потенциал поля есть тензор наименьшего ранга, позволяющий описывать данное поле.

Всё пространство $\mathbf{A} \otimes \Lambda^q(\mathfrak{p})$ удобно рассматривать как \mathfrak{h} -модуль с действием на $\Lambda^q(\mathfrak{p})$ как на антисимметричных тензорах. Как уже отмечалось, \mathfrak{h} тогда коммутирует с действием σ_- и σ_+ , поэтому σ_- -когомологии параметризуются весами (диаграммами Юнга) \mathfrak{h} -модулей, а также степенью q и градуировкой g .

Элементом $C_g^q(\mathbf{A})$ является некоторая внешняя форма $\omega_q^{\mathbf{X}}$ степени q со значениями в, вообще говоря, приводимом \mathfrak{h} -модуле \mathbf{X} из \mathbf{A}_g . Как тотальный \mathfrak{h} -модуль $\omega_q^{\mathbf{X}}$, т.е. включая внешние формы, может быть разложена согласно правилам тензорного

произведения представлений, см. раздел С.5, на неприводимые \mathfrak{h} -модули,

$$C_g^q = \mathbf{A}_g \otimes_{\mathfrak{h}} \mathbb{Y}[q] = \bigoplus_{r=0}^{r=q} \bigoplus_{i_r} M_{r,i_r}^{g,q} \mathbf{X}_{r,i_r}^{g,q}, \quad (6.34)$$

где сумма берётся по следам i_r ранга r и $M_{r,i_r}^{g,q}$ есть кратность $\mathbf{X}_{r,i_r}^{g,q}$.

σ_- сохраняет две естественные градуировки: (1) суммарный ранг тензора, на который он действует, т.е. g плюс степень формы q ; (2) порядок следа. Тот факт, что σ_- коммутирует с действием \mathfrak{h} , означает, что σ_- сохраняет структуру \mathfrak{h} -модулей, т.е. σ_- может действовать только между изоморфными представлениями, определяющимися одной и той же диаграммой Юнга.

Учитывая вышесказанное, комплекс $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ распадается на прямую сумму комплексов

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-) = \bigoplus_{q+g} \bigoplus_r \bigoplus_{\mathbf{X}} \mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-; \mathbf{X}, q+g, r), \quad (6.35)$$

где каждый подкомплекс однозначно параметризуется некоторой диаграммой \mathbf{X} , принадлежащей как след ранга r для некоторых q, g произведению $\mathbf{A}_g \otimes \mathbb{Y}[q]$. При ограничении на $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-; \mathbf{X}, q+g, r)$, комплекс в каждой степени состоит из $M_{r,i_r}^{g,q}$ копий представления \mathbf{X} , а σ_- сводится к набору матриц $M_{r,i_r}^{g,q} \times M_{r,i_r}^{g-1,q+1}$, осуществляющих отображения $\mathbb{R}^{M_{r,i_r}^{g,q}} \otimes \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^{M_{r,i_r}^{g-1,q+1}} \otimes \mathbf{X}$.

Окажется, что комплекс $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ имеет много нетривиальных когомологий в отличие от, например, комплекса де Рама. Причём только те подкомплексы $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-; \mathbf{Y}, q+g, r)$ имеют нетривиальные когомологии, для которых диаграмма \mathbf{X} возникает как наиболее симметричная часть тензорного произведения $\mathbf{A}_g \otimes \mathbb{Y}[q]$, точное определение будет дано ниже. Размерность групп когомологий $\dim \mathbf{H}(\mathbf{A}, \sigma_-; \mathbf{X}, q+g, r)$ есть либо ноль, либо один, когда \mathbf{X} максимально симметричен, т.е. в последнем случае из всех \mathfrak{h} -модулей, изоморфных \mathbf{X} , только один может представлять нетривиальный класс когомологий $\mathbf{H}(\mathbf{A}, \sigma_-; \mathbf{X}, q+g, r)$. Физически это значит, что, рассматривая возможность откалибровать компоненты полей с симметрией \mathbf{X} в цепочке приводимых алгебраических симметрий вида

$$\dots \xrightarrow{\sigma_-} w_{q-1}^{\mathbf{A}_{g+1}} \xrightarrow{\sigma_-} w_q^{\mathbf{A}_g} \xrightarrow{\sigma_-} w_{q+1}^{\mathbf{A}_{g-1}} \xrightarrow{\sigma_-} \dots, \quad (6.36)$$

мы обнаружим, что они почти всегда все могут быть откалиброваны и иногда, когда \mathbf{X} является наиболее симметричной, среди всех полей с симметрией \mathbf{X} одно остаётся динамическим. С теоретико-полевой точки зрения этот результат почти очевиден, так, например, теория, у которой в подкомплексе $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-; \mathbf{Y}, q+g, r)$ были бы нетривиальные когомологии в разных степенях, имела бы и динамическое поле, и дифференциальный калибровочный параметр одного типа симметрии, что явно не соответствует нашим знаниям о полях в пространствах (анти)-де Ситтера и Минковского.

Таким образом, мы определили комплекс $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ для любого \mathfrak{g} -модуля \mathbf{A} . Рассмотрим теперь простейшие реализации этого комплекса в терминах полей.

6.3.2 Два примера

Простейшая модель для σ_- , $\mathfrak{sl}(d+1)$. Рассмотрим простейший случай, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(d+1)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(d)$, т.е. мы рассматриваем лишь примарные компоненты, отвлекаясь от структуры следов и $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s)$.

Редукция поля $W_q^{A(s)}$ к подалгебре $\mathfrak{sl}(d)$ приводит к набору симметричных полей всех рангов от 0 до s

$$W_q^{A(s)} \iff \omega_q^{a(k)}, \quad k = 0, \dots, s, \quad (6.37)$$

Поскольку нет никаких следовых условий, поля $W_q^{a(k)\bullet(s-k)}$ прямо отождествляются с неприводимыми $\mathfrak{sl}(d)$ -полями $\omega_q^{a(k)}$

$$\omega_q^{a(k)} = W_q^{a(k)\bullet(s-k)}, \quad k = 0, \dots, s. \quad (6.38)$$

Операторы ∇_- и ∇_+ действуют следующим образом:

$$\sigma_- (\omega_q^{a(k+1)}) = h_m \omega_q^{a(k)m}, \quad (6.39)$$

$$\sigma_+ (\omega_q^{a(k+1)}) = \tilde{f}_k h^a \omega_q^{a(k-1)}, \quad (6.40)$$

где $\tilde{f}_k = (s - k - 1)k$. Нильпотентность σ_{\pm} очевидна в силу $h^a h^b + h^b h^a \equiv 0$.

Простая модель для σ_- , $\mathfrak{so}(d+1)$. Другой, чуть более сложный случай, отвечающий частично-безмассовым полям серии $(\mathbb{Y}(s), q = 1, t = s)$ получается, если \mathfrak{g} есть алгебра (анти)-де Ситтера, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(d-1, 1)$, а $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s)$ опять неприводимое представление на симметричных тензорах ранга- s . Действие оператора D_{Ω} на поле $W_q^{\mathbf{A}}$ имеет вид

$$D_{\Omega} W_q^{A(s)} = D W_q^{A(s)} + s \lambda V^A E_M W_q^{A(s-1)M} - s \lambda E^A V_M W_q^{A(s-1)M}, \quad (6.41)$$

где мы выбрали знаки для случая пространства анти-де Ситтера. В результате редукции к подалгебре Лоренца поле $W_q^{A(s)}$ раскладывается на бесследовые симметричные по касательным индексам поля рангов от 0 до s

$$W_q^{A(s)} \iff \omega_q^{a(k)}, \quad k = 0, \dots, s, \quad (6.42)$$

В стандартной калибровке (2.21) для компенсатора V^A поле $\omega_q^{a(k)}$ отождествляется с бесследовой частью $W_q^{a(k)\bullet(s-k)}$. Отметим, что свёртка двух индексов у $W_q^{a(k)\bullet(s-k)}$ метрикой η_{ab} вовсе не равна нулю

$$\eta_{bb} W_q^{a(k-2)bb\bullet(s-k)} = W_q^{a(k-2)\bullet(s-k+2)}. \quad (6.43)$$

В терминах приводимых полей $W_q^{a(k)\bullet(s-k)}$ (6.41) переписывается

$$D_{\Omega} W_q^{a(k)\bullet(s-k)} = D W_q^{a(k)\bullet(s-k)} + (s - k) \lambda h_m W_q^{a(k)m\bullet(s-k-1)} - k \lambda h^a W_q^{a(k-1)\bullet(s-k+1)},$$

где были использованы $E^a = h^a$, $E^{\bullet} = 0$, $V^a = 0$, $V^{\bullet} = 1$. Далее, перепишем всё в неприводимых компонентах $\omega_q^{a(k)}$

$$D_{\Omega} \omega_q^{a(k)} = D \omega_q^{a(k)} + \lambda h_m \omega_q^{a(k)m} + \lambda f_k \left(h^a \omega_q^{a(k-1)} - \frac{(k-1)}{d+2k-4} \eta^{aa} h_m \omega_q^{a(k-2)m} \right),$$

где поля были растянуты для того, чтобы избавиться от некоторых факторов, $f_k = \frac{k(s-k-1)(d+s+k-2)}{d+2k-2}$. Действие операторов ∇_- и ∇_+ на неприводимых полях имеет вид

$$\sigma_- (\omega_{\mathbf{q}}^{a(k+1)}) = h_m \omega_{\mathbf{q}}^{a(k)m}, \quad (6.44)$$

$$\sigma_+ (\omega_{\mathbf{q}}^{a(k-1)}) = f_k \left(h^a \omega_{\mathbf{q}}^{a(k-1)} - \frac{(k-1)}{d+2k-4} \eta^{aa} h_m \omega_{\mathbf{q}}^{a(k-2)m} \right). \quad (6.45)$$

Нильпотентность σ_- — очевидна, убедиться в нильпотентности σ_+ можно простыми вычислениями.

6.3.3 Максимально симметричные элементы $\text{Res}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} \mathbf{X}$

Рассмотрим некоторое представление $\mathbf{X} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$ алгебры \mathfrak{g} и его ограничение на подалгебру \mathfrak{h} , см. 6.2.1.

Среди модулей $\mathbf{X}_{\{k_1, \dots, k_N\}}$, на которые редуцируется \mathbf{X} , есть элементы \mathbf{X}^m , у которых первые $(m-1)$ рядов k_1, \dots, k_{m-1} имеют максимальную длину, а остальные ряды k_m, \dots, k_n имеют минимальную длину. Назовём такие элементы \mathbf{X}^m максимально симметричными

$$\mathbf{X}^m = \begin{cases} \mathbb{Y}(s_1, \dots, \widehat{s_m}, \dots, s_n), & m = 1, \dots, n, \\ \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n), & m > n, \end{cases} \quad (6.46)$$

как видно, \mathbf{X}^k имеет такой вид, как если бы k -й ряд был бы просто пропущен. Градуировка максимально симметричных элементов \mathbf{X}^k равна

$$g(\mathbf{X}^k) = \begin{cases} s_1 - s_{k+1}, & 1 \leq k \leq n, \\ s_1, & k > n \end{cases} \quad (6.47)$$

Именно связности алгебры Лоренца со значениями в максимально симметричных элементах \mathbf{X}^k будут отвечать физическим полям и калибровочным параметрам.

6.3.4 Выделенные части тензорного произведения

Компонента старшего веса тензорных произведений. Пусть $\mathbf{X} = \mathbb{Y}(s_1^x, \dots, s_n^x)$ и $\mathbf{Y} = \mathbb{Y}(s_1^y, \dots, s_n^y)$ есть две диаграммы, определяющие неприводимые представления $\mathfrak{sl}(d)$ или $\mathfrak{so}(d)$.

Несмотря на то, что разложить тензорное произведение $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ в прямую сумму неприводимых представлений в общем случае является трудной задачей, в $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ всегда присутствует с кратностью один неприводимое представление с диаграммой

$$\mathbf{Z} = \mathbb{Y}(s_1^x + s_1^y, \dots, s_n^x + s_n^y),$$

получаемое просто сложением весов, т.е. рядов в диаграммах Юнга. \mathbf{Z} называется компонентой старшего веса (highest weight part). Для нас представляют интерес ситуации, когда $\mathbf{Y} = \mathbb{Y}[q]$, тогда для компоненты старшего веса $\mathbf{X} \otimes \mathbb{Y}[q]$ мы вводим

следующее обозначение

$$\text{hwp}(\mathbf{X}, q) = \begin{cases} \mathbb{Y}(s_1^x + 1, \dots, s_q^x + 1, s_{q+1}^x, \dots, s_n^x), & q < n, \\ \mathbb{Y}(s_1^x + 1, \dots, s_n^x + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-n}), & q \geq n. \end{cases} \quad (6.48)$$

Данное определение имеет смысл для $\mathfrak{sl}(d)$ и $\mathfrak{so}(d)$.

Замечание о тензорных произведениях. Отличие между тензорными произведениями представлений алгебр $\mathfrak{sl}(d)$ и $\mathfrak{so}(d)$ состоит в том, что в последнем случае имеется инвариантный тензор η_{ab} , с помощью которого можно сворачивать индексы. Поэтому, правила тензорного произведения представлений $\mathfrak{so}(d)$ для $\mathbf{X} \otimes_{\mathfrak{so}(d)} \mathbf{Y}$ заключаются сначала во взятии всевозможных следов, т.е. свёртке некоторого числа пар индексов у тензоров, отвечающих \mathbf{X} и \mathbf{Y} (один от \mathbf{X} другой у \mathbf{Y}), и затем перемножении того, что осталось после свёртки от \mathbf{Y} и \mathbf{X} . Точные правила могут быть найдены, например, в [203].

В общем случае тензорное произведение двух $\mathfrak{so}(d)$ -модулей раскладывается на сумму неприводимых представлений, кратность которых может быть больше единицы, поскольку одна и та же диаграмма может быть получена удалением и затем добавлением клеток к разным частям.

Пусть \mathbf{Z} есть какой-нибудь элемент $\mathbf{X} \otimes_{\mathfrak{so}(d)} \mathbf{Y}$. Тогда число клеток, удалённых от \mathbf{X} (или \mathbf{Y}) в процессе вычисления компоненты \mathbf{Z} , называется порядком следа \mathbf{Z} . Удобно различать следы разных порядков, для чего ниже вводится параметр r .

Максимально симметричная часть тензорного произведения. В случае $\mathfrak{sl}(d)$ компонента старшего веса будет также называться максимально симметричной частью (maximally symmetric part). Однако для $\mathfrak{so}(d)$ две конструкции будут различаться.

В случае $\mathfrak{so}(d)$: пусть даны два неприводимых $\mathfrak{so}(d)$ -модуля \mathbf{X} и \mathbf{Y} , тогда максимально симметричная часть $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ с рангом следа r , $\text{msp}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, r)$, определяется как сумма вида $\bigoplus_{\alpha} \text{hwp}(\mathbf{X}_{\alpha}^r, \mathbf{Y}_{\alpha}^r)$, где диаграммы \mathbf{X}_{α}^r и \mathbf{Y}_{α}^r получаются из \mathbf{X} и \mathbf{Y} взятием всех возможных следов ранга r , т.е. каждая из диаграмм \mathbf{X}_{α}^r и \mathbf{Y}_{α}^r имеет на r клеток меньше, чем \mathbf{X} и \mathbf{Y} соответственно. Индекс α нумерует все неэквивалентные следы ранга r .

Таким образом, максимально симметричная часть $\mathbf{X} \otimes_{\mathfrak{so}(d)} \mathbf{Y}$ получается сначала взятием всех возможных следов, а затем добавлением оставшихся клеток согласно hwp-правилу. В терминах диаграмм Юнга имеем $\text{hwp}^{\mathfrak{sl}(d)} \equiv \text{msp}^{\mathfrak{sl}(d)} \equiv \text{hwp}^{\mathfrak{so}(d)}$ и $\text{hwp}^{\mathfrak{so}(d)} \subset \text{msp}^{\mathfrak{so}(d)}$.

В отличие от случая $\mathfrak{sl}(d)$, максимально симметричная часть тензорных произведений $\mathfrak{so}(d)$ -представлений может содержать много представлений, но каждое из них входит с кратностью один.

В данном разделе второй сомножитель в тензорном произведении всегда представлен диаграммой из одного столбца, т.е. $\mathbf{Y} = \mathbb{Y}[q]$. Пусть дана $\mathfrak{so}(d)$ -диаграмма $\mathbf{X} = \mathbb{Y}\{(s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N)\}$ (блочные обозначения более удобны) и два целых числа q ,

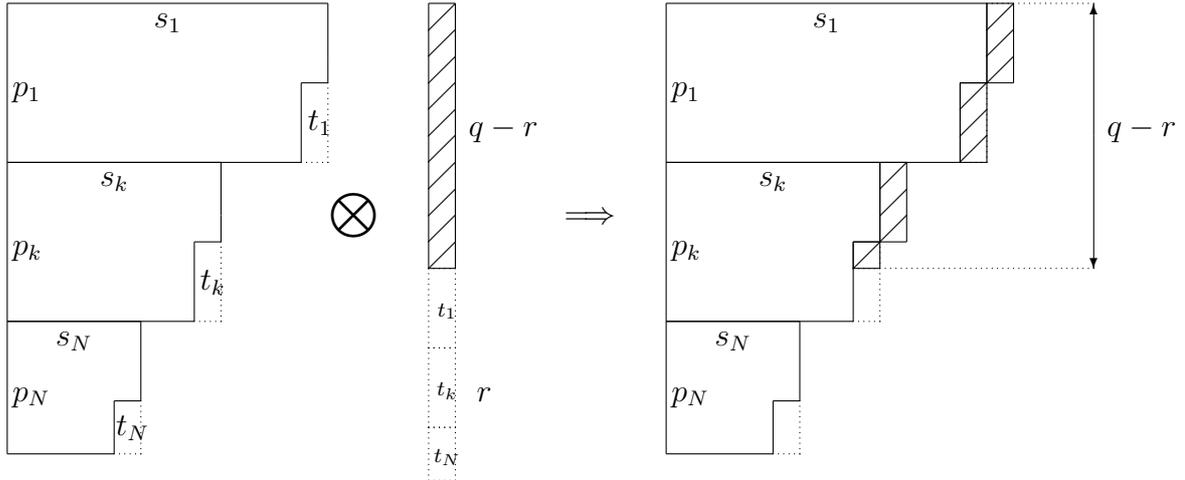


Рис. 6.1: Получение максимально симметричной части $\text{msp}^{\mathfrak{so}(d)}(\mathbf{X}, q, r)$ $\mathfrak{so}(d)$ -тензорного произведения $\mathbf{X} \otimes_{\mathfrak{so}(d)} \mathbb{Y}[q]$ для $\mathbf{X} = \mathbb{Y}\{(s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N)\}$. С учётом того, что после взятия следа должна снова получаться диаграмма Юнга, параметризация следов ранга r сводится к набору t_i , $t_i \leq p_i$ и таких, что $t_1 + \dots + t_N = r$. Подколонка высоты t_i отрезается справа-снизу от i -го блока. Затем оставшиеся клетки приписываются к первым рядам. Если $r = 0$, то получается случай $\mathfrak{sl}(d)$, для которого $\text{hwp}(\mathbf{X}, q) \equiv \text{msp}(\mathbf{X}, q)$.

r такие, что $q \geq r$. Тогда максимально симметричная часть $\mathbf{X} \otimes_{\mathfrak{so}(d)} \mathbb{Y}[q]$ с рангом следа r обозначается $\text{msp}^{\mathfrak{so}(d)}(\mathbf{X}, q, r)$. Процесс взятия msp проиллюстрирован на рис. 6.1. Очевидно, что различные разбиения r приводят к различным элементам msp . Сумма по следам всех порядков обозначается $\text{msp}(\mathbf{X}, q)$, $\text{msp}(\mathbf{X}, q) = \sum_r \text{msp}(\mathbf{X}, q, r)$.

6.3.5 $\text{Res}_\mathfrak{h}^g$ и hwp , msp

Поскольку модули алгебры Лоренца, нумерующие подкомплексы $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-; \mathbf{X}, q+g, r)$, (6.35), возникают в результате тензорного произведения модулей из ограничения \mathbf{A} на алгебру Лоренца с диаграммами, состоящими из одной колонки, и отвечают наиболее симметричным частям таких тензорных произведений, для наиболее компактной формулировки результата нам понадобится объект, сочетающий в себе и ограничение представлений, и тензорное произведение.

Вводимые ниже определения могут быть записаны более строгим образом через действие некоторых специальных элементов группы Вейля соответствующей алгебры Ли на старший вес представления, но это менее наглядно, чем использование языка диаграмм Юнга.

$\mathfrak{sl}(d+1)$. Для неприводимого представления $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$ алгебры $\mathfrak{sl}(d+1)$ и степени формы q определим $\text{mspr}^{\mathfrak{sl}(d)}(\mathbf{A}, q)$ как элемент из $\text{Res}_{\mathfrak{sl}(d)}^{\mathfrak{sl}(d+1)} \mathbf{A} \otimes \mathbb{Y}[q]$ вида

$$\text{mspr}^{\mathfrak{sl}(d)}(\mathbf{A}, q) = \mathbb{Y}(s_1 + 1, \dots, s_q + 1, \widehat{s_{q+1}}, s_{q+2}, \dots, s_n), \quad (6.49)$$

т.е. по одной клетке добавляется справа к каждому из рядов $1, \dots, q$, а $(q+1)$ -ый вес пропускается. Таким образом, учитывая определение раздела 6.3.3 для \mathbf{A}^{q+1} ,

$$\text{mspr}^{s(d)}(\mathbf{A}, q) \equiv \text{msp}^{s(d)}(\mathbf{A}^{q+1}, q) \equiv \text{hwp}^{s(d)}(\mathbf{A}^{q+1}, q). \quad (6.50)$$

$\mathfrak{so}(d+1)$. Пусть $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$ — диаграмма, определяющая неприводимое представление $\mathfrak{so}(d+1)$, и такая, что все веса s_1, \dots, s_n различны. Тогда $\text{mspr}^{\mathfrak{so}(d)}(\mathbf{A}, q, r)$ определяется как

$$\text{mspr}^{\mathfrak{so}(d)}(\mathbf{A}, q, r) = \text{msp}^{\mathfrak{so}(d)}(\mathbf{A}^{q-r+1}, q, r), \quad (6.51)$$

т.е. $\text{mspr}^{\mathfrak{so}(d)}(\mathbf{A}, q, r)$ есть сумма по всем диаграммам, получаемым из \mathbf{A}^{q-r+1} взятием всевозможных следов порядка r , а затем добавлением по одной клетке справа к рядам $1, \dots, (q-r)$. Последнее просто означает, что берётся максимально симметричная часть тензорного произведения полученных на первом этапе следов с оставшимися $(q-r)$ клетками/индексами форм. Номер выкидываемого веса s_{q-r+1} определяется оставшимися $(q-r)$ клетками.

Если среди весов (s_1, \dots, s_n) некоторые одинаковы, то блочные обозначения более удобны, поэтому принимаем, что $\mathbf{A} = \mathbb{Y}\{(s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N)\}$. Процесс вычисления $\text{mspr}(\mathbf{A}, q, r)$ проиллюстрирован на рис. 6.2. Аналогично случаю, когда все веса в \mathbf{A} различны, сначала необходимо взять всевозможные следы ранга r , а затем оставшиеся клетки, т.е. $(q-r)$, добавляются согласно hwp-правилам. Отличие состоит в том, что некоторые диаграммы должны быть удалены перед вычислением hwp.

Будем называть некоторую клетку в диаграмме \mathbf{A} заполненной вакансией, если она сначала удаляется (в процессе взятия следов), а затем восстанавливается (в процессе добавления клеток в соответствии с hwp-правилами). Пусть k есть номер блока в диаграмме \mathbf{A} , к которому принадлежит $(q-r+1)$ -ая строка. Тогда для получения $\text{mspr}(\mathbf{A}, q, r)$ необходимо вычеркнуть те диаграммы, для которых имеется хотя бы одна заполненная вакансия в k -ом блоке.

Сумма по следам всех порядков $r = 0, 1, \dots, q$ и таким, что $s_{q-r+1} = s_{q+1}$, обозначается $\text{mspr}(\mathbf{A}, q)$. Условие $s_{q-r+1} = s_{q+1}$ означает, что все элементы $\text{mspr}(\mathbf{A}, q)$ были получены из элементов $\mathbf{A}_g \otimes \mathbb{Y}[q]$, для которых g равно градуировке \mathbf{A}^{q+1} . Если все веса (s_1, \dots, s_n) различны, то $\text{mspr}(\mathbf{A}, q) = \text{mspr}(\mathbf{A}, q, r = 0)$ и содержит лишь одну диаграмму.

Следует ещё раз напомнить, что вес $\mathfrak{so}(d+1)$ есть $(s_1, \dots, s_n, 0_{n+1}, \dots, 0_\nu)$, $\nu = [(d+1)/2]$, и если $(q-r) > n$, эти нулевые ряды должны быть добавлены к \mathbf{A} .

дуализация. Для случая $\mathfrak{so}(d+1)$ нам понадобится также отображение дуализации, которое отображает каждый элемент $\text{mspr}(\mathbf{A}, q, r)$ в некоторый другой элемент комплекса $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$, определённый той же диаграммой Юнга. Пусть дан $\mathfrak{so}(d+1)$ -модуль \mathbf{A} и произвольный $\mathfrak{so}(d)$ -модуль \mathbf{X} , являющийся элементом $\text{mspr}(\mathbf{A}, q, r)$ для некоторых q и r . По определению, \mathbf{X} возникает как некоторый след ранга r в разложении $C_{g,r}^q(\mathbf{A})$, (6.34) на неприводимые $\mathfrak{so}(d)$ -модули, где $g = g(\mathbf{A}^{q-r+1})$. Пусть ϵ' определяется для \mathbf{X} в соответствии с рис. 6.2а. При условии, что g не является максимальным значением градуировки, дуальный к \mathbf{X} есть $\mathfrak{so}(d)$ -модуль $\tilde{\mathbf{X}}$, определяемый той же диаграммой \mathbf{X} и являющийся элементом $C_{g+1,r'}^{q'}(\mathbf{A})$, где $q' = q + 2\epsilon' + 1$,

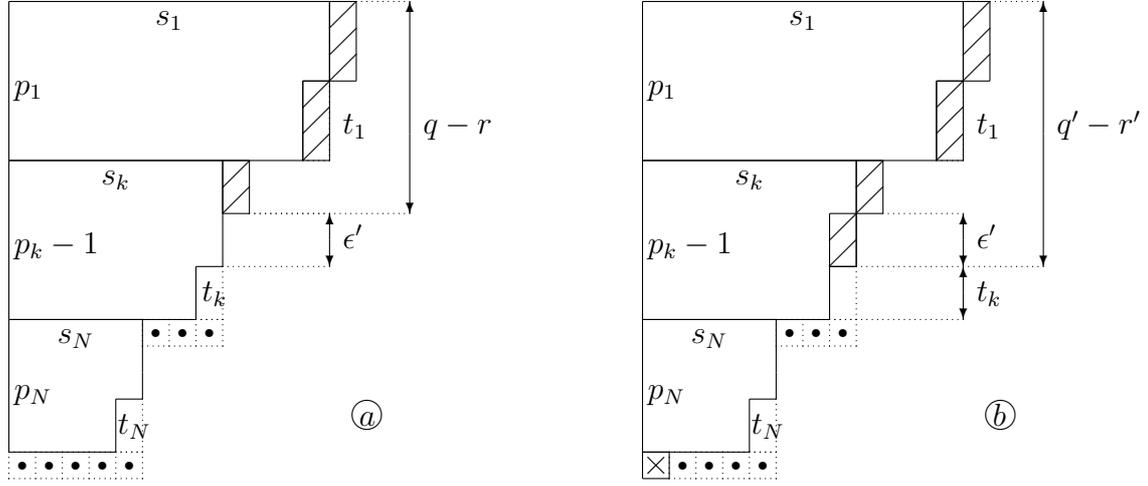


Рис. 6.2: Иллюстрация вычисления $\text{mspr}(\mathbf{A}, q, r)$ для $\mathbf{A} = \mathbb{Y}\{(s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N)\}$. (a) Выкидывание веса s_{q-r+1} , попадающего в k -ый блок, приводит к тому, что блоки $1, \dots, k-1, k+1, \dots, N$ остаются без изменения, а k -ый блок укорачивается на одну строку. На языке тензоров для того, чтобы спроектировать на \mathbf{A}^{q-r+1} , необходимо свернуть компенсаторы V^A с индексами, отвечающими клеткам, обозначенным \bullet , а затем применить проекторы на бесследовую часть и юнговский проектор. Каждый возможный след взаимнооднозначно определяется некоторым разбиением $r = t_1 + \dots + t_N$ таким, что $t_i \leq p_i$ если $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, N$ и $t_k \leq p_k - 1$. В процессе взятия данного следа t_i клеток удаляется снизу-справа от i -го блока. Остальные клетки, обозначенные на рисунке штриховкой, добавляются по одной к первым $q-r$ рядам. Дополнительное условие, возникающее для диаграмм с одинаковыми длинами некоторых строк, заключается в том, что добавляемые на последнем этапе клетки не должны попасть в те же места, откуда t_k клеток были удалены от k -го блока на первом этапе. Поэтому ϵ' всегда должно быть неотрицательным.

(b) Взятие дуальной части. Та же диаграмма может быть получена другим путём. Диаграмма $\tilde{\mathbf{A}}^{q-r+1}$ есть \mathbf{A}^{q-r+1} с одной дополнительной клеткой снизу. Рассмотрим след ранга $r' = r + \epsilon' + 1$ q' -формы $w_{\tilde{\mathbf{A}}^{q-r+1}}$, где $-q' = q + 2\epsilon' + 1$. Сначала берётся след $\tilde{\mathbf{A}}^{q-r+1}$ ранга $r + \epsilon' + 1$: r клеток удаляется как в пункте (a), и одна клетка удаляется из последнего ряда, ϵ' клеток удаляется от k -го блока в добавок к уже удалённым t_k клеткам. Затем остальные клетки в количестве $q-r+\epsilon'$ добавляются к первым рядам. Наконец, получается та же диаграмма, что и в пункте (a).

$r' = r + \epsilon' + 1$. Иллюстрация дана на рис. 6.2b.

$$\begin{array}{ccccc}
& C_{g,r}^q(\mathbf{A}) & & C_{g+1,r'}^{q'}(\mathbf{A}) & \\
& \cup & & \cup & \\
\omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{A}_g} & \xleftarrow{\pi} & \mathbf{X} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{\mathbf{X}} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{A}_{g+1}} & (6.52) \\
& & \cap & & & & & \\
& & \text{mspr}(\mathbf{A}, q, r) & & & & &
\end{array}$$

В самом деле, диаграмма $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}$ принадлежит $\tilde{\mathbf{A}}^{q-r+1} \otimes \mathbb{Y}[q']$, где $\tilde{\mathbf{A}}^{q-r+1} \in \mathbf{A}_{g+1}$, а именно

$$\tilde{\mathbf{A}}^{q-r+1} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_{q-r}, \widehat{s_{q-r+1}}, s_{q-r+2}, \dots, s_n, 1). \quad (6.53)$$

След ранга $r + \epsilon' + 1$ берётся следующим образом: след порядка r берётся так же как и для \mathbf{X} , далее ϵ' клеток удаляются от блока, к которому принадлежит $(q - r + 1)$ строка, затем удаляется единственная клетка в последнем ряду $\tilde{\mathbf{A}}^{q-r+1}$. Оставшиеся $q' - r' = q - r + \epsilon'$ клеток добавляются согласно hwr-правилам, что приводит к той же диаграмме \mathbf{X} .

Представляется технически сложным определить отображение дуальности в тензорных терминах, поскольку потребуется использовать юнговские проекторы и проеکتоры на бесследовую часть для того, чтобы вложить неприводимый тензор с симметрией \mathbf{X} в связность $\omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{A}_g}$ с помощью некоторого проектора π и в связность $\omega_{\mathbf{q}}^{\mathbf{A}_{g+1}}$ с помощью некоторого проектора $\tilde{\pi}$. Однако оказывается, что для интерпретации обобщённых полей Янга-Миллса алгебры (анти)-де Ситтера в терминах метрических полей явная форма π и $\tilde{\pi}$ не требуется.

Отметим, что в силу определения отображения дуальности, оно применимо только к специальным элементам, а именно, имеющим вид mspr , и только к тем из последних, которые не находятся в максимальной градуировке.

6.3.6 σ_- -когомологии, результат

Мы сначала сформулируем результат — ответ для σ_- -когомологий в случае $\mathfrak{sl}(d+1)$ и $\mathfrak{so}(d+1)$. Собственно вычисления приведены в разделах 6.3.7 и 6.3.8 соответственно.

Теорема. Пусть диаграмма $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$ определяет неприводимое представление $\mathfrak{sl}(d+1)$ и $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ есть ассоциированный σ_- -комплекс, тогда

$$\mathbb{H}^q(\mathbf{A}, \sigma_-) = \begin{cases} \text{mspr}(\mathbf{A}, q), & q = 0, \dots, d-1, \\ \emptyset, & q \geq d, \end{cases} \quad (6.54)$$

причём градуировка единственного элемента $\mathbb{H}^q(\mathbf{A}, \sigma_-)$ равна $g(\mathbf{A}^{q+1})$.

Теорема. Пусть диаграмма $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$ определяет неприводимое представление алгебры $\mathfrak{so}(d+1)$ (поскольку сигнатура в данном случае не важна, алгебра $\mathfrak{so}(d+1)$ может считаться алгеброй (анти)-де Ситтера) и $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ есть ассоциированный σ_- -комплекс, тогда когомологии состоят из двух частей

$$\mathbb{H}^q(\mathbf{A}, \sigma_-) = \mathbb{H}^q(\mathbf{A}, \sigma_-)^{\text{reg}} \oplus \mathbb{H}^q(\mathbf{A}, \sigma_-)^{\text{irreg}}, \quad (6.55)$$

где $H^q(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-)^{reg}$ представляет собой регулярную часть

$$H^q(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-)^{reg} = \sum_{k=0}^{k=q} mspr(\mathbf{A}, q, k), \quad (6.56)$$

и нерегулярная часть $H(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-)^{irreg}$ получается из регулярной поэлементной дуализацией

$$H(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-)^{irreg} = \{\tilde{\omega} : \omega \in H(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-)^{reg}\} = \tilde{H}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-)^{reg}, \quad (6.57)$$

т.е. представители классов $H(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-)^{irreg}$ получены применением отображения дуализации к представителям каждого класса из $H^q(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-)^{reg}$.

Заметим, что градуировка $\tilde{\omega}$ на единицу больше чем у исходного ω , степень формы же и порядок следа зависят от количества одинаковых весов в ω , его степени и порядка следа, поэтому разные представители из $H^q(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-)^{reg}$, имеющие одни и те же q, g, r , могут попадать в разные степени в $H(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-)^{irreg}$. Отметим, что дуализация любого элемента в максимальной градуировке даёт пустое множество.

Последняя теорема включает в себя все известные на настоящий момент частные случаи, известные в литературе: в [191] был чётко определён полевой смысл $H(\boldsymbol{\sigma}_-)$, и пример скалярного поля $\mathcal{C}(\mathbb{Y}(k), \boldsymbol{\sigma}_-)$ $k \rightarrow \infty$ был детально разобран; $H^q(\boldsymbol{\sigma}_-)$ в младших степенях $q = 0, 1, 2$ для $\mathcal{C}(\mathbb{Y}(s-1, s-1), \boldsymbol{\sigma}_-)$, связанного с безмассовым полем спина $s \geq 2$, были найдены в [182], ранее этот результат был известен как Central On-mass-shell теорема [37]. Для построения лагранжиана некоторые когомологии, отвечающие динамическому полю, калибровочному параметру и тензору Вейля для поля $(\mathbf{S}, q_{\min}, t = 1)$, q_{\min} равно высоте последней колонки в \mathbf{S} , были найдены [152, 204, 205]; $H^q(\mathbb{Y}(s-1, s-t), \boldsymbol{\sigma}_-)$ для $q = 0, 1$, соответствующие частично-безмассовому полю спина s , $(\mathbb{Y}(s), q = 1, t)$ были важны для $\{3\}$; в [86, 87] $H^q(\boldsymbol{\sigma}_-)$ были найдены в низших степенях для $(\mathbf{S}, q = 1, t = 1)$ с $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, s_2, \dots, s_n)$, $s_1 - s_2 \geq 4$.

Следствие. В случае, когда все веса в \mathbf{A} различны, ответ имеет наиболее простой вид, поскольку

$$mspr(\mathbf{A}, q, r) = msp(\mathbf{A}^{q-r+1}, q, r), \quad (6.58)$$

и следовательно

$$H^q(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-)^{reg} = \sum_{k=0}^{k=q} msp(\mathbf{A}^{q-k+1}, q, k). \quad (6.59)$$

Дуализация какого-либо представителя, характеризуемого некоторыми q, g, r , даёт представитель с $q+1, g+1, r+1$ (конечно, при условии, что исходный элемент не был в максимальной градуировке, тогда результат есть пустое множество).

Теперь мы обсудим вывод теорем этого параграфа.

6.3.7 $\boldsymbol{\sigma}_-$ для $\mathfrak{sl}(d+1)$

Хотя в случае $\mathfrak{sl}(d+1)$ оператор $\boldsymbol{\sigma}_-$ сводится к хорошо известному определению из теории когомологий алгебр Ли, в случае $\mathfrak{so}(d+1)$ это не так. Однако мы сначала

вычислим σ_- -когомологии для $\mathfrak{sl}(d+1)$ методом, который затем легко обобщается на случай $\mathfrak{so}(d+1)$. Метод состоит в том, чтобы рассматривать не $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$, а более простой комплекс для случая $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s)$, затем тензорное произведение таких простых комплексов. Тогда когомологии исходного $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ в случае, когда \mathbf{A} общего положения, получаются применением некоторых простых проекторов, ядро которых удобно анализировать.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(d+1)$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(d)$. Пусть V есть фундаментальное (векторное) представление \mathfrak{g} . Выберем любой ненулевой вектор (компенсатор) $v \in V$, тогда $V = V_0 \oplus V_1$, где $V_1 = \text{span}(v)$ есть одномерное подпространство, натянутое на v , а V_0 есть векторное представление \mathfrak{h} . Определим комплекс следующим образом

$$\sigma_- : T^m(V) \otimes \Lambda^q(V_0) \longrightarrow T^m(V) \otimes \Lambda^{q+1}(V_0), \quad (6.60)$$

где $T^m(V)$ есть m -ая тензорная степень V , $\Lambda^q(V_0)$ есть q -ая внешняя степень V_0 , а σ_- есть нильпотентный оператор, действие которого имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_- : (X_1 \otimes \dots \otimes X_m) \otimes z_1 \wedge \dots \wedge z_q &\longrightarrow \\ \longrightarrow \sum_{i=1}^{i=m} (X_1 \otimes \dots \otimes \widehat{X_{i-1}} \otimes v \otimes X_{i+1} \otimes \dots \otimes X_m) \otimes \rho_v(X_i) \wedge z_1 \wedge \dots \wedge z_q, &\quad (6.61) \end{aligned}$$

где $X_1, \dots, X_m \in V$, $z_1, \dots, z_q \in V_0$ и $\rho_v(X)$ — это проектор на V_0 , т.е. $\rho_v(v) = 0$, $\rho_v(x) = x$ если $x \in V_0$.

Поскольку мы рассматриваем неприводимые представления \mathfrak{g} , нам потребуется юнговский симметризатор $\pi_{\mathbf{A}}$, выделяющий из $T^m(V)$ неприводимое представление, определяемое некоторой диаграммой Юнга \mathbf{A} ранга $m = \text{rank}(\mathbf{A})$. Юнговский симметризатор — это некоторая сумма по всем перестановкам $m = \text{rank}(\mathbf{A})$ сомножителей в тензорном произведении вида

$$\pi_{\mathbf{A}}[X_1 \otimes \dots \otimes X_m] = \sum_{\{\sigma\}} f(\sigma) X_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes X_{\sigma_m}, \quad (6.62)$$

где тип представления, т.е. вид диаграммы \mathbf{A} заложен в весовой функции $f(\sigma)$, например, для $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(m)$ имеем $f(\sigma) = (m!)^{-1}$ и $f(\sigma) = (-1)^{|\sigma|} (m!)^{-1}$ для $\mathbf{A} = \mathbb{Y}[m]$. Нетрудно видеть, что юнговский симметризатор коммутирует с действием σ_- . Поэтому для любого неприводимого представления \mathbf{A} алгебры \mathfrak{g} хорошо определён как нильпотентный оператор

$$\sigma_- : \mathbf{A} \otimes \Lambda^q(V_0) \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \Lambda^{q+1}(V_0), \quad (6.63)$$

так и соответствующий комплекс на $\mathbf{A} \otimes \Lambda(V_0)$, который мы обозначаем $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$. Данное определение промежуточно между тем, что получается при явной работе с индексами в компонентах, и инвариантным определением, данным в (6.3.1).

Ввиду вложения $\mathbf{A} \hookrightarrow T^m(V)$ с $m = \text{rank}(\mathbf{A})$, любой элемент \mathfrak{h} -модуля \mathbf{X} из $\text{Res}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} \mathbf{A}$ может быть записан в виде суммы элементов вида

$$\pi_{\mathbf{A}}(\overbrace{v \otimes \dots \otimes v}^{m-k} \otimes \pi_{\mathbf{X}}(x_1 \otimes \dots \otimes x_k)), \quad (6.64)$$

где $x_1, \dots, x_k \in V_0$ и $\mathbf{X} \in \text{Res}_{\mathfrak{h}}^q \mathbf{A}$.

Как уже отмечалось, $\mathbf{A} \otimes \Lambda(V_0)$ можно рассматривать как \mathfrak{h} -модуль, если действие \mathfrak{h} на $\Lambda(V_0)$ индуцируется с такового на V_0 . Поскольку $\mathfrak{h}v = 0$, σ_- коммутирует с действием \mathfrak{h} , что и позволяет нам рассматривать все элементы комплексов как \mathfrak{h} -модули.

комплекс де Рама. Рассмотрим комплекс де Рама \mathcal{R} на полиномах от d переменных y^a . Действие дифференциала де Рама ∂ имеет вид

$$\partial(\omega(y^a|\theta^b)) = \theta^c \frac{\partial}{\partial y^c} \omega(y^a|\theta^b), \quad (6.65)$$

где введены грасмановы переменные θ^a (аналог dx^a). Если переписать действие ∂ на компоненту однородности k и q по переменным y^a и θ^b соответственно, то получим

$$\partial(\omega^{a(k)|\mu[q]}) = \omega^{a(k-1)\mu[q]}, \quad (6.66)$$

где подразумевается антисимметризация по индексам формы μ . Введённая ранее градуировка g равна числу касательных индексов, т.е. k . Как хорошо известно, когомологии $H_g^q(\mathcal{R})$ комплекса де Рама сконцентрированы в константных полиномах от y^a и θ^b , т.е.

$q \setminus g$	0	> 0	(6.67)
0	•	\emptyset	
> 0	\emptyset	\emptyset	

Если мы разложим $\omega^{a(k)|\mu[q]}$ на неприводимые представления

$$\omega^{a(k)|\mu[q]} \sim \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{k} \\ \hline \mathbf{q} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{k} \\ \hline \mathbf{q} \\ \hline \end{array}, \quad (6.68)$$

то очевидно, что первая, наиболее антисимметричная компонента незамкнута, а вторая, наиболее симметричная, замкнута, но точно ввиду наличия у $\omega^{a(k+1)|\mu[q-1]}$ незамкнутой компоненты первого типа, которая имеет тот же тип симметрии. Таким образом, всё пространство, на котором действует ∂ , за исключением констант ω^l разбивается на стягиваемые пары⁹.

комплекс де Рама \mathcal{R}^s с ограничением или $\mathcal{C}(\mathbb{Y}(s), \sigma_-)$. Рассмотрим теперь комплекс де Рама \mathcal{R}^s на полиномах от y^a степени, не превышающей s . Очевидно, его можно реализовать как пространство однородных полиномов степени s от $d+1$ переменных y^a и y^\bullet , ∂ формально определяется тем же выражением (6.65), аргумент которого есть функция также и от y^\bullet , $\omega(y^a, y^\bullet|\theta^b)$. Поэтому \mathcal{R}^s представляет собой простейший пример σ_- -комплекса $\mathcal{C}(\mathbb{Y}(s), \sigma_-)$, см. раздел 6.3.2. Компонента $\omega^{a(k)|\mu[q]}$

⁹Стягиваемой парой называются любые два элемента комплекса, скажем ω_1 и ω_2 , такие что $\omega_1 = \partial(\omega_2)$.

отождествляется с проекцией $W^{a(k)\bullet(s-k)|\mu[q]}$ формы $W^{A(s)|\mu[q]}$ со значениями в $\mathfrak{sl}(d+1)$ -модуле $\mathbb{Y}(s)$ (см. (6.39)).

Когомологии $H_g^q(\mathcal{R}^s)$ данного комплекса найти очень просто: поскольку это ограничение комплекса де Рама, то помимо унаследованных от него когомологий добавятся представители тех стягиваемых пар, которые оказались разбиты в результате ограничения, т.е. те формы на границе (в градуировке s), которые ранее были точны, теперь попадают в когомологии, поскольку градуировка $s+1$ теперь тривиальна. Таким образом, для низших степеней имеем

$q \backslash g$	0	s
0	$\mathcal{O}^0 = \bullet$	\emptyset
1	\emptyset	$\mathcal{B}^1 = \boxed{}_{s+1}$
2	\emptyset	$\mathcal{B}^2 = \begin{array}{c} \boxed{} \\ \square \end{array}$

(6.69)

где мы ввели некоторые обозначения для конкретных компонент.

комплекс \mathcal{R}^{s_1, s_2} . Также нам потребуется комплекс \mathcal{R}^{s_1, s_2} , $s_2 > 0$, полученный из \mathcal{R}^{s_1} если добавить ограничение, что полиномы от y^a должны быть степени не менее s_2 , или более формально

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}^{s_2} \longrightarrow \mathcal{R}^{s_1, s_2} \longrightarrow \mathcal{R}^{s_1} \longrightarrow 0. \quad (6.70)$$

Необходимость рассмотрения такого комплекса возникает, поскольку в результате применения юнговского симметризатора длина некоторой строки (степень полинома) диаграммы из $\text{Res}_\mathfrak{g}^q \mathbf{A}$ не может быть меньше, чем длина следующей строки в диаграмме \mathbf{A} .

Когомологии $H_g^q(\mathcal{R}^{s_1, s_2})$ данного комплекса также легко найти, достаточно рассмотреть те стягиваемые пары \mathcal{R}^{s_1} в градуировке s_2 , которые разрушаются в следствии налагаемого ограничения, что даёт

$q \backslash g$	s_2	s_1
0	$\mathcal{A}^0 = \boxed{}_{s_2}$	\emptyset
1	$\mathcal{A}^1 = \begin{array}{c} \boxed{} \\ \square \end{array}$	$\mathcal{B}^1 = \boxed{}_{s_1+1}$
2	$\mathcal{A}^2 = \begin{array}{c} \boxed{} \\ \square \\ \square \end{array}$	$\mathcal{B}^2 = \begin{array}{c} \boxed{} \\ \square \end{array}$

(6.71)

Отметим, что представители когомологий в старших степенях получаются из \mathcal{A}^0 и \mathcal{B}^1 приписыванием снизу клеток, отвечающих индексам формы.

комплекс $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \partial)$. Задавшись некоторой диаграммой $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$ определим комплекс $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \partial)$ как тензорное произведение комплексов \mathcal{R}^{s_i} ,

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, \partial) = \mathcal{R}^{s_1} \otimes \mathcal{R}^{s_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{R}^{s_{n-1}} \otimes \mathcal{R}^{s_n}, \quad (6.72)$$

где действие полного дифференциала ∂ определяется через действие ∂ на каждом сомножителе $\omega_{q_i}^i \in \mathcal{R}^{s_i}$

$$\partial (\omega_{q_1}^1 \otimes \omega_{q_2}^2 \otimes \dots \otimes \omega_{q_n}^n) = \partial(\omega_{q_1}^1) \otimes \omega_{q_2}^2 \otimes \dots \otimes \omega_{q_n}^n + (-)^{q_1} \omega_{q_1}^1 \otimes \partial(\omega_{q_2}^2) \otimes \dots \otimes \omega_{q_n}^n + \dots$$

Простейший факт из теории спектральных последовательностей говорит, что когомологии $H^q(\mathbf{A}, \partial)$ данного комплекса есть тензорное произведение когомологий сомножителей. Однако данный комплекс ещё далёк от $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$, поскольку: (1) не наложено условие юнговости; (2) каждый из сомножителей содержит свою собственную копию $\Lambda(V_0)$, т.е. элементы комплекса есть дифференциальные мультиформы, а не обычные формы. Искомый комплекс $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ можно получить из $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \partial)$ применением двух проекторов: юнгова проектора $\pi_{\mathbf{A}}$, (6.62), и проектора π_{Λ} , проектирующего мультиформы в обычные дифференциальные формы. Проектор π_{Λ} выделяет наиболее антисимметричную часть из тензорного произведения мультиформ, т.е.

$$\pi_{\Lambda} : \Lambda^{q_1} \otimes \dots \otimes \Lambda^{q_n} \longrightarrow \Lambda^{q_1+q_2+\dots+q_n}. \quad (6.73)$$

Легко видеть, что проекторы $\pi_{\mathbf{A}}$ и π_{Λ} коммутируют как с дифференциалом ∂ , так и друг с другом. Последнее очевидно, поскольку проектор π_{Λ} действует на коэффициенты дифференциальных мультиформ, тогда как $\pi_{\mathbf{A}}$ на сами мультиформы. Однако при получении когомологий $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ путём применения составного проектора $\pi_{\mathbf{A}}\pi_{\Lambda}$ к когомологиям $H^q(\mathbf{A}, \partial)$ возникают две трудности: (1) некоторая часть когомологий оказывается в ядре π_{α} , $\alpha = \mathbf{A}, \Lambda$; (2) существуют стягиваемые пары $E = \partial(F)$, такие что F не принадлежит $\ker(\pi_{\alpha})$, но $E \in \ker(\pi_{\alpha})$, и таким образом F становится представителем некоторого класса когомологий для $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$. Оказывается, что достаточно просто найти ядро проекторов π_{α} , а также отследить появление новых когомологий из-за механизма (2).

(не)каноническое разбиение индексов. При работе с неприводимыми в смысле перестановок индексов тензорами оказывалось удобным разбивать индексы на группы, с явной симметрией по индексам внутри каждой группы, причём количество индексов в каждой группе равнялось длине соответствующей строки в диаграмме Юнга. В силу юнговских условий симметризация индексов какой-либо группы с индексом одной из последующих групп обращается в ноль. Однако симметризация индексов какой-либо группы с индексом одной из предшествующих групп, вообще говоря, даёт не ноль, а переводит тензор из одного базиса в другой базис, в котором юнговская симметрия не столь очевидна. Например, для тензора $C^{a(k),b(m)}$ с симметрией $\Upsilon(k, m)$ имеем следующие взаимно однозначные преобразования

$$B^{a(k-1),b(m+1)} \equiv C^{a(k-1)b,b(m)} \neq 0, \quad C^{a(k),b(m)} = \frac{k(m+1)}{(k-m)} B^{a(k-1),ab(m)}. \quad (6.74)$$

Запись тензора, обладающего симметрией некоторой диаграммы Юнга, в форме, когда количество индексов в каждой из групп равно длине соответствующей строки в диаграмме Юнга, будем называть канонической и неканонической в противном случае. Например, $C^{a(k),b(m)}$ есть канонический тензор, тогда как $C^{a(k-i)b(i),b(m)}$, $i > 0$ представляет собой неканонический.

Также отметим, что свернув некоторое количество компенсаторов с индексами неприводимого тензора \mathfrak{g} мы получим тензор, который не является, вообще говоря, неприводимым. На примере \mathfrak{g} -тензора с симметрией $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1, s_2)$ имеем

$$W^{a(k)\bullet(s_1-k), b(m)\bullet(s_2-k)} = \sum_{j=0}^{k+j \leq s_1} \alpha_j^{k,m} C^{a(k)b(j), b(m-j)}, \quad (6.75)$$

где естественно положить $\alpha_{j=0}^{k,m} = 1$, так что

$$\pi_{\mathbf{X}}(W^{a(k)\bullet(s_1-k), b(m)\bullet(s_2-k)}) = C^{a(k), b(m)} \quad (6.76)$$

для $\mathbf{X} = \mathbb{Y}(k, m)$ и такого что $\mathbf{X} \in \text{Res}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} \mathbf{A}$. Выделение из левой части (6.75) неприводимых компонент с симметрией отличной от \mathbf{X} назовём неканонической проекцией. Применение юнговского симметризатора к обоим частям (6.75) не даёт, вообще говоря, ноль (за исключением слагаемого при $\alpha_{j=0}^{k,m}$), но позволяет получить рекуррентное уравнение для $\alpha_j^{k,m}$, решением которого является $\alpha_j^{k,m} = \frac{(-)^j m! (s_1-k)! (k-m+j)!}{j! (m-j)! (s_1-k-j)! (k-m+2j)!}$, от которого важно, что коэффициенты не обращаются в ноль в своей области определения (что очевидно, поскольку, компонента с каким-либо типом симметрии в принципе может быть выделена из произвольной, в частности неканонической, проекции, если существует соответствующее неканоническое разбиение индексов). Поскольку каждая неприводимая компонента входит в $\text{Res}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} \mathbf{A}$ с кратностью один, путаницы с неканоническими проекциями и тензорами не возникает.

Рассмотрим некоторую неприводимую компоненту $C^{a(k), b(m)}$ с симметрией $\mathbf{X} = \mathbb{Y}(k, m)$ в $\mathcal{R}(\mathbf{X}, \partial)$. Она может быть вложена в ноль-формы $\omega^{a(k-i)|b(m-i)}$ из $\mathcal{R}(\mathbf{X}, \partial)$ канонически при $i = 0$ и неканонически при $i > 0$. Однако применение $\pi_{\mathbf{A}}$ отобразит все $\omega^{a(k-i)|b(m-i)}$, в которые вложено $C^{a(k), b(m)}$, в один и тот же тензор по модулю общего фактора при условии, что $\mathbf{X} \in \text{Res}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} \mathbf{A}$, и отобразит в ноль иначе. Таким образом достаточно рассматривать только неприводимые тензоры с каноническим разбиением индексов.

ядро проектора $\pi_{\mathbf{A}}$. Ядро $\pi_{\mathbf{A}}$ легко найти: если для некоторого тензора в канонической записи F имеем $\partial(F) \neq 0$, но $\partial(F) \in \ker(\pi_{\mathbf{A}})$, то это значит, что в $\partial(F)$ индексов некоторого сорта стало меньше, чем длина соответствующей строки в диаграмме \mathbf{A} , т.е. $\partial(F)$ не принадлежит $\text{Res}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} \mathbf{A}$. Это означает появление новых когомологий при переходе от $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \partial)$ к искомому $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-) = \pi_{\mathbf{A}} \pi_{\mathbf{A}} [\mathcal{R}(\mathbf{A}, \partial)]$, причём новые когомологии отвечают таковым в $\mathcal{R}^{s_i, s_{i+1}}$ по сравнению с когомологиями \mathcal{R}^{s_i} .

когомологии в тензорном произведении. Рассмотрим те когомологии $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ с $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$, которые даются тензорным произведением когомологий

$$\mathbb{H}(\mathcal{R}^{s_1, s_2}) \otimes \mathbb{H}(\mathcal{R}^{s_2, s_3}) \otimes \dots \otimes \mathbb{H}(\mathcal{R}^{s_{n-1}, s_n}) \otimes \mathbb{H}(\mathcal{R}^{s_n}) \quad (6.77)$$

и применением к ним $\pi_{\mathbf{A}} \pi_{\mathbf{A}}$. Оказывается, что если один из факторов в (6.77), кроме последнего, представлен диаграммой с более чем одной строкой, то такой класс, после применения $\pi_{\mathbf{A}} \pi_{\mathbf{A}}$, даёт тривиальный класс когомологий в $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$. Другими

словами, наличие одного из левых факторов в (6.77) вида $\mathcal{A}^{q>0} \otimes$ и $\mathcal{B}^{q>1} \otimes$ не приводит к нетривиальным когомологиям в $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$. Действительно, рассмотрим все четыре варианта произведения когомологий (достаточно рассмотреть лишь одну пару соседних сомножителей в (6.77)), где первый сомножитель представлен диаграммой с более чем одной строкой (для простоты двумя)

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{A}^{q>0} \otimes \mathcal{A} & \sim & \begin{array}{|c|} \hline s_2 \\ \hline \times \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline s_3 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{A}} \pi_{\mathbf{A}}} & \begin{array}{|c|} \hline s_2 \\ \hline \times \\ \hline s_3 \\ \hline \end{array}, \\
\mathcal{A}^{q \geq 0} \otimes \mathcal{B} & \sim & \begin{array}{|c|} \hline s_2 \\ \hline \times \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline s_2 \\ \hline \times \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{A}} \pi_{\mathbf{A}}} & \emptyset, \\
\mathcal{B}^{q>1} \otimes \mathcal{A} & \sim & \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline \times \\ \hline \times \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline s_3 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{A}} \pi_{\mathbf{A}}} & \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline \times \\ \hline \times \\ \hline s_3 \\ \hline \end{array}, \\
\mathcal{B}^{q>1} \otimes \mathcal{B} & \sim & \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline \times \\ \hline \times \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline s_2 \\ \hline \times \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{A}} \pi_{\mathbf{A}}} & \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline \times \\ \hline \times \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array} \sim 0,
\end{array}$$

а перечёркнутые клетки отвечают на тензорном языке индексам формы, например, $\begin{array}{|c|} \hline s_2 \\ \hline \times \\ \hline \end{array}$ отвечает представителю в виде $C^{a(s_2), \mu}$, который замкнут в силу того, что тензоры с менее чем s_2 индексами принадлежат ядру проектора $\pi_{\mathbf{A}}$. Итак, $\mathcal{A}^{q \geq 0} \otimes \mathcal{B}$ не даёт нетривиального класса когомологий в $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$, поскольку вторая строка в диаграмме не может быть длиннее, чем первая; $\mathcal{B}^{q>1} \otimes \mathcal{B}$ также отображается в ноль, поскольку два индекса формы разных сортов оказываются в одной группе симметричных индексов, что даёт ноль после применения $\pi_{\mathbf{A}}$; как $\mathcal{A}^{q>0} \otimes \mathcal{A}$, так и $\mathcal{B}^{q>1} \otimes \mathcal{B}$ оказываются точными в $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$, поскольку индекс формы во второй строке может теперь получиться в результате применения $\pi_{\mathbf{A}} \pi_{\mathbf{A}} \partial$ к $C^{a(s_2), b(s_3+1)}$ и $C^{a(s_1)\mu, b(s_2+1)}$ соответственно. Ввиду юнгности и того, что формы разных сортов теперь отождествляются посредством $\pi_{\mathbf{A}}$, то же самое расположение индексов в тензоре может быть получено через $\pi_{\mathbf{A}} \pi_{\mathbf{A}} \partial$, что было невозможно в исходном $\mathcal{R}^{s_1, s_2, \dots}$. Отметим, что всё вышесказанное касается исчезновения когомологий, представленных дву- и более рядными диаграммами, только при тензорном умножении слева и, в частности, не касается последнего сомножителя \mathcal{R}^{s_n} в $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \partial)$.

проектор $\pi_{\mathbf{A}}$. Поскольку в $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \partial)$ с $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1, s_2)$ компонента одного и того же типа симметрии может даже при $q = 0$ находиться в элементах $\omega^{a(k)|b(m)}$ с различными k и m , можно так подобрать коэффициенты, что построенный элемент будет замкнут после применения $\pi_{\mathbf{A}}$, например

$$\omega = \sum_{i=0}^{i=n} (-)^i C^{a(n-i)b(i)}, \quad \pi_{\mathbf{A}} [\partial(\omega)] = 0, \quad (6.78)$$

где учтено, что действие ∂ на некоторую мультиформу $B_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{a(k)|b(m)}$ имеет вид

$$\partial \left(B_{\mu[q_1]|\nu[q_2]}^{a(k)|b(m)} \right) = B_{\mu[q_1]|\nu[q_2]}^{a(k-1)\mu|b(m)} + B_{\mu[q_1]|\nu[q_2]}^{a(k)|b(m-1)\nu}, \quad (6.79)$$

а индексы μ и ν отвечают формам разных сортов, и $\pi_{\mathbf{A}}$ заменяет все индексы форм на индексы μ с последующей антисимметризацией. Важно, что ∂ состоит из

двух частей — одна уменьшает количество индексов a , а другая индексов b . Поэтому начав с некоторого $B_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{a(k)|b(m)}$, который содержит только одну неприводимую \mathfrak{h} -компоненту, при попытке решить условие замкнутости, могут возникнуть две ситуации: (1) $\pi_{\Lambda} \left[\partial \left(B_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{a(k)|b(m)} \right) \right] \neq 0$, и для компенсации необходимо ввести $B_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{a(k-1)|b(m+1)}$ и $B_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{a(k+1)|b(m-1)}$ — именно такой пример приведён в (6.78). Однако данная цепочка должна продолжаться вплоть до крайних значений, т.е. $B_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{a(0)|b(m+k)}$ и $B_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{a(k+m)|b(0)}$, что, учитывая свойства π_{Λ} , а также диапазон рангов тензоров в $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \partial)$, говорит о том, что $k + m = s_2$, т.е. тензор имеет наименьшую градуировку, а значит полностью симметричен, $B_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{a(k)|b(m)} \equiv B_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{a(k)b(m)}$, и следовательно представляет собой уже имеющийся класс когомологии, не давая ничего нового; (2) $\pi_{\Lambda} \left[\partial \left(B_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{a(k)|b(m)} \right) \right] = 0$, тогда с необходимостью $B_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{a(k)|b(m)}$ имеет вид (с каноническим разбиением индексов)

$$B_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{a(k)|b(m)} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline \times & k \\ \hline \times & m \\ \hline \times & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\partial} \begin{array}{|c|c|} \hline \times & k-1 \\ \hline \times & m \\ \hline \times & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \times & k \\ \hline \times & m-1 \\ \hline \times & \\ \hline \end{array},$$

где перечёркнутые клетки отвечают индексам форм разных сортов, так что правая часть, полученная применением ∂ , обращается в ноль только после применения π_{Λ} , например, $\partial (C^{a(k)\nu, b(m)\mu}) \neq 0$, но $\pi_{\Lambda} [\partial (C^{a(k)\nu, b(m)\mu})] = 0$. Однако все данные кандидаты на когомологии либо являются точными, аналогично случаям $\mathcal{A}^{q>0} \otimes \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}^{q>1} \otimes \mathcal{B}$, либо приводят к тем же самым когомологиям вида $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ или $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$.

σ_- -когомологии. Суммируя: нетривиальные классы когомологии порождаются только всевозможными произведениями наиболее симметричных представителей из $\mathbf{H}(\mathcal{R}^{s_i, s_{i+1}})$, $i < n$, а также всех из $\mathbf{H}(\mathcal{R}^{s_n})$; по юнговским свойствам комбинации вида $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ запрещены. Таким образом, мы получили, что

$$\mathbf{H}^q(\mathbf{A}, \sigma_-) = \begin{cases} \pi_{\Lambda} \pi_{\Lambda} \left[\overbrace{\mathcal{B}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^1}^q \otimes \overbrace{\mathcal{A}^0 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^0}^{n-1-q} \otimes \mathcal{O}^0 \right], & q < n \\ \pi_{\Lambda} \pi_{\Lambda} \left[\overbrace{\mathcal{B}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^1}^{n-1} \otimes \mathcal{B}^{q-n+1} \right], & q \geq n, \end{cases} \quad (6.80)$$

что совпадает как с известным результатом из теории алгебр Ли, см. например [202], так и с первой теоремой (6.3.6), если раскрыть проекторы, что тривиально - диаграмма алгебры \mathfrak{h} получается последовательным соединением диаграмм, входящих в сомножителе.

6.3.8 σ_- для $\mathfrak{so}(d+1)$

В случае $\mathfrak{so}(d+1)$ мы следуем тому же методу, представив $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ как проекцию из тензорного произведения простых комплексов, что позволяет легко найти кандидаты в когомологии, поскольку проекторы π_{Λ} , π_{Λ} и некоторый новый проектор π_{cr} либо вообще не приводят к появлению новых когомологии (π_{Λ} , π_{cr}), либо новые когомологии легко отследить (π_{Λ}), за исключением последнего этапа, когда мы

воспользуемся Эйлеровой характеристикой для того, чтобы найти размерность ядра проектора $\pi_{\Lambda}\pi_{\Lambda}\pi_{cr}$.

гармонический комплекс де Рама. Рассмотрим комплекс $h\mathcal{R}$ де Рама на гармонических полиномах от d переменных y^a , т.е. $\frac{\partial^2}{\partial y^c \partial y_c} \omega(y^a | \theta^b) \equiv 0$. Действие дифференциала де Рама ∂ имеет тот же самый вид (6.65), или в компонентах (6.66), а условие гармоничности в терминах компонент $\omega^{a(k)|\mu[q]}$ означает их бесследовость по индексам a . Когомологии данного комплекса также хорошо известны, например в рамках задачи о развёрнутой формулировке скалярного поля они были найдены в [190],

$q \backslash g$	0	1	> 1
0	•	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	•	\emptyset
> 1	\emptyset	\emptyset	\emptyset

(6.81)

Новая, по сравнению с обычным комплексом де Рама, когомология возникает благодаря условию бесследовости и имеет вид $\delta_{\mu}^a C$, где C есть произвольная константа. Из-за условия бесследовости представитель вида $\delta_{\mu}^a C$ не может быть получен как $\partial(C^{aa})$.

гармонический комплекс де Рама с ограничениями. Аналогично определим $h\mathcal{R}^s$ как комплекс де Рама на гармонических полиномах степени не выше s . Аналогично случаю $\mathfrak{sl}(d+1)$, $h\mathcal{R}^s$ представляет собой простейший пример σ_{-} -комплекса $\mathcal{C}(\mathbb{Y}(s), \sigma_{-})$, $\omega^{a(k)|\mu[q]}$ отождествляется с бесследовой частью проекцией $W^{a(k)\bullet(s-k)|\mu[q]}$ одной формы $W^{A(s)|\mu[q]}$ со значениями в $\mathfrak{so}(d+1)$ -модуле $\mathbb{Y}(s)$, см. (6.44). Когомологии данного комплекса также легко вычислить — необходимо найти те стягиваемые пары в градуировке s , которые оказываются разбиты ограничением, что даёт (в низших степенях)

$q \backslash g$	0	1	s
0	$\mathcal{O}^0 = \bullet$	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	$\mathcal{O}^1 = \bullet$	$\mathcal{B}^1 = \begin{array}{ c } \hline s+1 \\ \hline \end{array}$
2	\emptyset	\emptyset	$\mathcal{B}^2 = \begin{array}{ c } \hline s+1 \\ \hline \end{array}, \mathcal{C}^2 = \begin{array}{ c } \hline s \\ \hline \end{array}$
3	\emptyset	\emptyset	$\mathcal{B}^3 = \begin{array}{ c } \hline s+1 \\ \hline \end{array}, \mathcal{C}^3 = \begin{array}{ c } \hline s \\ \hline \end{array}$

(6.82)

Сразу отметим, что компоненты, представленные однорядными диаграммами Юнга, находятся в степенях не выше второй.

комплекс $h\mathcal{R}^{s_1, s_2}$. Также нам потребуется комплекс $h\mathcal{R}^{s_1, s_2}$, $s_2 > 0$, полученный из \mathcal{R}^{s_1} , если добавить ограничение, что полиномы от y^a должны быть степени не менее

s_2 , или более формально

$$0 \longrightarrow \mathfrak{hR}^{s_2} \longrightarrow \mathfrak{hR}^{s_1, s_2} \longrightarrow \mathfrak{hR}^{s_1} \longrightarrow 0. \quad (6.83)$$

Когомологии данного комплекса также легко найти,

$q \backslash g$	s_2	s_1
0	$\mathcal{A}^0 = \boxed{s_2}$	\emptyset
1	$\mathcal{A}^1 = \begin{array}{c} \boxed{s_2} \\ \square \end{array}, \mathcal{D}^1 = \boxed{s_2-1}$	$\mathcal{B}^1 = \boxed{s_1+1}$
2	$\mathcal{A}^2 = \begin{array}{c} \boxed{s_2} \\ \square \\ \square \end{array}, \mathcal{D}^2 = \begin{array}{c} \boxed{s_2-1} \\ \square \end{array}$	$\mathcal{B}^2 = \begin{array}{c} \boxed{s_1+1} \\ \square \end{array}, \mathcal{C}^2 = \boxed{s_1}$

(6.84)

комплекс $\mathfrak{hR}(\mathbf{A}, \partial)$. Задавшись некоторой диаграммой $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$, определим комплекс $\mathfrak{hR}(\mathbf{A}, \partial)$ как тензорное произведение комплексов \mathfrak{hR}^{s_i} ,

$$\mathfrak{hR}(\mathbf{A}, \partial) = \mathfrak{hR}^{s_1} \otimes \mathfrak{hR}^{s_2} \otimes \dots \otimes \mathfrak{hR}^{s_{n-1}} \otimes \mathfrak{hR}^{s_n}, \quad (6.85)$$

где действие полного дифференциала ∂ определяется так же как и в $\mathfrak{sl}(d+1)$ -случае. Относительно $\mathfrak{hR}(\mathbf{A}, \partial)$ верен аналогичный факт, что его когомологии есть просто тензорное произведение когомологий сомножителей.

проекторы $\pi_{\mathbf{A}}$ и $\pi_{\mathbf{A}}$. Относительно проекторов $\pi_{\mathbf{A}}$ и $\pi_{\mathbf{A}}$ верны аналогичные факты, а именно: (1) достаточно рассматривать лишь неприводимые тензоры с каноническим разбиением индексов на группы; (2) условия юнговости приводят к тому, что в комплексе \mathfrak{hR}^{s_i} в градуировке s_{i+1} возникают после наложения проекторов когомологии аналогичные таковым у $\mathfrak{hR}^{s_i, s_{i+1}}$; (3) умножение слева на какую-либо когомологию, представленную диаграммой с более чем одной строкой, делает получающуюся форму точной, т.е. $\mathcal{A}^{q>0} \otimes \dots, \mathcal{D}^{q>1} \otimes \dots, \mathcal{B}^{q>1} \otimes \dots, \mathcal{C}^{q>2} \otimes \dots$ приводят к тривиальным когомологиям после наложения проекторов; (4) комбинации вида $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{D} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ и $\mathcal{D} \otimes \mathcal{C}$ отображаются в ноль $\pi_{\mathbf{A}}$ если $s_1 > s_2$, если же $s_1 = s_2$, то из выше перечисленных только $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ допустима. Вообще наличие в диаграмме \mathbf{A} групп строк одинаковой длины приводит к значительным усложнениям ответа, но именно этот случай отвечает наиболее интересным приложениям.

проектор π_{cr} . Нам также потребуется ещё один проектор π_{cr} , который удаляет кросс-следы, поскольку, хотя каждый элемент $\omega(y_i^a | \theta_i^b)$ из \mathfrak{hR}^{s_i} гармоничен, но $\omega(y_i^a, y_j^a | \theta_i^b, \theta_j^b)$ из $\mathfrak{hR}^{s_i} \otimes \mathfrak{hR}^{s_j}$ не является гармоническим по $y_i^a y_j^b, \frac{\partial^2}{\partial y_i^c \partial y_j^c} \omega(y_i^a, y_j^a | \theta_i^b, \theta_j^b) \neq 0$, что в терминах коэффициентов означает, что кросс-следы между группами симметричных индексов не обращаются в ноль, например,

$$C^{a(k)|b(m)} = C_0^{a(k)|b(m)} + \left(\eta^{ab} C_1^{a(k-1)|b(m-1)} + \dots \right) + (\eta^{ab} \eta^{ab} \dots) + \dots \quad (6.86)$$

Для того чтобы получить $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$, кросс-следы необходимо отбросить. Поскольку действие ∂ (6.79) заключается в замене одного индекса из каждой группы симметричных индексов на индекс формы с последующей антисимметризацией, ∂ не может

увеличивать ранг кросс-следа, а следовательно не может быть такой ситуации, когда ω не является кросс-следом, а $\partial\omega \neq 0$ и $\pi_{cr}[\partial\omega] = 0$. Таким образом, π_{cr} не приводит к появлению новых когомологий.

ответ в случае $s_i \neq s_{i+1}$. В случае, когда все веса в \mathbf{A} различны, ответ выглядит наиболее просто: представители классов когомологий порождаются элементами вида

$$H_{r,g}^q(\mathbf{A}, \sigma_-) = \pi_{\mathbf{A}} \pi_{\Lambda} \pi_{cr} \left[\overbrace{\mathcal{B}^1(\mathcal{C}^2) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^1(\mathcal{C}^2)}^{q-r} \otimes \mathcal{A}^0(\mathcal{D}^1) \dots \otimes \mathcal{A}^0(\mathcal{D}^1) \otimes \mathcal{O}^0 \right], \quad q-r < n, \quad (6.87)$$

где $\mathcal{B}^1(\mathcal{C}^2)$ означает, что в данном месте может стоять либо \mathcal{B}^1 , либо \mathcal{C}^2 , аналогично $\mathcal{A}^0(\mathcal{D}^1)$. Степень q , градуировка g и порядок следа r равны соответственно

$$q = \#\mathcal{B}^1 + 2\#\mathcal{C}^2 + \#\mathcal{D}^1, \quad g = s_1 - s_{q-r+1}, \quad r = \#\mathcal{C}^2 + \#\mathcal{D}^1 \quad (6.88)$$

Также когомологии порождаются представителями вида

$$H_{r+1,g+1}^{q+1}(\mathbf{A}, \sigma_-) = \pi_{\mathbf{A}} \pi_{\Lambda} \pi_{cr} \left[\overbrace{\mathcal{B}^1(\mathcal{C}^2) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^1(\mathcal{C}^2)}^{q-r} \otimes \mathcal{A}^0(\mathcal{D}^1) \dots \otimes \mathcal{A}^0(\mathcal{D}^1) \otimes \mathcal{O}^1 \right], \quad (6.89)$$

где \mathcal{O}^0 заменяется на \mathcal{O}^1 , что приводит к сдвигу на один степени, градуировки и порядка следа. Представитель (6.89) получается из (6.87) применением механизма дуальности. Если же $q-r \geq n$, то имеем

$$H_{r,g=s_1}^q(\mathbf{A}, \sigma_-) = \pi_{\mathbf{A}} \pi_{\Lambda} \pi_{cr} \left[\overbrace{\mathcal{B}^1(\mathcal{C}^2) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^1(\mathcal{C}^2) \otimes \mathcal{B}^{q'}(\mathcal{C}^{q'+1})}^n \right], \quad (6.90)$$

где $q' = q - r - n + 1$.

Все вышесказанное может быть элегантно записано через $\text{mspr}(\mathbf{A}, q, r)$ как во второй теореме в 6.3.6.

Случай когда некоторые веса в \mathbf{A} одинаковы. Пусть $\mathbf{A} = \mathbb{Y}\{(s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N)\}$.

В данном случае имеется на первый взгляд очевидное вырождение, поскольку если $s_i = s_{i+1}$ для некоторого i , то \mathcal{A}^0 и \mathcal{C}^2 как диаграммы одинаковы — тот факт, что \mathcal{A}^0 имеет порядок следа и степень формы равными нулю, а для \mathcal{C}^2 имеем $q = 2$ и $r = 1$, компенсируется тем, что если в \mathbf{A} имеется несколько групп одинаковых весов, то различные разбиения $q = q_1 + q_2 + \dots$, отвечающие

$$\dots \otimes \dots \otimes \underbrace{\mathcal{A}^0 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^0 \otimes \overbrace{\mathcal{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathcal{C}^2}^{q_1}} \otimes \dots \otimes \dots \otimes \underbrace{\mathcal{A}^0 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^0 \otimes \overbrace{\mathcal{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathcal{C}^2}^{q_2}} \otimes \dots \otimes \dots, \quad (6.91)$$

p_i p_j

приводят формально к идентичным представителям класса когомологий, т.е. имеющим одинаковые q, g, r а также определяемыми одной и той же диаграммой Юнга.

Поскольку для $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ имеет место разложение (6.35), то из вышесказанного следует, что мы точно знаем в каких из $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-; \mathbf{X}, q + g, r)$ могут быть нетривиальные когомологии, а также нам известны по отдельности q , g и r того места, где они могут возникнуть. Причём для каждого $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-; \mathbf{X}, q + g, r)$, у которого могут быть нетривиальные когомологии, существуют единственные значения q , g и r того места, где это может случиться. За счёт вырождения кратность когомологий, определяемых некоторой диаграммой \mathbf{X} , может быть больше одного. Используя тот факт, что Эйлера характеристика $\chi = \sum_i (-)^i \dim(H^i)$ комплекса $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-; \mathbf{X}, q + g, r)$ может быть вычислена так же как сумма $\chi' = \sum_i (-)^i \dim(V^i)$ размерностей $\dim(V^i)$ подмодулей V^i в степени i , мы легко можем найти соответствующую кратность, поскольку все кроме одного слагаемого в сумме для χ равны нулю и следовательно в данном случае Эйлера характеристика определяет размерность групп когомологий $H(\mathbf{A}, \sigma_-; \mathbf{X}, q + g, r)$. Вычислить χ' не представляет труда — необходимо подсчитать количество диаграмм с симметрией \mathbf{X} , возникающих как следы порядка r в $\mathbf{A}_g \otimes \mathbb{Y}[q]$ при фиксированной $q + g$.

$\mathfrak{so}(d)$ -тензорное произведение ограниченных представлений. Рассмотрим сначала, какие диаграммы могут возникать в $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}} \otimes \mathbb{Y}[q]$ где $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}} \in \text{Res}_{\mathfrak{so}(d)}^{\mathfrak{so}(d+1)} \mathbf{A}$. Определив $\Delta_i = s_i - s_{i+1}$, и применяя правила из Приложения С.5, получаем

$$\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}} \otimes_{\mathfrak{so}(n)} \mathbb{Y}[q] = \bigoplus_{\{\alpha_j, \beta_i, \gamma_i\}} N_{\{k_1, \dots, k_N\}}^{\{\alpha_j, \beta_i\}} \mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}^{\{\alpha_j, \beta_i, \gamma_i\}}, \quad (6.92)$$

$$\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}^{\{\alpha_j, \beta_i, \gamma_i\}} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline p_1 - 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \alpha_1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \beta_1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \epsilon_1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \gamma_1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline p_2 - 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline s_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \alpha_2 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \beta_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \epsilon_2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \gamma_2 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \alpha_N \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline p_N - 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline s_N \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \epsilon_N \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \beta_N \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \gamma_N \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \alpha_{N+1} \\ \hline \end{array} \end{array} : \begin{array}{l} \alpha_i + \beta_i \leq p_i - 1, \quad \text{for } i = 1 \dots N, \\ \gamma_i \in [-1, 0, \dots, \Delta_i + 1] \end{array} \quad (6.93)$$

Явная формула для кратностей $N_{\{k_1, \dots, k_N\}}^{\{\alpha_j, \beta_i\}}$ представлений также может быть написана через разбиения целых чисел, но нам не потребуется. Важна сама «геометрия» $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}^{\{\alpha_j, \beta_i, \gamma_i\}}$, например, тот факт, что $\gamma_i \in [-1, \Delta_i + 1]$ если $i < N$ и $\gamma_i \in [0, \Delta_i + 1]$ если $i = N$.

Зафиксируем некоторую $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}^{\{\alpha_j, \beta_i, \gamma_i\}}$, а $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}$ фиксировать не будем, рассматривая вклады всех элементов $\text{Res}_{\mathfrak{so}(d)}^{\mathfrak{so}(d+1)} \mathbf{A}$, которые приводят к появлению \mathbf{X} в

тензорном произведении (6.92).

Кратность большая единицы получается из-за того, что некоторые клетки, которые были удалены на этапе взятия следов, потом могут быть снова восстановлены, когда приписываются оставшиеся $q - r$ клеток. Такое возможно для колонок высоты ϵ_i , а также для крайней правой клетки γ_i , если $\gamma_i \in [0, \Delta_i]$. Также отметим, что клетки, отвечающие α_j , β_i , а также $\gamma_k = \Delta_k + 1$ и $\gamma_k = -1$, могут быть приписаны или удалены единственным способом, поэтому влияния на кратность не оказывают, и их удобно выделить из q , g , r , поскольку их количество не варьируется при переходе от элементов одной степени в $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-; \mathbf{X}, q + g, r)$ к элементам другой степени, а также при изменении $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}$ при фиксированном \mathbf{X} . А именно, определим

$$\begin{aligned} q &= Q + q', & Q &= \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j + \sum_{i=1}^N \beta_i + N_{-1} + N_{\Delta+1}, & q' &= N_{\gamma > k} + N_{\gamma < k} + 2\rho, \\ g &= G + g', & G &= \sum_{i=1}^{i=N} (\gamma_i + \delta_{\gamma_i, -1} - \delta_{\gamma_i, \Delta_i + 1}), & g' &= N_{\gamma < k} - N_{\gamma > k} \\ r &= R + r', & R &= \sum_{i=1}^N \beta_i + N_{-1}, & r' &= N_{\gamma > k} + \rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{-1} &= \#\{i : \gamma_i = -1\} & N_{\Delta+1} &= \#\{i : \gamma_i = \Delta_i + 1\}, \\ N_{\gamma < k} &= \#\{i : \gamma_i < k_i, \gamma_i \neq -1, \Delta_i + 1\} & N_{\gamma > k} &= \#\{i : \gamma_i > k_i, \gamma_i \neq -1, \Delta_i + 1\}. \end{aligned}$$

Числа Q , R и G отвечают константным вкладом в q , r и g , которые определяют диаграммой \mathbf{X} и не зависят от того, из какой конкретно диаграммы $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}$ она была получена. Число $N_{\gamma < k}$ определяют сколько k_i в $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}$ превосходят γ_i , а $N_{\gamma > k}$ наоборот определяет число k_i в $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}$ меньших γ_i . Отметим, что в силу правил тензорного произведения γ_i может отличаться от k_i не более чем на единицу, $\gamma_i = k_i, k_i \pm 1$. Число ρ как раз управляет кратностью, а именно, это число тех клеток, которые сначала были отрезаны от $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}$, а потом вновь приписаны. Таким образом, кратность \mathbf{X} определяется числом разбиений ρ по ϵ_i и тем γ_i , которые равны k_i (по модулю некоторых тонкостей рассмотренных ниже).

Эйлерова характеристика. Теперь мы приступим к вычислению собственно Эйлеровой характеристики. Хотя это необходимо сделать лишь для специальных \mathbf{X} , мы проведём вычисления для произвольного \mathbf{X} . Сначала для \mathbf{X} мы построим характеристическую функцию $F(z, t)$, коэффициент при $z^{g'} t^{q'}$ которой равен количеству способов получить \mathbf{X} в тензорном произведении $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}} \otimes \mathbb{Y}[Q + q']$, так что $\sum_i k_i = G + g'$. Таким образом, z считает градуировку, точнее её превышение над базовым уровнем G , а t считает количество затраченных клеток.

Для успеха вычислений важно, что вся диаграмма \mathbf{X} может быть разбита на части, не оказывающие друг на друга влияния при вычислении кратности в тензорном произведении, а также тот факт, что характеристическая функция для \mathbf{X} получается перемножением характеристических функций таких частей. Ниже в таблице 6.3.8

приводятся всевозможные случаи вместе с характеристическими функциями. Определена $f_\epsilon(t) = (1 - t^{2\epsilon+2})/(1 - t^2)$. Легко видеть, что производящая функция для Эйлеровой характеристики $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-; \mathbf{X}, q + g, r)$ есть просто $F(-t, t)$, где степень t равна $2r'$, а коэффициент при $t^{2r'}$ с точностью до знакового фактора, который нас не интересует, равен Эйлеровой характеристике $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}_-; \mathbf{X}, q + g, r + r')$. Заметим, что $F(-t, t)$ может быть нетривиальным полиномом, а не мономом, поскольку одна и та же диаграмма \mathbf{X} может возникать в тензорном произведении при разных значениях r .

Из таблицы 6.3.8 сразу видно, что те \mathbf{X} , у которых хотя бы один γ_i не принимает одно из крайних значений $\{-1, 0, \Delta_i, \Delta_i + 1\}$, приводят к нулевой Эйлеровой характеристике, это как раз отвечает тому факту, что в $\mathfrak{hR}^{s_i, s_{i-1}}$ когомологии имеются только в низшей и высшей градуировках. Также $\chi = 0$, если встречается комбинация вида $\gamma_{i-1} = 0, \gamma_i = \Delta_i$, отсюда в силу правил тензорного произведения следует, что если случай 2 из таблицы и встречается в диаграмме \mathbf{X} , то только один раз.

Вычисление $F(-t, t)$ приводит к двум ситуациям

$$I : \quad F(-t, t) = \prod_{i:\gamma_i=\Delta_i} t^{2(\epsilon_i+1)}, \quad (6.94)$$

$$II : \quad F(-t, t) = \prod_{i:\gamma_i=\Delta_i} t^{2(\epsilon_i+1)}(1 - t^{2\epsilon'+2}), \quad (6.95)$$

где ϵ' есть то ϵ_i , которое отвечает случаю 2 из таблицы.

I. В первом случае имеем все γ_i принимающими одно из максимальных значений $\{\Delta_i, \Delta_i + 1\}$, т.е. $g = s_1$, а порядок следа оказывается максимальным для данной диаграммы, которая состоит из блоков вида

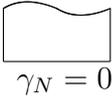
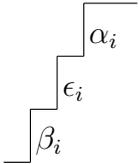
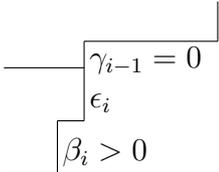
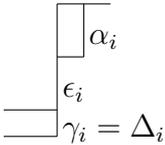
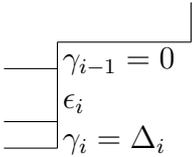
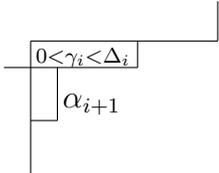
$$\mathcal{BC}_j \sim \pi_{\mathbb{Y}\{s_j, p_j\}} \pi_{\Lambda} \pi_{cr} \left[\underbrace{\overbrace{\mathcal{B}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^1}^{\alpha_j} \otimes \overbrace{\mathcal{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathcal{C}^2}^{\epsilon_j+1}}_{p_j} \right], \quad (6.96)$$

тот факт, что $r' = \sum_i (\epsilon_i + 1)$, говорит о том, что \mathcal{A}^0 не могут встречаться — вместо них встречается \mathcal{C}^2 . Первый случай отвечает $q - r > n$ и максимальной градуировке, когда представители когомологий не имеют дуальной пары.

II. Во втором случае, $F(-t, t)$ состоит из двух мономов, отвечающих представителям одного и того же типа \mathbf{X} , но с разными r' , отличающимися на $\epsilon' + 1$. Здесь мы отсылаем к рис. 6.3, иллюстрирующему второй случай. Представители когомологий отвечают диаграммам вида

$$\pi_{\mathbf{A}} [\mathcal{BC}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{BC}_{k-1} \otimes \mathcal{BAD}_k \otimes \mathcal{AD}_{k+1} \otimes \dots \otimes \mathcal{AD}_N], \quad (6.97)$$

Таблица 6.1: В таблице изображены части диаграммы $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_N\}}^{\{\alpha_j, \beta_i, \gamma_i\}}$, для которых характеристические функции могут быть вычислены независимо. Также приведены получаемые из них производящие функции для Эйлеровой характеристики.

	иллюстрация	$F(z, t)$	$F(-t, t)$	описание
1		$1 + zt$	$1 - t^2$	Последний блок. Существует два способа получить $\gamma_N = 0$: (1) взять $k_N = 0$ и ничего не делать; (2) взять $k_N = 1$ (z), а затем след (t)
2		$f_{\epsilon_i}(t)$	$f_{\epsilon_i}(t)$	группа из ϵ_i 'изолированных' клеток. можно отрезать, а затем добавлять назад k клеток, $k \in [0, \epsilon_i]$, что даёт $1 + t^2 + \dots + t^{2\epsilon_i}$
3		$f_{\epsilon_i+1}(t) + zt f_{\epsilon_i}(t)$	1	ϵ_i связана с $\gamma_i = 0$, если $k_i = 0$, то ϵ_i увеличивается до $\epsilon_i + 1$; если $k_i = 1$, то дополнительно $g' = 1$ и одну клетку необходимо удалить
4		$f_{\epsilon_i+1}(t) + z^{-1}t f_{\epsilon_i}(t)$	$t^{2(\epsilon_i+1)}$	ϵ_i связана с $\gamma_i = \Delta_i$, в случае если $k_i = \Delta_i$, имеем f_{ϵ_i+1} ; второй вариант $k_i = \Delta_i - 1$, т.е. $g' = -1$ и необходимо добавить ещё одну клетку
5		$f_{\epsilon_i+2}(t) + t^2 f_{\epsilon_i}(t) + f_{\epsilon_i+1}(t)(z + z^{-1})t$	0	Случай, включающий в себя элементы случаев 3 и 4; если же $k_{i-1} = 0$ и $k_i = \Delta_i$, то ϵ_i эффективно увеличивается до $\epsilon_i + 2$
6		$1 + t^2 + t(z + z^{-1})$	0	Случай, когда γ_i не принимает крайних значений: можно ничего не делать, если $k_i = \gamma_i$ или отрезать, а затем прибавить клетку; если $k_i = \gamma_i \pm 1$ - клетку необходимо приписать (отрезать)

где

$$\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{D}_k \sim \pi_{\mathbb{Y}\{s_k, p_k\}} \pi_{\Lambda} \pi_{cr} \left[\underbrace{\overbrace{\mathcal{B}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^1}^{\alpha_k} \otimes \overbrace{\mathcal{A}^0 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^0}^{\epsilon_k} \otimes \overbrace{\mathcal{D}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{D}^1}^{\beta_k} \otimes \mathcal{A}^0}_{p_k} \right], \quad (6.98)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{D}_j \sim \pi_{\mathbb{Y}\{s_j, p_j\}} \pi_{\Lambda} \pi_{cr} \left[\underbrace{\overbrace{\mathcal{A}^0 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^0}^{\epsilon_j} \otimes \overbrace{\mathcal{D}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{D}^1}^{\beta_j} \otimes \mathcal{A}^0}_{p_j} \right], \quad (6.99)$$

а последний блок $\mathcal{A}\mathcal{D}_N$ оканчивается на \mathcal{O}^0 вместо \mathcal{A}^0 . Номер k отвечает номеру блока, для которого реализуется случай 2, т.е. $\epsilon_k = \epsilon'$. Таким образом, все γ_j с $j = 1, \dots, k-1$ принимают одно из максимальных значений $\{\Delta_j, \Delta_j + 1\}$, а все остальные γ_i с $i = k, \dots, N$ принимают одно из минимальных значений $\{-1, 0\}$.

Представитель второго класса когомологий, дуальный первому, имеет вид

$$\pi_{\Lambda} [\mathcal{B}\mathcal{C}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}\mathcal{C}_{k-1} \otimes \mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}_k \otimes \mathcal{A}\mathcal{D}_{k+1} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}\mathcal{D}_N], \quad (6.100)$$

где

$$\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}_k \sim \pi_{\mathbb{Y}\{s_k, p_k\}} \pi_{\Lambda} \pi_{cr} \left[\underbrace{\overbrace{\mathcal{B}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^1}^{\alpha_k} \otimes \overbrace{\mathcal{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathcal{C}^2}^{\epsilon_k} \otimes \overbrace{\mathcal{D}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{D}^1}^{\beta_k}}_{p_k} \right], \quad (6.101)$$

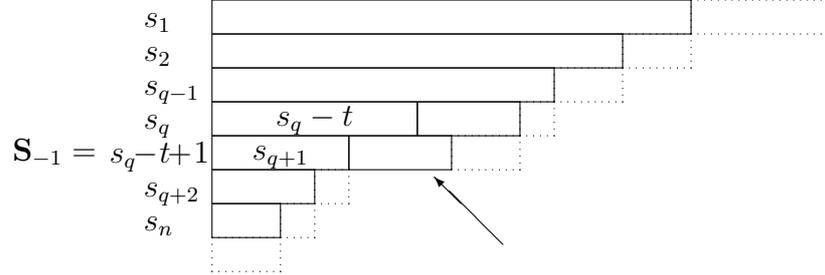
и в последнем блоке $\mathcal{A}\mathcal{D}_N$ оканчивается на \mathcal{O}^1 вместо \mathcal{A}^0 , что и даёт сдвиг порядка следа на $\epsilon' + 1$ и сдвиг g на единицу.

В заключении отметим, что несмотря на возможность большого вырождения, отмеченную вначале, в результате применения проекторов, некоторые когомологии исчезают, а те, которые остаются, лишены вырождения — кратность представителя с симметрией \mathbf{X} равна единице. Также заметим, что (6.97) и (6.100) есть некоторые представители, и на самом деле тот же самый представитель может быть получен и другим образом (заменой некоторых \mathcal{C}^2 на \mathcal{A}^0 в блоках $1, \dots, k$, а затем такое же количество обратных замен в блоках $k+1, \dots, N$). Было доказано, что размерность группы когомологий, определяемой \mathbf{X} , $q+g$ и r равна 1, т.е. кратность \mathbf{X} равна единице. Хотя это и не влияет на конечный ответ в терминах диаграмм, а не конкретных представителей, можно показать, что предложенные представители действительно не являются точными. Легко видеть, что полученный ответ совпадает с заявленным в терминах $\text{mspr}(\mathbf{A}, q, r)$ во второй теореме в (6.3.6).

6.3.9 Замечания о Вейлевском модуле и σ_-

Как уже было определено, обобщённый тензор Вейля — это калибровочно-инвариантная комбинация производных потенциала наименьшего порядка, которая может быть отлична от нуля на массовой оболочке. Сам тензор Вейля является представителем в старшей градуировке σ_- -когомологий $\mathbf{H}^{q+1}(\mathbf{A}, \sigma_-)$, если калибровочное поле есть q -форма $W_q^{\mathbf{A}}$. Старшие когомологии содержат в том числе тождества Бьянки для тензора Вейля.

Рис. 6.3: На рисунке изображён спектр Вейлевского модуля в терминах его разложения на неприводимые тензоры алгебры Лоренца. Непрерывной линией нарисован сам тензор Вейля, точечной линией показаны места, добавление клеток в которые соответствует потомкам тензора Вейля.



Хотя написать полную развёрнутую систему уравнений, включающую вейлевский модуль, и нелегко для одного конкретного поля, но определить спектр полей, составляющих его, достаточно просто. Действительно, калибровочная инвариантность тензора Вейля обязана тому факту, что нельзя построить тензор смешанного типа симметрии, у которого две ковариантные производные отвечают на диаграммном языке двум клеткам друг над другом, например, в случае спина 2, имеем

$$\xi^a \sim \boxed{\times}, \quad \phi^{aa} \sim \boxed{\square\square}, \quad \delta\phi^{aa} = \partial^a \xi^a, \quad C^{aa,bb} \sim \boxed{\frac{\times\partial}{\partial\partial}}, \quad (6.102)$$

т.е. при подстановке закона калибровочных преобразований в выражение для тензора Вейля две производные оказываются в одной колонке.

В общем случае, необходимо брать ковариантные производные D , симметризуя их с $(q+1)$ строкой в диаграмме, и если количество производных равно $(s_q - t + 1 - s_{q+1})$, то мы получаем калибровочно-инвариантный объект. Далее, для определения спектра Вейлевского модуля необходимо выяснить какие его производные нетривиальны на массовой оболочке. Для этого мы следуем тому же рецепту, а именно, те тензоры входят в вейлевский модуль, симметрия которых определяется такими диаграммами, что ни одна новая по сравнению с симметрией \mathbf{S}_{-1} самого тензора Вейля клетка не оказывается в одной колонке с $(s_q - t + 1 - s_{q+1})$ клетками, отвечающими производным потенциала $\phi^{\mathbf{S}_0}$. Результат показан на рис. 6.3.

Отметим, что сам тензор Вейля не является уникальным в том смысле, что разные калибровочные поля могут иметь тензор Вейля одного и того же типа симметрии (чего не было в плоском пространстве!), однако сам спектр Вейлевского модуля, конечно, является уникальным и однозначно определяет тип калибровочного поля (\mathbf{S}, q, t) .

Оказывается, что используя результаты и методы для σ_- -когомологий $\mathbf{H}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ в калибровочном модуле мы можем найти σ_- -когомологии Вейлевского модуля, поскольку спектр Вейлевского модуля похож на ограничение одного неприводимого тензорного представления алгебры (анти)-де Ситтера, у которого длина первой строки стремится к бесконечности, за одним исключением в $q+1$ строке (на рис. 6.3 показано стрелкой). Опуская детали, можно, как и в случае калибровочного модуля,

вложить комплекс в тензорное произведение простых комплексов, ассоциированных с каждой строкой, а затем, устремив длину первой строки к бесконечности, взять стабильную в этом пределе часть когомологий.

Утверждение, на доказательстве которого мы не останавливаемся, состоит в том, что вычисленные таким образом когомологии Вейлевского модуля находятся во взаимно однозначном соответствии с частью σ_- -когомологий $H(\mathbf{A}, \sigma_-)$ калибровочного модуля, отвечающей тензору Вейля и тождеством Бьянки для него, что подтверждает правильность найденного спектра.

6.3.10 Некоторые примеры σ_- -когомологий

$\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s-1, s-1)$. Результаты основной теоремы, применённые к $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s-1, s-1)$, дают следующий список σ_- -когомологий, где мы ограничиваемся младшими степенями,

$q \backslash g$	0	1	$s-1$
0	$\boxed{s-1}$	\emptyset	\emptyset
1	$\boxed{s} \oplus \boxed{s-2}$	\emptyset	\emptyset
2	\emptyset	$\boxed{s} \oplus \boxed{s-2}$	\boxed{s}
3	\emptyset	$\boxed{s-1}$	$\boxed{s} \oplus \boxed{s-1}$

Рассмотрим теорию с калибровочным полем $W_1^{\mathbf{A}}$, которое, как известно [146], отвечает безмассовому полю спина s . Интерпретация σ_- -когомологий даёт следующее: представитель H^0 есть бесследовый калибровочный параметр ранга $(s-1)$, $\xi^{a(s-1)}$. Динамическое поле в H^1 представлено двумя неприводимыми компонентами рангов s и $s-2$, которые могут быть объединены в одно дважды бесследовое поле $\phi^{a(s)}$, поле Фронсдала, а закон калибровочных преобразований имеет первый порядок, $\delta\phi^{a(s)} = D^a \xi^{a(s-1)}$. В H^2 присутствуют уравнения второго порядка (разность градуировок между представителями полей и уравнений плюс один), которых столько же сколько полей, следовательно, система допускает лагранжиан [146, 147]. В H^2 также есть тензор Вейля, $C^{a(s), b(s)}$, который является s -ой производной динамических полей. В H^3 присутствует тождество Бьянки для уравнений Фронсдала, которое прямо отвечает наличию калибровочной инвариантности. Заметим, что тождеств столько же сколько и калибровочных параметров. В H^3 также присутствуют тождества Бьянки для тензора Вейля.

$\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1, s_2)$. Низшие σ_- -когомологии приведены ниже в таблице. Рассмотрим теорию с калибровочным полем $W_1^{\mathbf{A}}$, которое, как известно из Главы 5 и работы [3], отвечает частично-безмассовому полю спина (s_1+1) и глубиной безмассовости $t = s_1 - s_2 + 1$. Действительно, H^0 содержит калибровочный параметр $\xi^{a(s_2)}$. Динамическими полями являются $\phi^{a(s_2-1)}$, $\phi^{a(s_2)}$ и примарное поле (наибольшего ранга) $\phi^{a(s_1+1)}$. Появление полей младшего ранга, которые не могут быть вообще говоря ассоциированы со следами примарного поля $\phi^{a(s_1+1)}$, объясняется тем, что частично-безмассовые поля являются промежуточными между массивными и безмассовыми.

Для лагранжева описания массивного поля необходимы бесследовые дополнительные к полю $\phi^{a(s_1+1)}$ поля рангов $s_1 - 1, s_1 - 2, \dots, 1, 0$, которые оказываются равными нулю в силу уравнений движения. Для частично-безмассовых полей эта цепочка укорачивается за счёт удаления полей младших спинов $s_2 - 2, \dots, 0$. Однако теперь на уравнениях движения не все дополнительные поля из оставшихся могут быть исключены. Таковыми и являются поля $\phi^{a(s_2-1)}$ и $\phi^{a(s_2)}$. Закон калибровочных преобразований для примарного поля имеет схематический вид $\delta\phi^{a(s_1+1)} = D^a \dots D^a \xi^{a(s_2)} + \dots$. В \mathbf{H}^2 присутствует волновое уравнение, тензор Вейля и ещё две связи, вовлекающие дополнительные поля.

$q \backslash g$	0	1	$s_1 - s_2$	$s_1 - s_2 + 1$	s_1
0	$\boxed{s_2}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	$\boxed{s_2-1}$	$\boxed{s_2}$	$\boxed{s_1+1}$	\emptyset	\emptyset
2	\emptyset	$\boxed{s_2-1}$	$\boxed{s_1}$	$\boxed{s_1+1}$	$\begin{array}{c} \boxed{s_1+1} \\ \boxed{s_2+1} \end{array}$
3	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$\boxed{s_1}$	$\begin{array}{c} \boxed{s_1+1} \\ \boxed{s_2+1} \\ \square \oplus \begin{array}{c} \boxed{s_1+1} \\ \boxed{s_2} \end{array} \end{array}$

Тот факт, что среди представителей \mathbf{H}^3 нет тождества Бьянки для калибровочной симметрии $\xi^{a(s_2)}$ объясняется тем, что σ_- , как оператор, отвечающий за выражение полей старшего ранга через производные полей младшего ранга, не может характеризовать тождества Бьянки вида $D^b \dots D^b G_{b(s_1-s_2+1)a(s_2)} + \dots \equiv 0$, где $G^{a(s_1+1)} = \square\phi^{a(s_1+1)} + \dots$ есть уравнения движения для $\phi^{a(s_1+1)}$, поскольку в данном случае тождества Бьянки отвечают обратной ситуации, т.е. выражению полей младшего ранга через дивергенции полей старшего ранга.

$\mathbf{A} = \mathbb{Y}\{(s-1, q+1)\}$. Рассмотрим теорию с калибровочным полем $W_q^{\mathbf{A}}$, которое описывает безмассовое поле спина $\mathbf{S} = \mathbb{Y}\{(s, q)\}$, [152]. Согласно [74] только для таких полей количество калибровочных симметрий в пространстве Минковского и (анти)-де Ситтера совпадают, т.е. при переходе в (анти)-де Ситтер количество степеней свободы не меняется, поэтому именно поля такого спина (диаграмма имеет вид одного блока и не отвечает, строго говоря, представлениям настоящего смешанного типа симметрии) могут быть названы настоящими безмассовыми. Таблица низших кохомологий приведена ниже, где мы ввели для удобства $\mathbf{X} = \mathbb{Y}\{(s-1, q)\} = \mathbf{A}^1 = \dots = \mathbf{A}^{q+1}$.

Калибровочный параметр на самом глубоком уровне приводимости, определяемый \mathbf{H}^0 , есть бесследовый тензор с симметрией \mathbf{X} . Заметим, что $\text{mspr}(\mathbf{A}, r) = \text{mspr}(\mathbf{X}, r)$ для $r \leq q$. Далее калибровочные параметры в \mathbf{H}^r , $r = 1, \dots, q-1$, наряду с примарной компонентой

$$\mathbb{Y}\{(s, r), (s-1, q-r)\} = \text{hwp}(\mathbf{X}, r) \subset \text{mspr}(\mathbf{X}, r) \quad (6.103)$$

содержат также и некоторые следы, в явной форме их можно извлечь из $\xi_r^{\mathbf{A}}$ в виде

$$\xi^{a(s), \dots, b(s), c(s-1), \dots, u(s-1)} = \xi^{a(s-1), \dots, b(s-1), c(s-1), \dots, u(s-1), \bullet(s-1) | \overbrace{a \dots b}^r}. \quad (6.104)$$

Аналогично, динамическое поле метрической формулировки в \mathbf{H}^q имеет вид

$$\phi^{a(s), \dots, u(s)} = \xi^{a(s-1), \dots, u(s-1), \bullet(s-1) | \overbrace{a \dots u}^q}. \quad (6.105)$$

В \mathbf{H}^{q+1} имеются уравнения второго порядка, которых столько же сколько и динамических полей. Также в \mathbf{H}^{q+1} есть тензор Вейля, который является неприводимым тензором алгебры Лоренца с симметрией \mathbf{A} . В силу определения mspr для диаграмм, у которых некоторые веса одинаковые (в данном случае все), $\text{mspr}(\mathbf{A}, q+1)$ содержит единственную компоненту. Для старших степеней $q+2, \dots$ $\text{mspr}(\mathbf{A})$ уже содержит некоторые следы. Сразу отметим, что видна дуальность вида $\mathbf{H}_{g=0}^{q-k} \sim \mathbf{H}_{g=1}^{q+k+1}$, $k = 0, \dots, q$, означающая, что между полями и уравнениями, а также между калибровочными симметриями и тождествами Бьянки имеется взаимнооднозначное соответствие.

$q \setminus g$	0	1	$s-1$
0	$\text{msp}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$	\emptyset	\emptyset
..
$q-1$	$\text{msp}(\mathbf{X}, q-1)$	\emptyset	\emptyset
q	$\text{msp}(\mathbf{X}, q)$	\emptyset	\emptyset
$q+1$	\emptyset	$\text{msp}(\mathbf{X}, q)$	$\text{mspr}(\mathbf{A}, q+1) = \mathbf{A}$
$q+2$	\emptyset	$\text{msp}(\mathbf{X}, q-1)$	$\text{mspr}(\mathbf{A}, q+2)$
..
$2q+1$	\emptyset	$\text{msp}(\mathbf{X}, 0)$	$\text{mspr}(\mathbf{A}, 2q+1)$
$2q+2$	\emptyset	\emptyset	$\text{mspr}(\mathbf{A}, 2q+2)$

Ниже мы также подробно рассмотрим поле смешанного типа симметрии спина $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, s_2)$.

6.3.11 Выводы по σ_- -когомологиям

Были вычислены σ_- -когомологии для алгебраического комплекса, $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ связанного с дифференциальным комплексом $\mathcal{C}(\mathbf{A}, D_\Omega)$ обобщённых связностей алгебры (анти)-де Ситтера со значениями в произвольном неприводимом тензорном представлении \mathbf{A} алгебры (анти)-де Ситтера. Комплекс $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ возникает при попытке интерпретировать теорию в терминах обобщённых полей Янга-Миллса в терминах метрических полей.

Ответ по σ_- -когомологиям даёт полную информацию о динамических независимых полях, калибровочных параметрах, возможных уравнениях и тождествах Бьянки для них. В отличие от столь информативного комплекса $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$, в следствии леммы Пуанкаре комплекс $\mathcal{C}(\mathbf{A}, D_\Omega)$ локально точен и не несёт какой-либо полезной информации.

Результаты по σ_- -когомологиям важны при построении лагранжианов, поскольку лагранжевы уравнения должны занулять представителей $\mathbf{H}(\sigma_-)$, отвечающих

независимым уравнениям движения, что было показано прямыми методами для полей спина s в пространстве (анти)-де Ситтера [40, 147], для безмассовых полей в пространстве Минковского в $\{2\}$ и для полей спина $\mathbb{Y}[h_1, h_2]$ в пространстве (анти)-де Ситтера в [150].

Путём наложения алгебраических калибровок и исключением вспомогательных полей, теория может быть сформулирована в терминах представителей σ_- -когомологий, что приводит к минимальной метрической формулировке. При этом, конечно, теряется структура связностей, поскольку в терминах полей ограничение на $\mathbf{H}(\sigma_-)$ заключается в наложении некоторых условий с помощью фоновой тетрады, вовлекающих в себя как индексы формы, так и касательные индексы, а также исключении вспомогательных полей и наложении всех возможных алгебраических калибровок.

Тот факт, что σ_- -когомологии в секторе тензора Вейля и тождеств Бьянки для него полностью соответствуют когомологиям в Вейлевском модуле, говорит о том, что последний был правильно определён.

6.4 Пример калибровочного поля $(\mathbb{Y}(s_1, s_2), 1, 1)$

В качестве примера рассмотрим безмассовое унитарное поле спина $\mathbb{Y}(s_1, s_2)$, т.е. $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, s_2)$ и $q = t = 1$. Точная последовательность (1.15), определяющая представление алгебры (анти)-де Ситтера $\mathcal{H}(E_0; \mathbb{Y}(s_1, s_2))$ с $E_0 = d + s_1 - 3$ по формуле (1.16), имеет вид

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(E_0 + 1; \mathbb{Y}(s_1 - 1, s_2)) \longrightarrow \mathcal{D}(E_0; \mathbb{Y}(s_1, s_2)) \longrightarrow \mathcal{H}(E_0; \mathbb{Y}(s_1, s_2)) \longrightarrow 0.$$

On-shell'ная метрическая формулировка, [72, 73]. Потенциал поля $\phi^{a(s_1), b(s_2)}$ есть неприводимый тензор алгебры Лоренца с симметрией \mathbf{S} и удовлетворяет (1.20)-(1.21)

$$(\square + m^2)\phi^{a(s_1), b(s_2)} = 0, \quad (6.106)$$

$$D_c \phi^{a(s_1-1)c, b(s_2)} = D_c \phi^{a(s_1), b(s_2-1)c} = 0, \quad (6.107)$$

где массово-подобное слагаемое определяется по $(\mathbf{S}, 1, 1)$ согласно (1.30)

$$m^2 = \lambda^2 ((s_1 - 2)(d + s_1 - 3) - s_1 - s_2) \quad (6.108)$$

Уравнения инвариантны относительно калибровочных преобразований $\delta \phi^{a(s_1), b(s_2)} = D^a \xi^{a(s_1-1), b(s_2)}$, где калибровочный параметр есть неприводимый тензор с симметрией $\mathbf{S}_1 = \mathbb{Y}(s_1 - 1, s_2)$ удовлетворяющий уравнениям (1.20)-(1.21) с

$$m_\xi^2 = \lambda^2 ((s_1 - 1)(d + s_1 - 2) - s_1 - s_2 + 1). \quad (6.109)$$

Off-shell'ная метрическая формулировка. Расширение состава полей, необходимое для off-shell'ной формулировки, приводит к тому, что потенциал $\phi^{a(s_1), b(s_2)}$ больше не неприводимый тензор, а удовлетворяет следовым условиям вида

$$\eta_{cc} \phi^{a(s_1), b(s_2-2)cc} \equiv 0, \quad \eta_{cc} \eta_{dd} \phi^{a(s_1-4)ccdd, b(s_2)} \equiv 0. \quad (6.110)$$

Калибровочный параметр $\xi^{a(s_1-1),b(s_2)}$ остаётся неприводимым, поскольку находится на первом и последнем уровне калибровочных симметрий,

$$\eta_{cc}\xi_1^{a(s_1-3)cc,b(s_2)} \equiv \eta_{cc}\xi_1^{a(s_1-2)c,cb(s_2-1)} \equiv \eta_{cc}\xi_1^{a(s_1-1),b(s_2-2)cc} \equiv 0. \quad (6.111)$$

Из условий (6.110) для $\phi^{a(s_1),b(s_2)}$ следует, что разложение его на неприводимые компоненты имеет вид

$$\phi^{a(s_1),b(s_2)} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline s_1-2 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline s_1-1 \\ \hline s_2-1 \\ \hline \end{array}, \quad (6.112)$$

что можно сравнить со случаем безмассового поля того же спина в пространстве Минковского (1.41). Разложение для калибровочного параметра тривиально

$$\xi_1^{a(s_1-1),b(s_2)} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline s_1-1 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array}. \quad (6.113)$$

Закон калибровочных преобразований сохраняет свой вид

$$\delta\phi^{a(s_1),b(s_2)} = D^a\xi^{a(s_1-1),b(s_2)}. \quad (6.114)$$

Несмотря на то, что дивергенции параметра $\xi^{a(s_1-1),b(s_2)}$ больше не обращаются в ноль как в (1.21), можно убедиться в том, что алгебраические условия (6.110) и (6.111) совместны с (6.114) и не приводят к каким-либо ограничениям на калибровочный параметр.

Уравнения движения состоят из двух частей

$$D_n D^n \phi^{a(s_1),b(s_2)} - D^a D_n \phi^{a(s_1-1)n,b(s_2)} + \frac{1}{2} D^a D^a \phi^{a(s_1-2)n,b(s_2)} + \\ + 2\lambda^2 \eta^{aa} \phi^{a(s_1-2)n,b(s_2)} + 2\lambda^2 \eta^{ab} \phi^{a(s_1-1)n,b(s_2-1)} + m^2 \phi^{a(s_1),b(s_2)} = 0, \quad (6.115)$$

$$D^a \phi^{a(s_1-1)n,b(s_2-1)} - D_n \phi^{a(s_1),b(s_2-1)n} = 0, \quad (6.116)$$

где первое уравнение является аналогом волнового уравнения (6.106) на расширенном составе полей и после наложения дифференциальных калибровок сводится к нему; второе уравнение служит для исключения лишних степеней свободы связанных с полями спинов $\mathbb{Y}(s_1, s_2 - i)$, $i = 1, \dots, s_2$, поскольку $D_c \phi^{a(s_1),b(s_2-1)c} = 0$ не может быть наложено как условие калибровки, так как в отличие от аналогичного поля в пространстве Минковского отсутствует дополнительная калибровочная симметрия (1.43). (6.116) представляет собой калибровочно-инвариантную реализацию условия $D_c \phi^{a(s_1),b(s_2-1)c} = 0$. Отметим, что (6.106) и (6.116) должны рассматриваться вместе, так, например, уравнение (6.106) как тензор обладает типом симметрии \mathbf{S} только при условии, что выполнено (6.116).

Можно показать, что (6.115), (6.116) вместе с калибровочными преобразованиями (6.114) приводят к правильному числу степеней свободы, соответствующему неприводимому унитарному представлению $\mathcal{H}(E_0; \mathbb{Y}(s_1, s_2))$.

Развёрнутая формулировка, (A)dS_d-ковариантно. Согласно предположению [152], калибровочный модуль для поля $(\mathbb{Y}(s_1, s_2), 1, 1)$ представлен один-формой

$$W_1^{A(s_1-1), B(s_1-1), C(s_2)}$$

со значениями в неприводимом представлении алгебры (анти)-де Ситтера, определяемом диаграммой Юнга $\mathbf{A} = \mathbb{Y}(s_1 - 1, s_1 - 1, s_2)$. Закон калибровочных преобразований и напряжённость имеют вид

$$\delta W_1^{A(s_1-1), B(s_1-1), C(s_2)} = D_\Omega \xi_0^{A(s_1-1), B(s_1-1), C(s_2)}, \quad (6.117)$$

$$R_2^{A(s_1-1), B(s_1-1), C(s_2)} = D_\Omega W_1^{A(s_1-1), B(s_1-1), C(s_2)}. \quad (6.118)$$

Напряжённость явно калибровочно-инвариантна, $\delta R_2^{A(s_1-1), B(s_1-1), C(s_2)} = 0$.

Правильные уравнения накладываются путём зануления всех компонент напряжённости, кроме обобщённого тензора Вейля и его потомков. Тензор Вейля $C^{a(s_1), b(s_1)}$ есть неприводимый тензор с симметрией $\mathbb{Y}(s_1, s_1)$. Среди всех его потомков $C^{a(s_1+i), b(s_1), c(j)}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $j = 0, \dots, s_2$ те, что имеют $i = 0$, связаны с калибровочным модулем. Весь набор $C^{a(s_1), b(s_1), c(j)}$, $j = 0, \dots, s_2$ может быть вложен в один неприводимый тензор алгебры (анти)-де Ситтера $C_0^{A(s_1), B(s_1), C(s_2)}$ с условием

$$V_M \left(C_0^{A(s_1), B(s_1-1)M, C(s_2)} - \frac{s_2}{s_1 - s_2 + 1} C_0^{A(s_1), B(s_1-1)C, C(s_2-1)M} \right) \equiv 0, \quad (6.119)$$

которое удаляет компоненты $\text{Res}(\mathbb{Y}(s_1, s_1, s_2))$ с симметрией $\mathbb{Y}(s_1, s_1 - i, j)$ с $i = 1, \dots, s_1 - s_2$.

Таким образом, уравнения имеют вид

$$R_2^{A(s_1-1), B(s_1-1), C(s_2)} = E_M E_N C_0^{A(s_1-1)M, B(s_1-1)N, C(s_2)}, \quad (6.120)$$

и мы не будем рассматривать связи для $C_0^{A(s_1), B(s_1), C(s_2)}$, возникающие из тождеств Бьянки $D_\Omega R_2^{A(s_1-1), B(s_1-1), C(s_2)} \equiv 0$.

Развёрнутая формулировка, Лоренц-ковариантно. Формулировка в терминах связностей алгебры Лоренца получается редукцией от представления алгебры (анти)-де Ситтера \mathfrak{g} к представлениям алгебры Лоренца, разложение имеет вид

$$\text{Res}_{\mathfrak{so}(d-1,1)}^{\mathfrak{g}} \left(\begin{array}{|c|} \hline s_1 - 1 \\ \hline s_1 - 1 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array} \right) = \bigoplus_{j=0}^{j=s_1-s_2-1} \bigoplus_{i=0}^{i=s_2} \begin{array}{|c|} \hline s_1 - 1 \\ \hline s_2 + j \\ \hline i \\ \hline \end{array}. \quad (6.121)$$

Следовательно, калибровочное поле $W_1^{\mathbf{A}}$ раскладывается на следующий набор полей

$$W_1^{A(s_1-1), B(s_1-1), C(s_2)} \longleftrightarrow \omega_1^{a(s_1-1), b(s_1-i), c(j)}, \quad i \in [1, s_1 - s_2], \quad j \in [0, s_2]. \quad (6.122)$$

Аналогично для калибровочного параметра и напряжённости.

Динамическое поле $\phi^{a(s_1), b(s_2)}$, которое является представителем $\mathbf{H}_{g=0}^{q=1}(\sigma_-)$, вложено в обобщённый репер

$$e_1^{a(s_1-1), b(s_2)} = W_1^{a(s_1-1), b(s_2) \bullet (s_1-s_2-1), \bullet (s_2)} \quad (6.123)$$

Таблица 6.2: В таблице показана карта σ_- -когомологий релевантных для поля $\phi^{a(s_1),b(s_2)}$, $H_g^q(\mathbf{A}, \sigma_-)$ для низших степеней q .

$q \backslash g$	0	1	$s_1 - s_2 - 1$	$s_1 - s_2$	$s_1 - 1$
0	$\begin{array}{ c } \hline s_1-1 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	$\begin{array}{ c } \hline s_1 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c } \hline s_1-2 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c } \hline s_1-1 \\ \hline s_2-1 \\ \hline \end{array}$		\emptyset	\emptyset	\emptyset
2	$\begin{array}{ c } \hline s_1 \\ \hline s_2-1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c } \hline s_1-2 \\ \hline s_2-1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline s_1 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c } \hline s_1-2 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline s_1 \\ \hline \end{array}$	\emptyset	\emptyset
3	\emptyset	$\begin{array}{ c } \hline s_1 \\ \hline s_2-1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c } \hline s_1-2 \\ \hline s_2-1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c } \hline s_1-1 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline s_1 \\ \hline s_1-1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline s_1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline s_1 \\ \hline s_1 \\ \hline s_1+1 \\ \hline \end{array}$
4	\emptyset	$\begin{array}{ c } \hline s_1-1 \\ \hline s_2-1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline s_1-1 \\ \hline s_1-1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline s_1 \\ \hline s_1-1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline s_1 \\ \hline s_1 \\ \hline s_2+1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c } \hline s_1 \\ \hline s_1 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c } \hline s_1 \\ \hline s_1-1 \\ \hline s_2+1 \\ \hline \end{array}$

как максимально симметричная часть (msp), и может быть явно выражено

$$\phi^{a(s_1),b(s_2)} = e^{a(s_1-1),b(s_2)|a}, \quad e^{a(s_1-1),b(s_2)|c} = e_\mu^{a(s_1-1),b(s_2)} h^{\mu c}. \quad (6.124)$$

В разложении $e^{a(s_1-1),b(s_2)|c}$ на неприводимы тензоры алгебры Лоренца

$$\begin{array}{|c|} \hline s_1-1 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array} \otimes \square = \left[\begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline s_1-2 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline s_1-1 \\ \hline s_2-1 \\ \hline \end{array} \right] \oplus \left[\begin{array}{|c|} \hline s_1-1 \\ \hline s_2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline s_2+1 \\ \hline \end{array} \right].$$

слагаемые в первых скобках отвечают $H_{g=0}^{q=1}(\sigma_-)$, тогда как слагаемые во вторых скобках отвечают σ_- -точным полям, поскольку в следующей градуировке имеются калибровочные параметры с таким же типом симметрии.

Калибровочный параметр $\xi^{a(s_1-1),b(s_2)}$, являющийся представителем $H_{g=0}^{q=0}(\sigma_-)$, определяется следующим образом

$$\xi^{a(s_1-1),b(s_2)} = \xi_0^{a(s_1-1),b(s_2)} = \xi_0^{a(s_1-1),b(s_2)\bullet(s_1-s_2-1),\bullet(s_2)}. \quad (6.125)$$

Получение уравнений движения из реперной формулировки. Итак, были отождествлены представители $H_g^{q=1}(\sigma_-)$ и $H_g^{q=0}(\sigma_-)$, отвечающий динамическим полю $\phi^{a(s_1),b(s_2)}$ и калибровочному параметру $\xi^{a(s_1-1),b(s_2)}$. Покажем теперь, что представители $H_g^{q=2}(\sigma_-)$ дают правильные полевые уравнения.

Напряжённости для $e_1^{a(s_1-1),b(s_2)}$, а также для двух вспомогательных полей $\omega_1^{a(s_1-1),b(s_2+1)}$

и $\omega_1^{a(s_1-1),b(s_2),c}$ имеют вид

$$R^{a(s_1-1),b(s_2)|\mathbf{a}\mathbf{a}} = D^{\mathbf{a}}e^{a(s_1-1),b(s_2)|\mathbf{a}} + (s_1 - s_2 - 1)\omega^{a(s_1-1),b(s_2)\mathbf{a}|\mathbf{a}} + s_2\omega^{a(s_1-1),b(s_2),\mathbf{a}|\mathbf{a}} \quad (6.126)$$

$$R^{a(s_1-1),b(s_2+1)|\mathbf{a}\mathbf{a}} = D^{\mathbf{a}}\omega^{a(s_1-1),b(s_2+1)|\mathbf{a}} + (s_1 - s_2 - 2)W^{a(s_1-1),b(s_2+1)\bullet(s_1-s_2-3)\mathbf{a},\bullet(s_2)|\mathbf{a}} + \\ + s_2W^{a(s_1-1),b(s_2+1)\bullet(s_1-s_2-2),\bullet(s_2-1)\mathbf{a}|\mathbf{a}} - \eta^{a\mathbf{a}}W^{a(s_1-2)\bullet,b(s_2+1)\bullet(s_1-s_2-2),\bullet(s_2)|\mathbf{a}} + \\ - \eta^{b\mathbf{a}}e^{a(s_1-1),b(s_2)|\mathbf{a}} \quad (6.127)$$

$$R^{a(s_1-1),b(s_2);c|\mathbf{a}\mathbf{a}} = D^{\mathbf{a}}\omega^{a(s_1-1),b(s_2),c|\mathbf{a}} + (s_1 - s_2 - 1)W^{a(s_1-1),b(s_2)\bullet(s_1-s_2-2)\mathbf{a},c\bullet(s_2-1)|\mathbf{a}} + \\ + (s_2 - 1)W^{a(s_1-1),b(s_2)\bullet(s_1-s_2-1),c\bullet(s_2-2)\mathbf{a}|\mathbf{a}} - \eta^{a\mathbf{a}}W^{a(s_1-2)\bullet,b(s_2)\bullet(s_1-s_2-1),c\bullet(s_2-1)|\mathbf{a}} + \\ - \eta^{b\mathbf{a}}W^{a(s_1-1),b(s_2-1)\bullet(s_1-s_2),c\bullet(s_2-1)|\mathbf{a}} - \eta^{c\mathbf{a}}e^{a(s_1-1),b(s_2)|\mathbf{a}}, \quad (6.128)$$

где были подставлены (6.123) и

$$\omega^{a(s_1-1),b(s_2+1)|m} = W^{a(s_1-1),b(s_2+1)\bullet(s_1-s_2-2),\bullet(s_2)|m}, \quad (6.129)$$

$$\omega^{a(s_1-1),b(s_2);c|m} = W^{a(s_1-1),b(s_2)\bullet(s_1-s_2-1),c\bullet(s_2-1)|m}. \quad (6.130)$$

Заметим, что мы, как и при выводе массово-подобного слагаемого ниже, используем поля, не удовлетворяющие, вообще говоря, всем условиям Юнга, в данном случае это происходит только для одного поля $\omega^{a(s_1-1),b(s_2);c|m}$,

$$(s_2 + 1)\omega^{a(s_1-1),b(s_2);b|m} = -(s_1 - s_2 - 1)\omega^{a(s_1-1),b(s_2+1)|m}. \quad (6.131)$$

Представитель $\mathbf{H}_{g=0}^{q=2}$ получается взятием следа и симметризацией индексов в напряжённости для репера

$$R^{a(s_1-1),b(s_2-2)m|a}{}_m = D^a e^{a(s_1-1),b(s_2-1)n|}{}_n - D_n e^{a(s_1-1),b(s_2-1)n|a}, \quad (6.132)$$

выражая его через $\phi^{a(s_1),b(s_2)}$, получаем уравнение (6.116). Наиболее простой способ получить представитель $\mathbf{H}_{g=1}^{q=2}$ и вывести (6.115) заключается в выражении в

$$(s_1 - s_2 - t)R^{a(s_1-1),b(s_2)\bullet(s_1-s_2-t-1)n,\bullet(s_2)|a}{}_n + s_2R^{a(s_1-1),b(s_2)\bullet(s_1-s_2-t),\bullet(s_2-1)n|a}{}_n = 0,$$

полей $\omega^{a(s_1-1),b(s_2+1)|m}$ и $\omega^{a(s_1-1),b(s_2),c|m}$ из

$$R^{a(s_1-1),b(s_2)\bullet(s_1-s_2-1),\bullet(s_2)|an} = D^a e^{a(s_1-1),b(s_2)|n} - D_n e^{a(s_1-1),b(s_2)|a} + \\ - (s_1 - s_2 - 1)\omega^{a(s_1-1),b(s_2)n|a} - s_2\omega^{a(s_1-1),b(s_2);n|a} = 0, \quad (6.133)$$

полученного симметризацией (6.126) одного индекса \mathbf{a} с $a(s_1 - 1)$. Небольшие вычисления прямо приводят к уравнению (6.115).

Следовательно, сформулированная в терминах одного калибровочного поля $W_q^{\mathbf{A}}$ (6.117), (6.118), (6.120) изначально простая теория приводит к достаточно сложным выражениям (6.106) и (6.116) в терминах метрических полей, когда всё выражается явно через представители σ_- -когомологий. Следовые условия (6.110)-(6.111), возникающие из реперной формулировки, также не очевидны в метрическом формализме.

6.5 Связь калибровочных полей и обобщённых полей Янга-Миллса

Теперь, зная σ_- -когомологии для комплекса $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \sigma_-)$ и привлекая теоретико-полевую интерпретацию σ_- -когомологий, см. раздел 2.5, обобщённое поле Янга-Миллса $W_q^{\mathbf{A}}$, его (приводимые) калибровочные параметры $\xi_{q-1}^{\mathbf{A}}, \dots, \xi_0^{\mathbf{A}}$ и калибровочно-инвариантная напряжённость $R_{q+1}^{\mathbf{A}}$ могут быть связаны с описанием в терминах потенциалов, рассмотренного в Главе 1. Необходимо сравнить примарные σ_- -когомологии с on-shell'ными полями $\phi^{\mathbf{S}_0}$ и калибровочными параметрами $\xi^{\mathbf{S}_i}$, $i = 1, \dots, q$.

Приведём сначала основной результат данной главы. Калибровочное поле, отвечающее неприводимому представлению (\mathbf{S}, q, t) алгебры (анти)-де Ситтера, может быть описано с помощью одного обобщённого поля Янга-Миллса $W_q^{\mathbf{A}}$, т.е. связности алгебры (анти)-де Ситтера \mathfrak{g} со значениями в неприводимом представлении $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{S}, q, t)$

$$(\mathbf{S}, q, t) \iff (\mathbf{A}, q),$$

$\mathbf{S} =$

\iff

$\mathbf{A} =$

(6.134)

или, выписывая индексы явно, утверждается, что калибровочная теория, имеющая on-shell в терминах потенциалов закон калибровочных преобразований вида

$$\delta\phi^{a(s_1), \dots, v(s_n)} = \overbrace{D^c \dots D^c}^t \xi^{a(s_1), \dots, c(s_q-t), \dots, v(s_n)} + \dots, \quad (6.135)$$

может быть описана off-shell обобщённым поле Янга-Миллса вида

$$W_{\mu_1 \dots \mu_q}^{A(s_1-1), \dots, B(s_q-1), C(s_q-t), D(s_{q+1}), \dots, F(s_p)} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}. \quad (6.136)$$

Многоточие в (6.135) обозначает ряд из слагаемых с производными более низкого порядка, а также некоторыми слагаемыми, проектирующими на тип симметрии \mathbf{S} , которые ввиду технической сложности в общем случае не могут быть выписаны в метрическом формализме явно.

Калибровочное поле типа (\mathbf{S}, q, t) можно описать с помощью обобщённого поля Янга-Миллса $W_q^{\mathbf{A}}$ в следующем смысле: существует цепочка вложений точных последовательностей вида

...				
\mathfrak{g} -module	\hookrightarrow	$\phi^{\mathbf{S}_0}$	\hookrightarrow	$\bar{\phi}^{\mathbf{S}_0}$	\hookrightarrow	$e_q^{\mathbf{L}_0}$	\hookrightarrow	$W_q^{\mathbf{A}}$
$\mathcal{D}(E_0; \mathbf{S}_0)$		on-shell		off-shell		frame-like		
\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow
\mathfrak{g} -module	\hookrightarrow	$\xi^{\mathbf{S}_1}$	\hookrightarrow	$\bar{\xi}^{\mathbf{S}_1}$	\hookrightarrow	$\xi_{q-1}^{\mathbf{L}_1}$	\hookrightarrow	$\xi_{q-1}^{\mathbf{A}}$
$\mathcal{D}(E_1; \mathbf{S}_1)$		on-shell		off-shell		frame-like		
\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow		\uparrow
...	

которая точна в вертикальных стрелках, а горизонтальные стрелки отвечают вложениям. Точная последовательность слева не что иное как определение неприводимого представления алгебры (анти)-де Ситтера (1.15); вертикальные стрелки справа отвечают действию ковариантной производной D_Ω в комплексе $\mathcal{C}(\mathbf{A}, D_\Omega)$; следующая за ними группа вертикальных стрелок представляют собой действие D_Ω в том же комплексе $\mathcal{C}(\mathbf{A}, D_\Omega)$ но \mathbf{A} рассматривается как $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -модуль. Основную техническую сложность представляют собой вертикальные стрелки из второй и третьей колонок, отвечающих калибровочным преобразованиям для неприводимых метрических полей (вторая колонка) и для их off-shell расширений (третья колонка).

Опишем теперь горизонтальные стрелки вложений модулей. $\mathcal{D}(E_i; \mathbf{S}_i)$ реализуются на решениях уравнений (1.20)-(1.21), наложенных на неприводимые тензорные поля с симметрией \mathbf{S}_i , соответствующие для $i = 0$ волновому уравнению и условию бездивергентности для $\phi^{\mathbf{S}_0}$, и для $i = 1, \dots, q$ фиксации калибровки для $\xi^{\mathbf{S}_i}$.

Для получения off-shell'ной формулировки поля типа (\mathbf{S}, q, t) необходимо ослабить условия (1.21) на поле $\phi^{\mathbf{S}_0}$ и параметры $\xi^{\mathbf{S}_i}$, что приводит к расширению состава полей до $\bar{\phi}^{\mathbf{S}_0}$ и калибровочных параметров до $\bar{\xi}^{\mathbf{S}_i}$, которые имеют тот же тип симметрии, что и on-shell'ные поля и параметры, но подчинены более слабым следовым условиям. Поля $\phi^{\mathbf{S}_0}$, $\xi^{\mathbf{S}_i}$ представляют собой компоненты старшего веса полей $\bar{\phi}^{\mathbf{S}_0}$ и $\bar{\xi}^{\mathbf{S}_i}$. Горизонтальные стрелки во второй колонке отвечают расширению состава полей, обратные стрелки отвечали бы наложению калибровочных условий, изгоняющих все компоненты младшего веса.

Далее, off-shell'ные поля вложены как максимально симметричные компоненты в некоторые связности алгебры Лоренца. Динамическое поле $\phi^{\mathbf{S}_0}$ и калибровочные параметры $\bar{\xi}^{\mathbf{S}_i}$, $i = 1, \dots, q$, вложены в обобщённое поле репера $e_q^{\mathbf{L}_0}$ и в $\xi_{q-i}^{\mathbf{L}_i}$ соответственно. Диаграммы \mathbf{L}_i , $i = 0, \dots, q$, определяют некоторые неприводимые представления из разложения модуля \mathbf{A} на модули алгебры Лоренца $\mathbf{A}_{\{k_1, \dots, k_n\}}$, а именно

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{A}^{q-i+1}, \quad (6.137)$$

где \mathbf{A}^{q-i+1} является $(q-i+1)$ -ой максимально симметричной компонентой из $\text{Res}_{\mathfrak{so}(d-1,1)}^{\mathbf{q}} \mathbf{A}$.

Теория, записанная в терминах метрических полей $\bar{\phi}^{\mathbf{S}_0}$, $\bar{\xi}^{\mathbf{S}_i}$, имеет очень сложный вид из-за присутствия всевозможных проекторов. Напротив, в терминах обобщённых полей Янга-Миллса теория имеет очень простой вид.

В разделе (6.5.4) мы также покажем, что для on-shell'ных полей и калибровочных параметров $\phi^{\mathbf{S}}$, $\xi^{\mathbf{S}_1}$, ..., $\xi^{\mathbf{S}_q}$ в результате наложения уравнений движения и калибровок возникают правильные массовоподобные слагаемые, определяемые теорией представления через E_i и \mathbf{S}_i .

Фермионные калибровочные поля смешанного типа симметрии. Несмотря на то, что были рассмотрены только бозонные поля, обобщение на случай фермионных полей очевидно, хотя и затруднено необходимостью тщательного анализа возможных условий типа Вейля, Майорана и Майорана-Вейля и их редукции на одно измерение: основное утверждение состоит в том, что калибровочное фермионное поле (\mathbf{S}, q, t) , где диаграмма \mathbf{S} определяет тип симметрии тензорной части неприводимого спин-тензора $\mathfrak{so}(d-1)$, может быть описано с помощью связности $W_q^{\hat{\alpha}; \mathbf{A}_{\mathbf{S}, q, t}}$,

со значениями в неприводимом спин-тензорном представлении, где тензорная часть даётся теми же правилами, что и в бозонном случае, и \hat{a} — спинорный индекс алгебры $(A)dS_d$. Метод, предложенный в 6.3, может быть применён и для вычисления σ_- -когомологий в фермионном случае.

6.5.1 Связь с σ_- -когомологиями

Вторая теорема в (6.3.6) даёт исчерпывающий ответ касательно интерпретации теории, описываемой одним обобщённым полем Янга-Миллса, в терминах метрических полей.

Все on-shell'ные величины отвечают примарным σ_- -когомологиям в $H^k(\mathbf{A}, \sigma_-)$, т.е. представителям максимального ранга для каждого k , которые также имеют максимальную градуировку среди всех нетривиальных $H_g^k(\mathbf{A}, \sigma_-)$ при данной степени k . $H^k(\mathbf{A}, \sigma_-)$ имеет следующий типичный вид: в некоторой максимальной нетривиальной градуировке находится ряд представителей, из которых тот, что имеет максимальный ранг отвечает on-shell'ной величине, т.е. просто некоторому бесследовому тензору; в зависимости от смысла $H^k(\mathbf{A}, \sigma_-)$ при данном k , в той же градуировке могут быть ряд представителей, отвечающих бесследовым тензорам меньшего ранга, которые вместе с примарной компонентой могут быть ассоциированы со следами некоторого приводимого тензора — этот тензор отвечает off-shell'ному расширению. Когомологии в меньших градуировках также могут быть нетривиальны — они отвечают некоторым дополнительным полям, необходимым для off-shell'ной формулировки. Например, в случае частично-безмассовых полей спина s и глубины t кроме поля ранга s присутствуют в младших градуировках также два поля рангов $s - t - 1$ и $s - t$.

Далее мы выделяем из ответа по σ_- -когомологиям $H(\mathbf{A}, \sigma_-)$ нужных нам представителей. Динамическое off-shell'ное поле $\bar{\phi}^{\mathbf{S}_0}$ в H^q даётся $\text{mspr}(\mathbf{A}, q)$ и имеет градуировку $g(\mathbf{A}^{q+1})$, его примарная компонента, отвечающая on-shell'ному полю $\phi^{\mathbf{S}_0}$ даётся компонентой наибольшего веса, имеющей ожидаемый вид $\mathbf{S}_0 = \text{hwr}(\mathbf{A}^{q+1}, q)$. Также можно явно проследить в какую именно связность алгебры Лоренца $\omega_q^{\mathbf{X}}$ с $\mathbf{X} \in \text{Res}_{so(d)}^{so(d+1)} \mathbf{A}$, возникающей при редукции $W_q^{\mathbf{A}}$, собственно вложено $\bar{\phi}^{\mathbf{S}_0}$ — это обобщённая тетрада $e_q^{\mathbf{L}_0}$ с $\mathbf{L}_0 = \mathbf{A}^{q+1}$.

Аналогично для калибровочных параметров $\xi^{\mathbf{S}_i}$ уровня- i : off-shell'ное расширение $\bar{\xi}^{\mathbf{S}_i}$ даётся представителями H^{q-i} с максимальной градуировкой, $H^{q-i} = \text{mspr}(\mathbf{A}^{q-i+1}, q-i)$; on-shell'ный параметр $\xi^{\mathbf{S}_i}$ входит в $\bar{\xi}^{\mathbf{S}_i}$ как компонента старшего веса $\xi^{\mathbf{S}_i} = \text{hwr}(\mathbf{A}^{q-i+1}, q-i)$.

Количество производных, связывающее описанных выше представителей H^{q-i} и H^{q-i-1} , равно $g(\mathbf{A}^{q-i+1}) - g(\mathbf{A}^{q-i}) + 1$ и, конечно, совпадает с $E_{i-1} - E_i$.

Отметим, что унитарные в AdS_d безмассовые поля, т.е. те у которых $t = 1$ и q равно высоте первого блока в \mathbf{S} , выделены тем, что $H_{g>0}^{q-i} = \emptyset$, $i = 0, \dots, q$, и таким образом как динамическое поле $\bar{\phi}^{\mathbf{S}_0}$, так и все калибровочные параметры $\bar{\xi}^{\mathbf{S}_i}$ возникают в нулевой градуировке, и для них нет ни каких дополнительных полей в меньших градуировках.

С полевыми уравнениями ситуация более сложная. Поскольку в случае полей смешанного типа симметрии условия бездивергентности (1.21) не могут быть наложе-

ны как калибровки с единственным калибровочным параметром $\bar{\xi}^{\mathbf{S}_1}$, полная система уравнений движения состоит из уравнений как первого, так и второго порядка, поэтому не стоит ожидать, что количество уравнений равно количеству полей в $\bar{\phi}^{\mathbf{S}_0}$. Представители \mathbf{H}_g^{q+1} с g равной градуировке динамического поля, т.е. $g(\mathbf{A}^{q+1})$, отвечают некоторым уравнениям первого порядка для $\bar{\phi}^{\mathbf{S}_0}$, которые являются калибровочно-инвариантным off-shell'ным расширением условий (1.21).

Для $t = 1$, т.е. безмассовых полей, видно, что все представители \mathbf{H}_g^{q+1} с наибольшим рангом имеют как раз симметрию всех кроме одного, а именно $\xi^{\mathbf{S}_1}$, калибровочных параметров безмассового поля спина \mathbf{S} в пространстве Минковского. Поэтому в \mathbf{H}_g^{q+1} имеется как раз столько представителей наибольшего ранга, сколько условий (1.21) минус один, поскольку одно условие может быть наложено как фиксация калибровки с $\xi^{\mathbf{S}_1}$.

Для частично безмассовых полей, $t > 1$, калибровочной симметрии с $\xi^{\mathbf{S}_1}$ уже недостаточно, чтобы наложить хотя бы одно из условий (1.21), поэтому имеется столько представителей \mathbf{H}_g^{q+1} максимального ранга сколько условий (1.21).

Что касается уравнений второго порядка, то всегда в \mathbf{H}_{g+1}^{q+1} , $g = g(\mathbf{A}^{q+1})$, имеется представитель с симметрией \mathbf{S}_0 , отвечающий волновому уравнению для $\phi^{\mathbf{S}_0}$, для которого и будет вычислено массовоподобное слагаемое в 6.5.4. В виду того, что часть степеней свободы изгоняется в том числе уравнениями первого порядка, между числом полей и числом уравнений второго порядка нет взаимнооднозначного соответствия.

В \mathbf{H}^{q+1} всегда имеется единственный представитель максимального ранга, отвечающий тензору Вейля с симметрией \mathbf{S}_{-1} для данного поля (\mathbf{S}, q, t) , он даёт $\text{mspr}(\mathbf{A}, q + 1, 0) = \text{msp}(\mathbf{A}^{q+2}, q + 1) = \text{hwp}(\mathbf{A}^{q+2}, q + 1) = \mathbf{S}_{-1}$, см. (1.34).

Отметим, что для безмассовых полей, $t = 1$. Те представители \mathbf{H}_{g+1}^{q+2} , отвечающие тождествам Бьянки, которые имеют максимальный ранг, находятся во взаимнооднозначном соответствии с калибровочными параметрами безмассового поля спина \mathbf{S} в пространстве Минковского, что говорит о том, что в пределе $\lambda^2 \rightarrow 0$ калибровочные симметрии дополнительные к $\xi^{\mathbf{S}_1}$, нарушенные в (анти)-де Ситтере, могут восстановиться согласно гипотезе [74], доказанной в [86, 87].

степени свободы. Как и в случае полей произвольного типа симметрии в пространстве Минковского (см. раздел 3.2.9), σ_- -когомологии могут быть использованы для прямого вычисления количества физических степеней свободы. Хотя это и было бы поучительно, так как калибровочные поля в (анти)-де Ситтере обладают связями как первого, так и второго рода. Но в этом нет ни какой необходимости, поскольку представители σ_- -когомологий в секторе возможных уравнений движения позволяют сразу сделать нужный вывод. Действительно, предположим, что некоторые уравнения не наложены, т.е. не только тензор Вейля отличен от нуля, но и некоторые другие величины, тогда это даёт возможность «подклеить» к местам, где находятся неналоженные уравнения, некоторые бесконечномерные модули алгебры (анти)-де Ситтера, отвечающие новым степеням свободы. И наоборот, если бы уравнения вида $R_{q+1}^{\mathbf{A}} = [\text{тензор Вейля}]$ описывали степеней свободы больше, чем это предписывается теорией представлений, т.е. определением соответствующего калибровочного поля, то на полевом языке такая ситуация отвечала бы тому, что суще-

ствуют ещё какие-то калибровочно-инвариантные уравнения, которые можно было бы наложить и получить уже неприводимую систему — это однако противоречит тому, что σ_- даёт полную классификацию независимых калибровочно-инвариантных уравнений.

6.5.2 Многообразие полей Янга-Миллса vs. калибровочные поля

Было показано, что каждому калибровочному полю (\mathbf{S}, q, t) , можно поставить в соответствие некоторое обобщённое поле Янга-Миллса $W_q^{\mathbf{A}, \mathbf{s}, q, t}$. Таким образом, «отображение» ρ из многообразия калибровочных полей в $(A)dS_d$ в многообразии связностей алгебры $(A)dS_d$ или обобщённых полей Янга-Миллса является отображением в. Несмотря на то, что ρ формально не является отображением на все многообразие обобщённых полей Янга-Миллса, остальные связности не приводят к новым теориям, отвечая тривиально дуальным формулировкам.

Прежде всего, имеется три типа дуальности типа Ходжа: (1) с помощью мирового символа Леви-Чивиты $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}$ можно отображать q -формы на $(d - q)$ -формы; (2) наличие инвариантного тензора $\epsilon_{A_1 \dots A_{d+1}}$ алгебры (анти)-де Ситтера \mathfrak{g} позволяет рассматривать тензоры \mathfrak{g} , симметрия которых характеризуется диаграммами Юнга с не более чем $[(d + 1)/2]$ строками, что и подразумевается везде; (3) on-shell, можно использовать также инвариантный тензор $\epsilon_{\mathcal{I}_1 \dots \mathcal{I}_{d-1}}$ малой алгебры Вигнера $\mathfrak{so}(d - 1)$ алгебры (анти)-де Ситтера для того, чтобы отображать тензоры физической поляризации имеющие симметрию диаграмм Юнга высоты k в тензоры, симметрия которых характеризуется диаграммами высоты $(d - 1 - k)$.

По построению степень формы q ограничена¹⁰ $1 \leq q \leq q_{\max} = [(d - 1)/2]$. Используя дуальность типа-(1), можно отобразить формы степени большей q_{\max} в формы степени не превышающей q_{\max} за одним исключением: в формах степени- n при $d = 2n$. В самом деле, в этом случае $q_{\max} = n - 1 = [(2n - 1)/2]$ и n -формы не могут быть получены из нашей конструкции ни прямо, ни посредством дуальности типа-(1)¹¹. Тем не менее, никаких новых $(A)dS_d$ полей не возникает, поскольку на массовой оболочке тензор $\mathfrak{so}(d - 1)$ физической поляризации с симметрией диаграммы высоты n может быть преобразован посредством дуальности типа-(3) в тензор с симметрией диаграммы высотой $(n - 1)$ строк.

Суммируя: существует две эквивалентные формулировки в терминах обобщённых полей Янга-Миллса $W_q^{\mathbf{A}}$ и $W_{d-q}^{\mathbf{A}}$ для произвольного калибровочного поля (\mathbf{S}, q, t) в $(A)dS_d$ за исключением чётных d и $q = q_{\max}$, в последнем случае имеем три эквивалентные формулировки. Отметим, что из эквивалентных формулировок проще та, у которой степень формы меньше, так как в этом случае не нужно использовать ни какие дуальности, именно эта формулировка соответствует в метрическом форма-

¹⁰ q принимает максимальное значение, если $q = p$ и p равно высоте максимальной диаграммы $\mathfrak{so}(d - 1)$, т.е. $[(d - 1)/2]$.

¹¹Вообще говоря, имея n -форму при $d = 2n$ естественно накладывать условия (анти) самодуальности по отношению к мировым индексам формы, как например в [206], однако с точки зрения развёрнутого подхода это кажется проблематичным, поскольку оператор Ходжа построен с использованием метрики, что затруднит разработку нелинейной теории с такими условиями.

лизме фундаментальному описанию в терминах потенциалов, имеющих тот же тип симметрии, что и тензор физической поляризации.

6.5.3 Плоский предел

Следует прояснить плоский предел теорий, сформулированных в терминах связности W_q^A . Связность W_q^A реализует калибровочный модуль развёрнутой системы уравнений. Результатом Главы 3 и работы [1] была развёрнутая система уравнений для безмассовых полей произвольного спина в пространстве Минковского. Также, как упоминалось в Главе 1, в плоском пределе калибровочные поля в пространстве (анти)-де Ситтера переходят в приводимые мультиплеты безмассовых полей в пространстве Минковского [74]. На примере частично-безмассового поля спина s это было явно продемонстрировано в Главе 5.

Так как у алгебры Пуанкаре нет тензорных представлений, то для взятия плоского предела следует разложить W_q^A на связности алгебры Лоренца, которые хорошо определены как в пространстве (анти)-де Ситтера, так и в Минковском. Далее необходимо сделать некоторый рескейлинг полей, после чего уравнения в терминах R_{q+1}^A явно распадаются на ряд несвязанных систем уравнений, которые однако ещё не имеют прямого отношения к развёрнутым уравнениям Главы 3. Поскольку поля в пространстве Минковского обладают более богатой калибровочной симметрией, то набор полей, необходимых для off-shell'ного описания полей в пространстве (анти)-де Ситтера, содержит, вообще говоря, меньше полей, соответствующих следам ϕ^S , чем это необходимо для off-shell'ного описания полей в пространстве Минковского. Таким образом, в плоском пределе мы должны получить не дословно off-shell формулировку, а систему, в которой некоторые дифференциальные калибровки на параметры уже наложены, что как раз отвечает отсутствию некоторых следов в ϕ^S . Не останавливаясь подробно на деталях мы упомянем, что можно построить с помощью h_μ^a некоторые операторы типа σ_- , которые отображают поля из W_q^A в поля развёрнутых систем Главы 3, набор которых определяется плоским пределом соответствующих представлений алгебры (анти)-де Ситтера [74].

Как уже отмечалось, калибровочные поля в $(A)dS_d$ на самом деле более «массивны», чем калибровочные поля в пространстве Минковского, в частности, они обладают в общем случае большим числом степеней свободы. С точки зрения связи с плоским пределом и в рамках подхода Зиновьева [84, 85, 88, 91–93, 200] к массивным и калибровочным полям было бы интересно построить не минимальную развёрнутую формулировку для калибровочных полей в $(A)dS_d$, в которой те калибровочные симметрии поля в пространстве Минковского, которые были нарушены при деформации в $(A)dS_d$, были бы реализованы как симметрии Штюкельберга, т.е. алгебраически. Такая формулировка была построена в [86, 87] для полей серии $(\mathbf{S}, 1, 1)$ из развёрнутых уравнений Главы 3 путём расслоения плоского пространства на пространства (анти)-де Ситтера меньшей размерности.

6.5.4 Вычисление m^2

Цель данного раздела показать, что можно прямо вычислить из исходной формулировки в терминах поля $W_q^{\mathbf{A}}$ массово-подобное слагаемое перед on-shell'ным полем $\phi^{\mathbf{S}}$ и установить его совпадение с

$$m^2 = \lambda^2 ((s_q - t - q)(d + s_q - t - q - 1) - s_1 - s_2 - \dots - s_p), \quad (6.138)$$

получаемое подстановкой в формулу (1.30) значения энергии (1.14), отвечающего появлению сингулярного вектора в модуле алгебры (анти)-де Ситтера, а следовательно и калибровочной симметрии в полевых уравнениях [74].

Прежде всего тот факт, что динамическое поле $\phi^{\mathbf{S}}$, вложенное в $W_q^{\mathbf{A}}$, является тензором алгебры Лоренца, приводит к тому, что для проверки правильности наложенных уравнений в терминах динамических полей нам придётся выделять конкретные компоненты, что технически сложно ввиду использования проекторов аналогичных (6.14), форма которых в общем случае неизвестна. Для упрощения вычислений мы используем трюк, состоящий в том, что в промежуточных вычислениях тензоры, вообще говоря, не будут удовлетворять юнговским условиям или условиям бесследовости. На конечном этапе компонента с симметрией \mathbf{S} восстанавливается посредством лемм А-В, см. разделы 6.2.2 и 6.2.1 соответственно. Также все выражения рассматриваются по модули следовых компонент, не дающих вклада в компоненту старшего веса обобщённого репера, т.е. в $\phi^{\mathbf{S}}$, поскольку мы собираемся получить уравнения вида (1.20).

Удобно определить γ_i , для $i = 1, \dots, p + 1$

$$\gamma_i = \begin{cases} s_i - s_{i+1}, & i = 1, \dots, q - 1, \\ t - 1, & i = q, \\ s_q - s_{q+1} - t, & i = q + 1, \\ s_{i-1} - s_i, & i = q + 2, \dots, p, \\ s_p, & i = p + 1, \end{cases}$$

как разность длин между i -ой ($i + 1$)-ой строкой в \mathbf{A} , т.е. γ_i равно максимальному числу компенсаторов, которые могут быть нетривиально свёрнуты с i -ой группой индексов в $W_q^{\mathbf{A}}$. Удобно также положить $s_{p+1} = 0$.

Рассмотрим напряжённости R и R^k для обобщённого поля репера \tilde{e} и для ассоциированных с ним вспомогательных полей $\tilde{\omega}^k$, имеющих на один касательный индекс больше, чем \tilde{e} . Ввиду большого количества индексов¹² мы будем выписывать на правой стороне равенства только те группы индексов, которые отличаются от $a_1(s_1 - 1), \dots, a_q(s_q - 1), b(s_{q+1}) \bullet (\gamma_{q+1}), \dots, u(s_p) \bullet (\gamma_p), \bullet (\gamma_{p+1})$. Индексы формы μ_1, \dots, μ_{q+1} были преобразованы в касательные индексы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{q+1}$, по которым неяв-

¹²Осцилляторный формализм позволяет избежать прямой работы с индексами и незаменим при работе с нелинейными уравнениями. Однако выписывая индексы явно, легче увидеть нетривиальные следствия бесследовости или юнговости и отбросить слагаемые, не дающие вклада в уравнения для $\phi^{\mathbf{S}}$.

но подразумевается антисимметризация. Итак, R и R^k имеют вид

$$R \equiv R_{q+1}^{a_1(s_1-1), \dots, a_q(s_q-1), b(s_{q+1}), \dots, u(s_p)} | \mathbf{a}[q+1] = \\ = D^{\mathbf{a}} W_{\mathbf{q}}^{\dots | \mathbf{a}[q]} + \lambda \sum_{k=q+1}^{k=p+1} \gamma_k W_{\mathbf{q}}^{\dots, c(s_k) \mathbf{a} \bullet (\gamma_k-1), \dots | \mathbf{a}[q]} + \dots, \quad (6.139)$$

$$R^k \equiv R_{q+1}^{a_1(s_1-1), \dots, a_q(s_q-1), b(s_{q+1}), \dots; c(s_k+1), \dots; u(s_p)} | \mathbf{a}[q+1] = D^{\mathbf{a}} W_{\mathbf{q}}^{\dots, c(s_k+1) \bullet (\gamma_k-1), \dots | \mathbf{a}[q]} + \\ + \lambda \sum_{\substack{i=q+1 \\ i \neq k}}^{i=p+1} \gamma_i W_{\mathbf{q}}^{\dots, c(s_k+1) \bullet (\gamma_k-1), \dots, f(s_i) \mathbf{a} \bullet (\gamma_i-1), \dots | \mathbf{a}[q]} + \lambda (\gamma_k - 1) W_{\mathbf{q}}^{\dots, c(s_k+1) \mathbf{a} \bullet (\gamma_k-2), \dots | \mathbf{a}[q]} + \\ - \lambda \sum_{\substack{i=q+1 \\ i \neq k}}^{i=p+\delta_{p+1,k}} \eta^{f \mathbf{a}} W_{\mathbf{q}}^{\dots, c(s_k+1) \bullet (\gamma_k-1), \dots, f(s_i-1) \bullet (\gamma_i+1), \dots | \mathbf{a}[q]} - \lambda \eta^{c \mathbf{a}} W_{\mathbf{q}}^{\dots | \mathbf{a}[q]} + \\ - \lambda \sum_{i=1}^{i=q} \eta^{a_i \mathbf{a}} W_{\mathbf{q}}^{\dots, a_i(s_i-2) \bullet, \dots, c(s_k+1) \bullet (\gamma_k-1), \dots | \mathbf{a}[q]}. \quad (6.140)$$

Каждая R^k имеет компоненту симметрией \mathbf{S} , получаемую симметризацией $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_q$ с $a_1(s_1-1), \dots, a_q(s_q-1)$ и затем взятием следа по \mathbf{a}_{q+1} и лишнему индексу c в k -й группе. Обозначим этот проектор $\pi_i(R^i)$, тогда

$$\pi_i(R^i) = D \text{tr}(\tilde{\omega}^i) - D \cdot \tilde{\omega}^i + \lambda M_i \phi^{\mathbf{S}}, \quad (6.141)$$

где $\text{tr}(\tilde{\omega}^i)$ обозначает след $\tilde{\omega}^i$ по отношению к \mathbf{a}_{q+1} и c , $D \cdot$ обозначает свёртку ковариантной производной с некоторым индексом $\tilde{\omega}^i$. Массово-подобное слагаемое M_k равно

$$M_k = \gamma_{q+1} + \dots + \gamma_{k-1} + \gamma_k - 1 + \gamma_{k+1} + \dots + \gamma_{p+1} + \\ \underbrace{-1 - 1 \dots - 1}_q - (\gamma_{q+1} + 1) - \dots - (\gamma_{k-1} + 1) + d + s_k - q, \quad (6.142)$$

где слагаемые в первой строке получаются из σ_- -подобных слагаемых; каждая структура с $\eta^{\mathbf{a} a_i}$, $i = 1, \dots, q$, даёт (-1) , слагаемые с $\eta^{\mathbf{a} f}$, где индекс f принадлежит группам $i = (q+1), \dots, (k-1)$, приводит к $-(\gamma_i + 1)$; $\eta^{\mathbf{a} c}$ даёт $(d + s_k - q)$, где $s_k = 0$ для $k = p+1$; остальные слагаемые вклада не дают вовсе, поскольку после взятия следа не содержат компоненты с симметрией \mathbf{S} . (6.142) упрощается до

$$M_k = (d - q - k + s_k + s_{k-1} - \delta_{q+1,k} t) \quad k \in [q+1, p+1] \quad (6.143)$$

Для всех i проекция $\pi_i(R^i)$ содержит как бесследовую часть неприводимую $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -компоненту с симметрией \mathbf{S} , проекция на каждую из которых могла бы рассматриваться как динамическое уравнение, т.е. представитель σ_- -когомологий. В силу тождеств Бьянки только один (любой) из таких представителей независим, остальные получаются прибавлением слагаемых, пропорциональных представителям когомологий кручения. Наивно, можно было бы рассматривать только одну напряжённость, скажем R^k , однако это привело бы к тому, что пришлось бы явно использовать юнговские симметризаторы для выражения $\tilde{\omega}^k$ из уравнений $R = 0$, (6.139),

куда входят все $\tilde{\omega}^i$. Для упрощения вычислений заметим, что из $R = 0$ легко выразить линейную комбинацию вида $\sum_{i=q+1}^{i=p+1} \gamma_i \tilde{\omega}^i$, и следовательно наиболее простой путь получения волнового уравнения на $\phi^{\mathbf{S}}$ состоит в вычислении

$$\sum_{i=q+1}^{i=p+1} \pi_i(R^i) \gamma_i. \quad (6.144)$$

Следует отметить, что (6.144) не тривиализуется в силу тождеств Бьянки и может быть рассмотрено как представитель σ_- -когомологий в секторе уравнений на $\phi^{\mathbf{S}}$.

Для того чтобы выразить $\sum_{i=q+1}^{i=p+1} \gamma_i \tilde{\omega}^i$ из $R = 0$ симметризуем $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_q$ с $a_1(s_1 - 1), \dots, a_q(s_q - 1)$, а для того чтобы выразить $\sum_{i=q+1}^{i=p+1} \gamma_i \text{tr}(\tilde{\omega}^i)$ необходимо ещё взять след. После небольших вычислений получаем

$$\square \phi^{\mathbf{S}} + D(D \cdot \phi^{\mathbf{S}} + D \text{tr}(\phi^{\mathbf{S}})) + \lambda^2 \sum_{i=q+1}^{i=p+1} \gamma_i M_i \phi^{\mathbf{S}} + [D, D] \tilde{e} = 0. \quad (6.145)$$

Слагаемое в скобках представляет собой типичную комбинацию (см., например, уравнения (1.35), (1.42)), которая может быть установлена в ноль дифференциальной калибровкой типа де Дондера, высаживающей калибровочный параметр на массовую оболочку. Слагаемое $[D, D] \tilde{e}$, имеющее вид

$$\sum_{i=1}^{i=q} (-)^{i-1} [D^{a_i}, D_v] \tilde{e}^{a_1(s_1-1), \dots, a_q(s_q-1), b(s_{q+1}), \dots, u(s_p) | a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_q v}, \quad (6.146)$$

можно вычислить явно, что даёт $-\lambda^2 \sum_{i=1}^{i=q} (d + s_i - q - 1) \phi^{\mathbf{S}}$ с точностью до членов, отвечающих следовым компонентам. Наконец, полный вклад в массово-подобное слагаемое перед $\phi^{\mathbf{S}}$ даётся

$$m^2 = \lambda^2 \left(\sum_{i=q+1}^{i=p+1} \gamma_i M_i - \sum_{i=1}^{i=q} (d + s_i - q - 1) \right). \quad (6.147)$$

Прямое суммирование приводит к (6.138), что и требовалось.

Нет необходимости проводить аналогичные вычисления для калибровочных параметров с целью показать, что и для них получаются массово-подобные слагаемые в согласии с (1.16), поскольку само наличие¹³ и тип симметрии калибровочного параметра однозначно фиксирует теорию в соответствии с (1.15).

С другой стороны мы можем просто заменить q в формулах (6.139-6.140) на $(q-i)$, $i = 1, \dots, q$. Калибровочный параметр $\xi_{q-i}^{\mathbf{A}}$ будет играть роль поля $W_{q-i}^{\mathbf{A}}$; калибровочные параметры $\xi_{q-i-1}^{\mathbf{A}}, \dots, \xi_0^{\mathbf{A}}$ останутся калибровочными параметрами для $\xi_{q-i}^{\mathbf{A}}$; зануление компонент «напряжённости» $\xi_{q-i+1}^{\mathbf{A}}$ соответствует наложению дифференциальных калибровочных условий.

¹³Могло случится, например, так, что вообще нет калибровочного параметра с симметрией \mathbf{S}_1 , тогда теория с полем $\phi^{\mathbf{S}}$ описывала бы «массивное» поле.

6.6 К нелинейной теории

Строго говоря, обобщённые поля Янга-Миллса дают нам описание только калибровочного модуля развёрнутой системы уравнений, и, хотя тензоры Вейля и были найдены с помощью σ_- -когомологий, но сам вейлевский модуль ещё необходимо построить — эта проблема чисто техническая и состоит в решении некоторых рекуррентных уравнений, определяющих коэффициенты перед σ_- и σ_+ . вейлевский модуль, спектр которого был указан в разделе 6.3.9, представляет собой некоторый бесконечно-мерный, в отличие от калибровочного, модуль алгебры (анти)-де Ситтера, разлагающийся по отношению к подалгебре Лоренца на бесконечный набор неприводимых Лоренцевых модулей, каждый из которых входит с кратностью один. Из-за того, что явная форма операторов σ_- , σ_+ в общем случае очень сложна, записывать развёрнутые уравнения в Лоренцевых компонентах крайне неэффективно. Более продуктивно работать в явно $(A)dS_d$ -ковариантных терминах.

Ниже мы приводим некоторые соображения, заключающиеся в том, что гораздо эффективнее найти аналог алгебры высших спинов для полей смешанного типа симметрии, что позволит сразу же построить и полные развёрнутые уравнения, описывающие поля произвольного типа симметрии, а также позволит построить и нелинейные уравнения, которые и представляют собой конечную цель.

Ключевым ингредиентом нелинейной системы развёрнутых уравнений в случае безмассовых полей спина s являлась некоторая алгебра высших спинов [149, 176–178] — бесконечномерная алгебра \mathfrak{g} , включающая в себя алгебру (анти)-де Ситтера \mathfrak{h} как подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и разлагающаяся как векторное пространство под присоединённым действием \mathfrak{h}

$$\mathfrak{g}|_{Ad_{\mathfrak{h}}} = \bigoplus_k M_k, \quad M_k = \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline k \\ \hline \end{array} \quad (6.148)$$

на сумму неприводимых \mathfrak{h} -модулей, описываемых прямоугольными двурядными диаграммами Юнга, каждый из которых входит с кратностью один и как модуль алгебры Лоренца, $\mathfrak{so}(d-1, 1) \subset \mathfrak{h}$ раскладывается следующим образом

$$M_k = \bigoplus_{i=0}^{i=k} \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline k-i \\ \hline \end{array}_{\mathfrak{so}(d-1,1)}. \quad (6.149)$$

Пертурбативный анализ нелинейных уравнений Васильева [46], опуская некоторые детали, заключается в том, что калибровочное поле со значениями в алгебре высших спинов $W_1^{\mathfrak{g}}$ представляется как вакуумная часть Ω нулевого порядка малости со значениями в подалгебре \mathfrak{h} и флуктуации $\omega_1^{\mathfrak{g}}$ первого порядка малости со значениями в \mathfrak{g} , а сами уравнения тогда сводятся к

$$\begin{aligned} W_1^{\mathfrak{g}} &= \Omega + \omega_1^{\mathfrak{g}} + \dots, \\ d\Omega + \Omega\Omega &= 0, \\ (d + \Omega)\omega_1^{\mathfrak{g}} &= f(E, E)C_0^{\mathfrak{g}}, \\ (d + \tilde{\Omega})C_0^{\mathfrak{g}} &= 0, \end{aligned}$$

где Ω посредством уравнения плоской связности описывает геометрию (анти)-де Ситтера, $C_0^{\mathfrak{g}}$ — ноль-форма со значениями в \mathfrak{g} , а $f(E, E)$ — некоторый коцикл Шевалье-Эйленберга, построенный из обобщённых тетрад E^A . $\tilde{\Omega}$ обозначает так называемое твистованное присоединённое действие — это присоединённое действие, подправленное некоторым инволютивным автоморфизмом \mathfrak{h} . Особенность твистованного действия заключается в том, что \mathfrak{g} как векторное пространство раскладывается другим образом нежели по отношению к присоединённому действию \mathfrak{h} , а именно на сумму

$$\mathfrak{g}|_{TwistedAd_{\mathfrak{h}}} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \tilde{M}_s, \quad \tilde{M}_s = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \begin{array}{c} \boxed{s+k} \\ \boxed{s} \end{array}_{\mathfrak{so}(d-1,1)} \quad (6.150)$$

бесконечномерных \mathfrak{h} -модулей \tilde{M}_s , каждый из которых раскладывается на бесконечную сумму конечномерных модулей алгебры Лоренца, индекс k . Модуль \tilde{M}_s , как видно, представляет собой вейлевский модуль, и компонента $k = 0$ соответствует тензору Вейля для безмассового поля спина s .

Таким образом, линеаризованные уравнения Васильева раскладываются на прямую сумму развёрнутых уравнений для безмассовых полей всех спинов $s = 0, 1, \dots$, что легко установить, просто сравнивая спектр полей с приведённым в примере 2.6. Взятие плоского предела приводит буквально к уравнениям приведённым в 2.6.

Линеаризованные развёрнутые уравнения, описывающие набор безмассовых полей спинов $s = 0, 1, \dots$, имеют простой вид, в отличие от развёрнутых уравнений, описывающих индивидуальное поле спина s , в которые явно входят операторы σ_- и σ_+ , имеющие сложный вид. Важно то, что твистованное присоединённое действие \mathfrak{h} , которое имеет простой вид, сечёт все модули M_k , т.е. каждый $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -подмодуль \tilde{M}_s принадлежит какому-то M_k и по мере того, как перебираются все $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ -подмодули \tilde{M}_s , пробегаются также и все M_k .

Именно тот факт, что линеаризованные уравнения написаны на самом деле с использованием нетривиальных структур, принадлежащих нелинейным уравнениям, таких как алгебра высших спинов, рассматриваемая в линейном приближении как совокупность \mathfrak{h} -модулей, позволят написать простые развёрнутые уравнения, причём уже не для индивидуального поля, а для бесконечного мультиплета полей заточенных под нелинейную теорию.

В дальнейшем предполагается установить сначала неабелеву структуру — алгебру высших спинов \mathfrak{g} для полей смешанного типа симметрии, которая сразу позволит как написать единым образом линейные уравнения для мультиплета калибровочных полей смешанного типа симметрии, так и перейти к нелинейным уравнениям. Результаты данной главы позволяют идентифицировать \mathfrak{h} -модули M_k , на которые \mathfrak{g} должна раскладываться под присоединённым действием \mathfrak{h} . Поскольку спектр полей Вейлевского модуля также известен, известно и разложение \mathfrak{g} относительно твистованного присоединённого действия \mathfrak{h} .

Таким образом, мы построили линейные теории в терминах геометрического объекта — обобщённого поля Янга-Миллса W_q^A , дающие простое описание всем калибровочным полям, существующим в пространстве (анти)-де Ситтера. Следуя успеху развёрнутого подхода к уравнениям для безмассовых полей спина s , которые описываются геометрически с помощью W_1^A с $\mathbf{A} = \begin{array}{c} \boxed{s-1} \\ \boxed{s-1} \end{array}$ и для которых полная

нелинейная теория была построена в [45, 46], мы ожидаем, что полученные результаты для полей в $(A)dS_d$ произвольного типа симметрии будут играть важную роль при построении соответствующей нелинейной теории. Положительные результаты по кубическим вершинам взаимодействия полей произвольного типа симметрии, полученные в [35, 47, 125, 126], говорят о том, что данная теория действительно существует.

Также представляется интересным исследовать AdS_d/CFT^{d-1} соответствие в рамках данного подхода, поскольку все глобальные симметрии реализованы явно и W_q^A легко проинтерпретировать не как связность алгебры (анти)-де Ситтера, а как связность конформной алгебры.

6.7 Выводы

Исследован естественный геометрический объект в пространстве (анти)-де Ситтера — обобщённая связность алгебры (анти)-де Ситтера (или обобщённое поле Янга-Миллса алгебры (анти)-де Ситтера).

Было показано, что любое калибровочное поле (\mathbf{S}, q, t) из описанной в Главе 1 классификации полей в пространстве (анти)-де Ситтера допускает простое геометрическое описание в терминах обобщённого поля Янга-Миллса $W_q^{A_{\mathbf{S},q,t}}$ принимающего значения в некотором неприводимом представлении $A_{\mathbf{S},q,t}$ (6.134) алгебры (анти)-де Ситтера. Весь набор вспомогательных и физических полей вложен в $W_q^{A_{\mathbf{S},q,t}}$ и осуществляя различные редукции можно прийти сначала к реперной формулировке в терминах связностей алгебры Лоренца, а, затем, к метрической формулировке, которая в виду сложности известна лишь для некоторых частных случаев. Показано, что каждая обобщённая связность описывает некоторое калибровочное поле из классификации.

Основной технический метод, применяемый для в данной главе, состоит в вычислении σ_- -когомологий, которые отвечают динамическим полям, дифференциальным калибровочным параметрам на всех уровнях приводимости, а также всем калибровочно-инвариантным дифференциальным операторам и тождествам Бьянки между ними. Были вычислены σ_- -когомологии для произвольной обобщённой связности алгебры (анти)-де Ситтера, что, во-первых, даёт состав полей, калибровочных параметров и уравнений движения для off-shell'ной формулировки в терминах потенциалов и, во-вторых, позволяет связать поля и калибровочные параметры on-shell'ной формулировки с элементами точной последовательности (1.15), определяющей соответствующее бесконечномерное представление алгебры (анти)-де Ситтера.

Полученные результаты дают явную реализацию для калибровочного модуля развёрнутой системы уравнений, описывающей поле произвольного спина, типа безмассовости и глубины частичной-безмассовости. Спектр полей Вейлевского модуля также был определён, хотя само его построение представляется технически сложным для индивидуального поля и полную развёрнутую формулировку планируется построить сразу для мультиплета полей, возникающего в представлении алгебры высших спинов. отождествление калибровочных полей и обобщённых связностей, проведённое в данной главе, накладывает существенные ограничения на разложение алгебры высших спинов по отношению к присоединённому действию алгебры

(анти)-де Ситтера.

Наиболее важным является исследование вопроса о том, какие нелинейные теории возможны с полями $W_{\mathbf{q}}^A$.

Заключение

Основные результаты настоящей диссертации заключаются в следующем.

1. Построена развёрнутая формулировка бозонных и фермионных полей произвольного типа симметрии (спина) в пространстве Минковского произвольной размерности. Развёрнутые уравнения имеют вид условий обобщённого ковариантного постоянства. Результат опубликован в {1}.

2. Предложено обобщение реперной (тетрадной) формулировки на случай безмассовых полей произвольного типа симметрии (спина). Было построено простое реперное действие, содержащее два слагаемых для поля произвольного спина. Результат опубликован в {2}.

3. Относительно калибровочных полей произвольного типа симметрии в пространстве (анти)-де Ситтера, получены следующие результаты:

(а) получена полная классификация калибровочных полей произвольного типа симметрии: калибровочное поле однозначно определяется заданием спина — неприводимого представления $\mathfrak{so}(d-1)$, и двух дискретных параметров, определяющих тип безмассовости и глубину частиной-безмассовости.

(б) изучено естественное обобщение полей Янга-Миллса — обобщённое поле Янга-Миллса алгебры симметрий пространства (анти)-де Ситтера (или обобщённая связность алгебры (анти)-де Ситтера). С каждым обобщённым полем Янга-Миллса ассоциирована некоторая калибровочная теория, во многом похожая на обычную теорию Янга-Миллса; Основное утверждение состоит в том, что каждое калибровочное поле произвольного спина из полученной классификации может быть описано некоторым обобщённым полем Янга-Миллса и наоборот, каждое обобщённое поле Янга-Миллса описывает некоторое калибровочное поле из классификации;

(в) вычислено массовоподобное слагаемое в уравнениях движения, возникающих для обобщённого поля Янга-Миллса, и показано, что оно совпадает с соответствующим слагаемым, получаемым из теории представлений.

Результаты опубликованы в {4}.

4. Показано, что аналогично безмассовым полям частично-безмассовые поля допускают простое геометрическое описание в терминах обобщённых полей Янга-Миллса. А именно, было показано, что частично-безмассовое поле произвольного спина s и

глубины частичной безмассовости t может быть описано обобщённым полем Янга-Миллса, которое есть один-форма и принимает значения в неприводимом представлении алгебры (анти)-де Ситтера, определяемом двурядной диаграммой Юнга $\begin{array}{|c|} \hline s-1 \\ \hline s-t \\ \hline \end{array}$. Построено явно калибровочно-инвариантное действие. Результат опубликован в {3}.

5. Интерпретация обобщённых полей Янга-Миллса в терминах обычных метрических полей может быть сведена к вычислению кохомологий некоторого алгебраического оператора σ_- , и все динамически значимые величины, такие как физические поля или калибровочно-инвариантные уравнения, являются представителями σ_- -когомологий. В {5} были вычислены σ_- -когомологии для случая произвольного обобщённого поля Янга-Миллса алгебры (анти)-де Ситтера. В простейших случаях σ_- -когомологии совпадают с классическими кохомологиями алгебр Ли, но в случае общего положения σ_- такая интерпретация отсутствует. Результат опубликован в {5}.

Таким образом, в представленных на соискание работах сделаны первые важные и необходимые шаги к полной взаимодействующей теории полей произвольного спина, которую предполагается построить в рамках развёрнутого подхода, оказавшегося столь плодотворным для симметричных полей спина s .

Диссертация основана на работах {1}, {2}, {3}, {4}, {5}.

Другие публикации автора: {6}, {7}.

Благодарности

В заключении хочется выразить огромную признательность моему научному руководителю М.А.Васильеву за постановку интересных задач и за многочисленные обсуждения связанных вопросов, а также за помощь, простирающуюся за пределы только чистой науки. Автор также признателен Б.Л.Воронову за неповторимые лекции по теории поля, а также Б.Л.Воронову и И.В.Тютину за многочисленные консультации. Особенно важными для понимания различных аспектов теории полей высших-спинов и не только были обсуждения с К.Б.Алкалаевым, О.В.Шейнкманом, В.Е. Диденко, Е.Б.Фейгиным и Р.Р.Мецаевым.

Публикации автора

- {1} E. D. Skvortsov. Mixed-Symmetry Massless Fields in Minkowski space Unfolded. *JHEP*, 07:004, 2008.
- {2} E. D. Skvortsov. Frame-like Actions for Massless Mixed-Symmetry Fields in Minkowski space. *Nucl. Phys.*, B808:569-591, 2009.
- {3} E. D. Skvortsov and M. A. Vasiliev. Geometric formulation for partially massless fields. *Nucl. Phys.*, B756:117-147, 2006.
- {4} E. D. Skvortsov. Gauge fields in (anti)-de Sitter space and Connections of its symmetry algebra. *J.Phys.*, A42:385–401, 2009.
- {5} E. D. Skvortsov. Gauge fields in $(A)dS_d$ within the unfolded approach: algebraic aspects. *JHEP*, 1001:106, 2010.
- {6} E. D. Skvortsov and M. A. Vasiliev. Transverse invariant higher spin fields. *Phys. Lett.*, B664:301–306, 2008.
- {7} O. A. Gelfond, E. D. Skvortsov, and M. A. Vasiliev. Higher spin conformal currents in Minkowski space. *Theor. Math. Phys.*, 154:294–302, 2008.

Приложения

Приложение А Мультииндексные обозначения

Поскольку тема диссертации - тензорные поля произвольного типа симметрии, то для обозначения большого количества тензорных индексов используются компактные мультииндексные обозначения.

Все индексы, по которым некоторый тензорный объект симметричен, обозначаются одной и той же буквой, например, $\phi_{\nu\nu}$ отвечает симметричному тензору $\phi_{\nu_1\nu_2} = \phi_{\nu_2\nu_1}$. Если количество симметричных индексов велико, то такая группа индексов обозначается одной буквой, указывая количество индексов в круглых скобках, например,

$$T^{a(s)} \equiv T^{a_1 a_2 \dots a_s} : \quad T^{a_1 \dots a_i \dots a_j \dots a_s} = T^{a_1 \dots a_j \dots a_i \dots a_s}, \quad (\text{A.1})$$

таким образом $\phi_{\nu_1\nu_2} \equiv \phi_{\nu\nu} \equiv \phi_{\nu(2)}$. Выделение одного или нескольких индексов из группы симметричных индексов происходит очевидным образом, например,

$$\phi_{\mu(s)} \quad \longrightarrow \quad \partial^\nu \phi_{\nu\mu(s-1)}, \quad \partial^\nu \partial^\rho \phi_{\nu\rho\mu(s-2)}. \quad (\text{A.2})$$

Если одной и той же буквой обозначены индексы, лишь по части которых некоторый тензорный объект симметричен, то полная симметризация по всем индексам, обозначенным одной и той же буквой, нормированная на число перестановок, подразумевается. Также симметризация подразумевается по индексам, заключённым в круглые скобки. Например,

$$V^a T^{a(s)} \equiv V^{(a_1 T^{a_2 \dots a_{s+1}})} \equiv \frac{1}{s+1} (V^{a_1} T^{a_2 a_3 \dots a_{s+1}} + V^{a_2} T^{a_1 a_3 \dots a_{s+1}} + \dots + V^{a_{s+1}} T^{a_1 a_2 \dots a_s}),$$

$$V^{(b} T^{a(s)} \equiv V^{(b} T^{a_1 \dots a_s)} \equiv \frac{1}{s+1} (V^b T^{a_1 a_2 \dots a_s} + V^{a_1} T^{b a_2 a_3 \dots a_s} + \dots + V^{a_s} T^{b a_1 a_2 \dots a_{s-1}}).$$

Между верхними и нижними индексами, обозначенными одной и той же буквой, подразумевается свёртка после выполнения, если это необходимо, симметризации отдельно по верхним и отдельно по нижним индексам, обозначенным одной и той же буквой:

$$\eta^{\nu\nu} \phi_{\nu\nu\mu(s-2)} \equiv \phi^\nu{}_{\nu\mu(s-2)} \equiv \eta^{\nu\rho} \phi_{\nu\rho\mu(s-2)}, \quad (\text{A.3})$$

$$\eta^{\mu\mu} \partial_\mu \phi_{\mu\mu} \equiv 2/3 \partial^\nu \phi_{\nu\mu} + 1/3 \partial_\mu \phi^\nu{}_\nu. \quad (\text{A.4})$$

Группы симметричных индексов отделяются друг от друга: запятой ',', если на индексы наложены так называемые юнговские условия (см. ниже); вертикальной чертой '|', если между группами индексов нет никаких дополнительных условий.

Аналогичные обозначения, но с заменой круглых скобок квадратными, используются для индексов, по которым некоторый тензорный объект антисимметричен, и для обозначения операции антисимметризации. Например,

$$T^{a[s]} \equiv T^{a_1 a_2 \dots a_s} : \quad T^{a_1 \dots a_i a_{i+1} \dots a_s} = -T^{a_1 \dots a_{i+1} a_i \dots a_s},$$

$$V^{[b T^{a[s]}]} \equiv V^{[b T^{a_1 \dots a_s}]} \equiv \frac{1}{s+1} (V^b T^{a_1 a_2 \dots a_s} - V^{a_1} T^{b a_2 a_3 \dots a_s} + \dots + (-)^s V^{a_s} T^{b a_1 a_2 \dots a_{s-1}}).$$

Приложение В Некоторые обозначения

Алгебры:

- $\mathfrak{so}(d, 1)$ - алгебра симметрий пространства де Ситтера
- $\mathfrak{so}(d-1, 2)$ - алгебра симметрий пространства анти-де Ситтера
- $\mathfrak{iso}(d-1, 1)$ - алгебра Пуанкаре, симметрий пространства Минковского
- $\mathfrak{so}(d-1, 1)$ - алгебра Лоренца, подалгебра алгебры Пуанкаре или алгебры (анти)-де Ситтера
- $\mathfrak{so}(d-1)$ - малая алгебра Вигнера, представления которой определяют спин массивного поля в пространстве Минковского или спин как массивного, так и безмассового поля в пространстве (анти)-де Ситтера
- $\mathfrak{so}(d-2)$ - малая алгебра Вигнера, представления которой определяют спин безмассового поля в пространстве Минковского

Соглашения об индексах:

- $\mu, \nu, \lambda, \rho = 0 \dots (d-1)$ - мировые тензорные индексы, т.е. индексы в базисе, наследуемом от системы координат на многообразии в данной карте.
- $a, b, c, u, v = 0 \dots (d-1)$ - касательные тензорные индексы (индексы слоя) алгебры Лоренца, $\mathfrak{so}(d-1, 1)$, т.е. индексы в неголономном базисе, определяемом полем тетрады h_μ^a так, что метрика $g_{\mu\nu}$ имеет вид $h_\mu^a h_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}$.
- $A, B, C, U, V = 0 \dots d$ - касательные тензорные индексы (индексы слоя) алгебры де Ситтера, $\mathfrak{so}(d, 1)$, или алгебры анти-де Ситтера, $\mathfrak{so}(d-1, 2)$. Для значения индекса d , т.е. для дополнительного значения индекса вектора алгебры (анти)-де Ситтера по сравнению с вектором алгебры Лоренца, используется обозначение \bullet .
- $a, b, c, d = 0 \dots (d-2)$ - индексы алгебры $\mathfrak{so}(d-1)$, как подалгебры алгебры (анти)-де Ситтера.
- $\alpha, \beta, \gamma = 1 \dots 2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ - спинорные индексы алгебры Лоренца в слое.
- $\hat{\alpha} = 1 \dots 2^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor}$ - спинорные индексы алгебры де Ситтера, $\mathfrak{so}(d, 1)$, или алгебры анти-де Ситтера, $\mathfrak{so}(d-1, 2)$, в слое.

Инвариантные тензоры:

- η_{ab} - инвариантный тензор алгебры Лоренца, $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$.
- $\epsilon_{u_1 \dots u_d}$ инвариантный полностью антисимметричный тензор алгебры Лоренца.
- η_{AB} - инвариантный тензор алгебры (анти)-де Ситтера.

Блочная запись. Диаграмма задаётся перечислением длин и высот максимальных прямоугольных блоков, на которые она разбивается, начиная с верху, $\mathbb{Y}\{(s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N)\}$,

$$\mathbb{Y}\{(s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N)\} \equiv \mathbb{Y}(\overbrace{s_1, \dots, s_1}^{p_1}, \overbrace{s_2, \dots, s_2}^{p_2}, \dots, \overbrace{s_N, \dots, s_N}^{p_N}). \quad (\text{C.2})$$

например, для диаграммы выше имеем $\mathbf{X} = \mathbb{Y}\{(6, 3), (4, 2), (1, 2)\}$.

Ранг диаграммы, т.е. количество клеток в ней, обозначается $|\mathbf{X}|$. Каждая диаграмма, например, \mathbf{X} , очевидно, задаёт разбиение числа $|\mathbf{X}|$ в сумму невозрастающих чисел $|\mathbf{X}| = s_1 + s_2 + \dots + s_n$.

Пустая диаграмма, т.е. состоящая из нуля клеток $|\mathbf{X}| = 0$, обозначается \bullet .

Отметим, что бывает удобно считать, что длины строк(столбцов) могут принимать нулевые значения.

С.2 Типы симметрии тензоров и диаграммы Юнга

Отвлекаясь пока от природы тензорных индексов (т.е. не предполагая, например, что индексы пробегают определённый диапазон), каждой диаграмме Юнга \mathbf{X} можно поставить в соответствие неприводимый относительно перестановок индексов тензорный объект ранга $|\mathbf{X}|$.

Пустой диаграмме $\mathbf{X} = \bullet$ отвечает тензор без индексов, т.е. скаляр. Однострочной диаграмме $\mathbf{X} = \mathbb{Y}(s)$ отвечает симметричный тензор ранга $|\mathbf{X}| = s$, $T^{A(s)}$. Диаграмме с одной колонкой $\mathbf{X} = \mathbb{Y}[p]$ отвечает антисимметричный тензор ранга $|\mathbf{X}| = p$, $T^{A[p]}$.

Остальным диаграммам, число которых быстро растёт с рангом $|\mathbf{X}|$, отвечают тензоры так называемого смешанного типа симметрии, теория полей со спином, определяемым произвольной диаграммой, и есть основной предмет изучения в диссертации.

В отличие от полностью симметричных и полностью антисимметричных тензоров, которые в терминах свойств индексов относительно перестановок определяются единственным образом, для тензоров смешанного типа симметрии существует произвол в виде свойств индексов относительно перестановок. Этот произвол соответствует различным выборам базиса для записи тензоров. Наиболее часто используются следующие базисы:

симметричный базис. Диаграмме $\mathbf{X} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$ сопоставляется тензор $T^{\mathbf{X}}$, содержащий n групп индексов, i -ая группа содержит s_i индексов с явной симметрией по индексам внутри данной группы,

$$T^{A(s_1), B(s_2), \dots, U(s_n)} \equiv T^{A_1 \dots A_{s_1}, B_1 \dots B_{s_2}, \dots, U_1 \dots U_{s_p}}. \quad (\text{C.3})$$

Также тензор $T^{\mathbf{X}}$ удовлетворяет так называемым юнговским условиям: симметризация всех индексов какой-либо группы с любым индексом одной из последующих групп обращается тождественно в ноль,

$$T^{A(s_1), \dots, B(s_i), \dots, BC(s_j-1), \dots, U(s_n)} \equiv 0, \quad i < j. \quad (\text{C.4})$$

Утверждение теории представлений состоит в том, что на данный тензор $T^{\mathbf{X}}$ невозможно наложить более сильных условий симметрии, и неприводимое представление \mathbf{X} группы перестановок реализуется на $T^{\mathbf{X}}$. ■

антисимметричный базис. Эквивалентно можно потребовать явной антисимметрии по индексам внутри каждой группы, а именно: диаграмме $\mathbf{Y} = \mathbb{Y}[h_1, \dots, h_m]$ сопоставляется тензор $R^{\mathbf{Y}}$, содержащий m групп индексов, i -ая группа содержит h_i индексов с явной антисимметрией,

$$R^{A[h_1], B[h_2], \dots, U[s_m]}. \quad (\text{C.5})$$

Также тензор $R^{\mathbf{Y}}$ удовлетворяет условиям Юнга: антисимметризация всех индексов какой-либо группы с любым индексом одной из последующих групп обращается тождественно в ноль,

$$R^{A[h_1], \dots, B[h_i], \dots, BC[h_j-1], \dots, U[s_m]} \equiv 0, \quad i < j. \quad (\text{C.6})$$

Данный тензор R также реализует неприводимое представление \mathbf{Y} группы перестановок. ■

Если диаграммы \mathbf{Y} и \mathbf{X} тождественны (с точностью до выбора формы записи), то $R^{\mathbf{Y}}$ и $T^{\mathbf{X}}$ реализуют с точностью до изоморфизма одно и то же представление. Сам оператор, обеспечивающий изоморфизм, устроен очень просто: для перехода из антисимметричного базиса в симметричный необходимо симметризовать все первые индексы в каждой группе, таковых будет как раз s_1 , затем симметризовать вторые индексы из каждой группы и так далее. Переход из симметричного базиса в антисимметричный осуществляется аналогично.

Отметим, что существует также большое количество других базисов помимо симметричного и антисимметричного для записи тензоров смешанного типа симметрии.

Переходя в процессе рассуждений от одного базиса к другому, можно сильно упростить доказательство отдельных утверждений для тензоров общего типа симметрии. Например, предположив, что индексы A, B, \dots пробегает N значений, и, переходя к антисимметричному базису, мы немедленно заключаем, что диаграммы Юнга, которым отвечают нетривиальные тензоры, должны иметь не более N строк. Действительно, в антисимметричном базисе мы бы имели тензор $T^{A[N']}, \dots$ с $N' > N$, который должен быть антисимметричен по N' индексам, пробегающим только N значений, откуда следует $T^{A[N']}, \dots \equiv 0$.

С.3 Связь диаграмм Юнга с неприводимыми представлениями алгебр классической серии

Ниже приводится классификация тех неприводимых представлений классических алгебр Ли, которые могут быть реализованы как тензоры или спин-тензоры.

$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Две диаграммы Юнга $\mathbf{X}^+ = \mathbb{Y}(s_1^+, \dots, s_p^+)$ и $\mathbf{X}^- = \mathbb{Y}(s_1^-, \dots, s_q^-)$, такие что их суммарная высота не превосходит n , т.е. $p + q \leq n$, определяют неприводимое

представление \mathfrak{gl}_n со старшим весом

$$(s_1^+, \dots, s_p^+, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-p-q}, -s_q^-, \dots, -s_1^-), \quad (\text{C.7})$$

которое соответствует тензору с контравариантными индексами, реализующими представление перестановок \mathbf{X}^+ , и ковариантными индексами, реализующими представление перестановок \mathbf{X}^- , и такому, что любая свёртка ковариантных индексов с контравариантными даёт тождественный ноль,

$$T^{A(s_1^+), \dots, D(s_p^+)}_{E(s_1^-), \dots, H(s_q^-)}, \quad T^{A(s_1^+), \dots, NB(s_i^+ - 1), \dots, D(s_p^+)}_{E(s_1^-), \dots, NF(s_j^- - 1), \dots, H(s_q^-)} \equiv 0 \quad (\text{C.8})$$

То же самое верно для вещественных форм $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, \mathfrak{u}_{n_1, n_2} , $n_1 + n_2 = n$.

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Диаграмма Юнга $\mathbf{X} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_p)$ высоты, не превосходящей $n - 1$, т.е. $p \leq n - 1$, определяет неприводимое представление \mathfrak{sl}_n с весом

$$(s_1, \dots, s_p, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-p-1}), \quad (\text{C.9})$$

соответствующее тензору, на индексах которого реализуется представление группы перестановок \mathbf{X} . То же самое верно для вещественных форм $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, \mathfrak{su}_{n_1, n_2} , $n_1 + n_2 = n$.

Отметим, что формально можно рассмотреть также антисимметричные тензоры \mathfrak{sl}_n ранга n , однако они не дают новых представлений, так как пропорциональны инвариантному полностью антисимметричному тензору \mathfrak{sl}_n .

$\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$. Классификация представлений ортогональных алгебр зависит от чётности n .

При $n = 2\nu$ неприводимое представление $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ определяется старшим весом вида (s_1, s_2, \dots, s_ν) и такого, что

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{\nu-1} \geq |s_\nu|, \quad (\text{C.10})$$

где числа s_i - одновременно целые или полуцелые и все кроме s_ν обязательно неотрицательные. Представления, определяемые старшим весом, у которого все s_i , целые называются тензорными, а те, у которых все s_i полуцелые, — спинорными.

Произвол в знаке веса s_ν отвечает возможности наложения условия (анти)самодуальности вида

$$T^{a[\nu], \dots} = \begin{cases} \pm \overbrace{\eta^{ac} \dots \eta^{ac}}^\nu \epsilon_{c[\nu]b[\nu]} T^{b[\nu], \dots}, & (-)^{\nu^2} \det \eta = +1, \\ (\pm i) \overbrace{\eta^{ac} \dots \eta^{ac}}^\nu \epsilon_{c[\nu]b[\nu]} T^{b[\nu], \dots}, & (-)^{\nu^2} \det \eta = -1, \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

где возможность наложения вещественного или комплексного условия зависит от сигнатуры η_{ab} и размерности ν .

При $n = 2\nu + 1$ неприводимое представление $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ определяется старшим весом вида (s_1, s_2, \dots, s_ν) и такого, что

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{\nu-1} \geq s_\nu \geq 0, \quad (\text{C.12})$$

где числа s_i - одновременно целые или полуцелые.

Для того, чтобы быть неприводимыми, тензоры ортогональной алгебры должны обладать определённой юнговской симметрией, быть бесследовыми, т.е. свёртка любых двух индексов с инвариантной метрикой η_{ab} должна обращаться в ноль тождественно, а также, если это возможно, быть подчинёнными условиям (анти)самодуальности.

Очевидно, что в случае спинорных представлений, имея некоторый смешанный объект $T^{abc\dots;\alpha\beta\dots}$ как с тензорными a, b, c, \dots , так и со спинорными α, β, \dots индексами, с помощью Γ -матриц спинорные индексы могут быть попарно преобразованы в тензорные индексы. Поэтому, любой спин-тензор общего типа может быть разложен на спин-тензоры с не более чем одним спинорным индексом каждый - тензорная часть неприводимого спин-тензора должна удовлетворять обычным для $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ -тензора условиям юнговости, бесследовости и, если это возможно, (анти)самодуальности, и в добавок спин-тензор должен быть Γ -бесследов, т.е. свёртка одного тензорного и одного спинорного индекса с помощью Γ -матриц должна тождественно обращаться в ноль,

$$\Gamma_{c\beta}^\alpha T^{\beta;abc\dots} \equiv 0. \quad (\text{C.13})$$

Неприводимые представления $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ по-прежнему удобно обозначать диаграммами Юнга, определяющими тип симметрии тензорных индексов (Γ -)бесследова (спин)-тензора. Поскольку в случае $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ необходимо различать (анти)-самодуальные представления, а также спинорные и тензорные представления, мы вводим дополнительные обозначения. (Анти)-самодуальные представления обозначаются подстрочным индексом $(-)+$ у диаграммы Юнга, а для обозначения спинорных представлений используется подстрочный индекс $\frac{1}{2}$.

Для $n = 2\nu$, диаграмма Юнга $\mathbf{X} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_p)$ определяет два типа неприводимых представлений, если $p < \nu$

$$\mathbf{X} \longrightarrow (s_1, \dots, s_p, \overbrace{0, \dots, 0}^{\nu-p}), \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{X}_{\frac{1}{2}} \longrightarrow (s_1 + \frac{1}{2}, \dots, s_p + \frac{1}{2}, \overbrace{+\frac{1}{2}, \dots, +\frac{1}{2}}^{\nu-p}), \quad (\text{C.15})$$

и четыре типа неприводимых представлений, если $p = \nu$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_+ &\longrightarrow (s_1, \dots, s_p), \\ \mathbf{X}_- &\longrightarrow (s_1, \dots, s_{p-1}, -s_p), \\ \mathbf{X}_{+\frac{1}{2}} &\longrightarrow (s_1 + \frac{1}{2}, \dots, s_p + \frac{1}{2}), \\ \mathbf{X}_{-\frac{1}{2}} &\longrightarrow (s_1 + \frac{1}{2}, \dots, s_{p-1} + \frac{1}{2}, -s_p - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Для $n = 2\nu + 1$, диаграмма Юнга $\mathbf{X} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_p)$ с $p \leq \nu$ определяет два типа неприводимых представлений, задаваемых формально теми же весами (С.14)-(С.15).

Заметим, что взятие двойного Γ -следа по двум симметричным индексам некоторого спин-тензора эквивалентно взятию следа,

$$0 = \Gamma_{a\beta}^\alpha \Gamma_{b\gamma}^\beta T^{\gamma;(ab)} = \eta_{ab} T^{\alpha;ab}. \quad (\text{С.16})$$

Также отметим, что можно рассматривать бесследовые тензоры $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$, симметрия которых определяется диаграммой Юнга с более чем $[n/2]$ строками. Используя полностью анти-симметричный инвариантный тензор, можно преобразовать некоторую группу антисимметричных индексов размера $k > [n/2]$ в группу антисимметричных индексов размера $n - k \leq [n/2]$. Причём бесследовый тензор с симметрией диаграммы $\mathbf{X} = \mathbb{Y}[h_1, h_2, \dots]$, такой что $h_1 + h_2 > n$, тождественно равен нулю, см. например [207].

$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$. Диаграмма Юнга $\mathbf{X} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_p)$ высоты, не превосходящей n , т.е. $p \leq n$, определяет неприводимое представление \mathfrak{sp}_{2n} с весом

$$(s_1, \dots, s_p, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-p}), \quad (\text{С.17})$$

соответствующее тензору, на индексах которого реализуется представление группы перестановок \mathbf{X} и удовлетворяющему условию бесследовости, т.е. свёртка любых двух индексов с инвариантной формой алгебры \mathfrak{sp}_{2n} обращается в ноль тождественно. То же самое верно для вещественной формы $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R})$.

С.4 Ограничение представлений

При работе с неприводимыми тензорами смешанного типа симметрии некоторой алгебры \mathfrak{g} нам потребуется интерпретация тензора с точки зрения некоторой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Данная проблема называется ограничением представления на подалгебру и в математической литературе хорошо известна как 'branching rules' или ограничение (restriction) представлений (см. [208–210]).

Нас будут интересовать разложения, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(d+1)$ будет алгеброй симметрий пространства (анти)-де Ситтера, а $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(d)$ будет алгеброй Лоренца; $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(d+1)$ $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(d)$ в качестве некоторых простых примеров; $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(d)$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(d)$, когда некоторый тензор без следовых условий необходимо разложить на неприводимые, в частности бесследовые, тензоры алгебры Лоренца.

$Res_{\mathfrak{gl}_{d-1}}^{\mathfrak{gl}_d}$. Пусть неприводимое представление \mathfrak{gl}_d задаётся весами (s_1, \dots, s_d) , тогда его ограничение на \mathfrak{gl}_{d-1} даётся представлениями, веса которых (m_1, \dots, m_{d-1}) удовлетворяют

$$s_1 \geq m_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{d-1} \geq m_{d-1} \geq s_d \quad (\text{С.18})$$

Если рассматривается тензор только одного типа, например ковариантный, определяемый некоторой диаграммой Юнга $\mathbf{X} = \mathbb{Y}\{(s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N)\}$, $p_1 + \dots + p_N < d$,

то диаграммы, характеризующие неприводимые представления, получаемые в результате ограничения, имеют вид

$$\mathbf{X}_{\{k_1, \dots, k_N\}} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline s_1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline p_1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline s_2 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline p_2 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline s_N \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline p_N - 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline k_N \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad (\text{C.19})$$

т.е.

$$\mathbf{Res}_{\mathfrak{gl}_{d-1}}^{\mathfrak{gl}_d} \mathbf{X} = \bigoplus \mathbf{X}_{\{k_1, \dots, k_N\}}, \quad (\text{C.20})$$

где кратность каждого представления $\mathbf{X}_{\{k_1, \dots, k_N\}}$ равна единице и

$$\mathbf{X}_{\{k_1, \dots, k_N\}} = \begin{cases} \mathbb{Y}\{(s_1, p_1 - 1), (s_2 + k_1, 1), \dots, (s_N, p_N - 1), (k_N, 1)\}, & \text{если } k_1 \in [0, s_1 - s_1], \dots, k_N \in [0, s_N], \\ \emptyset, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

$\mathbf{Res}_{\mathfrak{so}_{d-1}}^{\mathfrak{so}_d}$. Пусть $d = 2\nu + 1$ и представление $\mathfrak{so}_{2\nu+1}$ определяется старшим весом (s_1, \dots, s_ν) , тогда представления, возникающие при ограничении на подалгебру $\mathfrak{so}_{2\nu}$, имеют старшие веса (m_1, \dots, m_ν) , удовлетворяющие

$$s_1 \geq m_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_\nu \geq m_\nu \geq -s_\nu, \quad (\text{C.22})$$

где кратность каждого представления равна 1 и все веса являются одновременно целыми или одновременно полуцелыми.

Если $d = 2\nu$ и представление $\mathfrak{so}_{2\nu}$ определяется старшим весом (s_1, \dots, s_ν) , тогда представления, возникающие при ограничении на подалгебру $\mathfrak{so}_{2\nu-1}$, имеют старшие веса $(m_1, \dots, m_{\nu-1})$, удовлетворяющие

$$s_1 \geq m_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{\nu-1} \geq m_{\nu-1} \geq |s_\nu|, \quad (\text{C.23})$$

где кратность каждого представления равна 1 и все веса являются одновременно целыми или одновременно полуцелыми.

Если представление \mathbf{X} алгебры \mathfrak{so}_d определяется некоторой диаграммой $\mathbf{X} = \mathbb{Y}((s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N))$, такой что $p_1 + \dots + p_N < [d/2]$, т.е. (анти)-самодуальные представления выпадают из рассмотрения, то правила ограничения упрощаются и формально сводятся к (C.19)-(C.21) в терминах диаграмм Юнга.

Res $_{\mathfrak{so}_d}^{\mathfrak{gl}_d}$. Задача о рассмотрении разложения представления \mathfrak{gl}_d на представления \mathfrak{so}_d возникает, если дан некоторый тензор \mathfrak{so}_d , имеющий симметрию некоторой диаграммы Юнга, но на который не наложено следовых условий, и необходимо разложить его на бесследовые тензоры \mathfrak{so}_d , т.е. на неприводимые тензоры. Ответ для некоторого класса представлений легко сформулировать через коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона (см. ниже) для \mathfrak{gl}_d .

Пусть представление \mathfrak{gl}_d определяется диаграммой Юнга $\mathbf{X} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_p)$ такой что $p < [d/2]$, тогда кратность представления $\mathbf{Y} = \mathbb{Y}[h_1, \dots, h_q]$ такого, что $h_1 + h_2 \leq d$ в представлении \mathbf{X} равна

$$\dim \text{hom}_{\mathfrak{so}_d}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{2\mathbf{Z}} C_{\mathbf{Y}, 2\mathbf{Z}}^{\mathbf{X}}, \quad (\text{C.24})$$

где сумма берётся по диаграммам $2\mathbf{Z}$ с чётным числом клеток в каждой строке.

С.5 Тензорные произведения представлений

Имея два неприводимых представления, скажем, \mathbf{X} и \mathbf{Y} , некоторой алгебры \mathfrak{g} , мы можем разложить их тензорное произведение $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ на неприводимые представления ($\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ является вполне приводимым представлением для классических алгебр). В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(d)$ коэффициенты разложения $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ на неприводимые представления известны как коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона (в случае $\mathfrak{so}(3)$ они называются коэффициентами Клебша-Гордона) и играют фундаментальную роль во всех вопросах, связанных с тензорным произведением представлений классических алгебр. Итак,

$$\mathbf{X} \otimes_{\mathfrak{gl}(d)} \mathbf{Y} = \bigoplus_{\mathbf{Z}} C_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}^{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}, \quad (\text{C.25})$$

где сумма берётся по всем представлениям \mathbf{Z} и $C_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}^{\mathbf{Z}}$ есть коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона. $C_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}^{\mathbf{Z}}$ может равняться нулю, говоря о том, что \mathbf{Z} не входит в разложение, или быть произвольным натуральным числом, т.е. \mathbf{Z} может входить с кратностью больше 1.

Для $C_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}^{\mathbf{Z}}$ и их аналогов для других алгебр, вообще говоря, не существует явных формул, за исключением простейших случаев. Тем не менее можно сформулировать алгоритм, применение которого позволит разложить тензорное произведение конкретных представлений. Подробные правила тензорного произведения для классических алгебр можно найти в [203]. Нам потребуются специализации для алгебр $\mathfrak{gl}(d)$ и $\mathfrak{so}(d)$, когда \mathbf{X} есть произвольное представление, а \mathbf{Y} характеризуется диаграммой Юнга, состоящей из одного столбца.

$\mathfrak{gl}(d)$ -тензорное произведение. Пусть дано неприводимое представление $\mathfrak{gl}(d)$, определяемое диаграммой $\mathbf{X} = \mathbb{Y}\{(s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N)\}$, тогда разложение тензорного произведения $\mathbf{X} \otimes \mathbb{Y}[q]$ имеет вид

$$\mathbf{X} \otimes_{\mathfrak{gl}(d)} \mathbb{Y}[q] = \bigoplus_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{N+1} = q} \mathbf{X}^{\{\alpha_j\}}, \quad (\text{C.26})$$

где кратность каждого неприводимого представления $\mathbf{X}^{\{\alpha_j\}}$ равна 1 и сумма берётся по всем правильным диаграммам Юнга $\mathbf{X}^{\{\alpha_j\}}$ с $\alpha_1 + \dots + \alpha_{N+1} = q$ вида

$$\mathbf{X}^{\{\alpha_1, \dots, \alpha_{N+1}\}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & s_1 & \\ \hline p_1 & & \alpha_1 \\ \hline & s_2 & \\ \hline p_2 & & \alpha_2 \\ \hline & s_N & \\ \hline p_N & & \alpha_N \\ \hline & & \alpha_{N+1} \\ \hline \end{array} \quad : \alpha_i \leq p_i, \quad \text{для } i = 1, \dots, N. \quad (\text{C.27})$$

Поскольку $\mathbb{Y}[q]$ отвечает антисимметричному тензору, то клетки $\mathbb{Y}[q]$, приписываемые к \mathbf{X} , не могут встречаться в одной строке, что и обуславливает вид $\mathbf{X}^{\{\alpha_j\}}$. Отметим также, что в сумме (C.26) отсутствуют диаграммы с $p_1 + \dots + p_N + \alpha_{N+1} > d$, так как соответствующие тензоры тождественно равны нулю.

$\mathfrak{so}(d)$ -тензорное произведение. Задача о разложении тензорного произведения двух представлений $\mathfrak{so}(d)$ является более сложной, поскольку с помощью инвариантного тензора η_{ab} индексы теперь можно ещё и сворачивать. Пусть дано неприводимое представление $\mathfrak{so}(d)$, определяемое диаграммой Юнга $\mathbf{X} = \mathbb{Y}\{(s_1, p_1), \dots, (s_N, p_N)\}$, тогда разложение $\mathbf{X} \otimes_{\mathfrak{so}(d)} \mathbb{Y}[q]$ имеет вид

$$\mathbf{X} \otimes_{\mathfrak{so}(d)} \mathbb{Y}[q] = \bigoplus_{\{\alpha_j, \beta_i\}} N_{\{\alpha_j, \beta_i\}} \mathbf{Y}^{\{\alpha_j, \beta_i\}}, \quad (\text{C.28})$$

где сумма берётся по всем правильным диаграммам вида $\mathbf{Y}^{\{\alpha_j, \beta_i\}}$

$$\mathbf{Y}^{\{\alpha_j, \beta_i\}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & s_1 & \\ \hline p_1 & & \alpha_1 \\ \hline & & \epsilon_1 \\ \hline & & \beta_1 \\ \hline & s_2 & \\ \hline p_2 & & \alpha_2 \\ \hline & & \epsilon_2 \\ \hline & & \beta_2 \\ \hline & s_N & \\ \hline p_N & & \alpha_N \\ \hline & & \epsilon_N \\ \hline & & \beta_N \\ \hline & & \alpha_{N+1} \\ \hline \end{array} \quad : \alpha_i + \beta_i \leq p_i, \quad \text{for } i = 1, \dots, N, \quad (\text{C.29})$$

таких что существует неотрицательное целое ρ

$$q = \sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i + \beta_i) + \alpha_{N+1} + 2\rho, \quad (\text{C.30})$$

$N_{\{\alpha_j, \beta_i\}}$ есть кратность представления $\mathbf{Y}^{\{\alpha_j, \beta_i\}}$ и даётся количеством разбиений

$$N_{\{\alpha_j, \beta_i\}} = P(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \rho), \quad \epsilon_i = p_i - \alpha_i - \beta_i, \quad (\text{C.31})$$

числа ρ в сумму N чисел $k_1 + \dots + k_N = \rho$ таких, что $0 \leq k_i \leq \epsilon_i$.

Количество тензорных индексов \mathbf{X} (или \mathbf{Y}), которые необходимо свернуть с \mathbf{Y} (\mathbf{X}), чтобы получить затем тензор с симметрией $\mathbf{Y}^{\{\alpha_j, \beta_i\}}$, называется порядком следа. Порядок следа r представления $\mathbf{Y}^{\{\alpha_j, \beta_i\}}$ даётся

$$r = \sum_{i=1}^{i=N} \beta_i + \rho. \quad (\text{C.32})$$

Смысл приведённых формул заключается в следующем: имея q антисимметричных индексов, отвечающих диаграмме $\mathbb{Y}[q]$, мы рассматриваем следы всех порядков. Рассмотрим след, например, порядка r . Каждому разбиению $r = t_1 + \dots + t_N$, $t_i \leq p_i$, отвечает взятие следа, при котором t_i индексов (клеток) из $\mathbb{Y}[q]$ сворачиваются с t_i индексами в i -м блоке, что на диаграммном языке приводит к отрезанию подколоники высоты t_i справа снизу i -го блока; затем, полученная таким путём диаграмма должна быть умножена на оставшиеся $(q - r)$ клеток \mathbf{Y} , и здесь можно воспользоваться правилами для $\mathfrak{gl}(d)$, что приводит к тому, что справа-сверху i -го блока приписываются α_i клеток, также часть клеток может быть приписана на место удалённых t_i клеток, что сокращает число отрезанных клеток до β_i ; именно за счёт того что β_i может быть получено многими способами, число которых определяется ϵ_i , кратность представлений может быть больше 1. Число клеток, которые были сначала отрезаны, а затем восстановлены, равно ρ .

Диаграммы $\mathbf{Y}^{\{\alpha_j, \beta_i\}}$, такие что сумма высот первых двух её столбцов превосходит d , отвечают тождественно равным нулю тензорам. Если высота первой колонки превосходит $[d/2]$, то с помощью полностью антисимметричного инвариантного тензора её можно превратить в диаграмму, у которой первый столбец не превосходит $[d/2]$. В случае чётного d и надлежащей сигнатуры η^{ab} диаграмма $\mathbf{Y}^{\{\alpha_j, \beta_i\}}$ высоты $d/2$ отвечает приводимому тензору, который может быть разложен на самодуальную и антисамодуальную части.

Отметим, что диаграммы, получающиеся из тензорного произведения по правилам для $\mathfrak{gl}(d)$, входят в разложение (C.28) как следы нулевого порядка, т.е. $\rho = 0$, $\beta_i = 0$.

Нам также будет полезна производящая функция для разбиений

$$\sum_m P(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N | m) t^m = \prod_{i=1}^{i=N} \frac{(1 - t^{\epsilon_i+1})}{1 - t} \quad (\text{C.33})$$

В случае, когда необходимо вычислить тензорное произведение произвольного фермионного представления на представление определяемое диаграммой Юнга с одной колонкой, появляется дополнительная возможность сворачивать индексы, используя гамма-матрицы. Не вдаваясь в детали, такое тензорное произведение может

быть вычислено последовательным применением уже описанных правил для тензорных представлений

$$\mathbb{Y}\{(s_i, p_i)\}_{\frac{1}{2}} \otimes_{\mathfrak{so}(d)} \mathbb{Y}[q] = \sum_{k=0}^q (\mathbb{Y}\{(s_i, p_i)\} \otimes_{\mathfrak{so}(d)} \mathbb{Y}[q-k])_{\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.34})$$

а кратность представления в разложении даётся соответственно

$$N_{\{\alpha_j\}, \{\beta_i\}}^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{i=\rho} P(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \rho - i). \quad (\text{C.35})$$

Приложение D Коэффициенты к главе 5

Явные выражения для $g(k, l)$, $G(k, l)$, $f(k, l)$ и $F(k, l)$ имеют вид

$$g(k, m) = \sqrt{h(k, m) \frac{k+1}{k(d+k-2)}}, \quad (\text{D.1})$$

$$G(k, m) = \sqrt{H(k, m) \frac{k-m}{(d+m-3)(k-m+1)}}, \quad (\text{D.2})$$

$$f(k, m) = \sqrt{h(k-1, m) \frac{(k-1)(d+k-3)}{k}}, \quad (\text{D.3})$$

$$F(k, m) = \sqrt{H(k, m-1) \frac{(d+m-4)(k-m+2)}{k-m+1}}, \quad (\text{D.4})$$

где

$$h(k, m) = \frac{(k-t+1)(d+k+t-2)(s-k-1)(d+s+k-2)}{(k-m+1)(d+k+m-2)(d+2k)}, \quad (\text{D.5})$$

$$H(k, m) = \frac{(s-m)(d+s+m-3)(t-m)(d+t+m-3)}{(k-m+1)(d+k+m-2)(d+2m-2)}. \quad (\text{D.6})$$

Выражения для $h(k, m)$ и $H(k, m)$ получаются решением условий калибровочной инвариантности напряжённости (5.56) относительно преобразований (5.61).

Определённые так $g(k, l)$, $G(k, l)$, $f(k, l)$ и $F(k, l)$ удовлетворяют

$$f(k+1, m) = \frac{(d+k-2)k}{(k+1)} g(k, m), \quad (\text{D.7})$$

$$F(k, m+1) = \frac{(d+m-3)(k-m+1)}{(k-m)} G(k, m), \quad (\text{D.8})$$

что гарантирует сопряжённость операторов $\sigma_+^{1,2}$ операторам $\sigma_-^{1,2}$ по отношению к скалярному произведению (5.66). Также отметим, что

$$h(k, m) = f(k+1, m)g(k, m), \quad (\text{D.9})$$

$$H(k, m) = F(k, m+1)G(k, m). \quad (\text{D.10})$$

Литература

- [1] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253–291 [[hep-th/9802150](#)].
- [2] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, *Gauge theory correlators from non-critical string theory*, *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105–114 [[hep-th/9802109](#)].
- [3] J. M. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252 [[hep-th/9711200](#)].
- [4] E. Witten, *Noncommutative Geometry and String Field Theory*, *Nucl. Phys.* **B268** (1986) 253.
- [5] N. Moeller, *Closed bosonic string field theory at quintic order: Five-tachyon contact term and dilaton theorem*, *JHEP* **03** (2007) 043 [[hep-th/0609209](#)].
- [6] D. Gaiotto, L. Rastelli, A. Sen and B. Zwiebach, *Ghost structure and closed strings in vacuum string field theory*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **6** (2003) 403–456 [[hep-th/0111129](#)].
- [7] B. Zwiebach, *Closed string field theory: Quantum action and the B - V master equation*, *Nucl. Phys.* **B390** (1993) 33–152 [[hep-th/9206084](#)].
- [8] M. Saadi and B. Zwiebach, *Closed String Field Theory from Polyhedra*, *Ann. Phys.* **192** (1989) 213.
- [9] H. Sonoda and B. Zwiebach, *Covariant closed string theory cannot be cubic*, *Nucl. Phys.* **B336** (1990) 185.
- [10] V. I. Ogievetsky and I. V. Polubarinov, *Interacting fields of spin 1 and symmetry properties*, *Ann. of Phys. (N. Y.)* **25** (1963) 358–386.
- [11] C.-N. Yang and R. L. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191–195.
- [12] J. M. Cornwall, D. N. Levin and G. Tiktopoulos, *Uniqueness of spontaneously broken gauge theories*, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1268–1270.
- [13] J. M. Cornwall, D. N. Levin and G. Tiktopoulos, *Derivation of Gauge Invariance from High-Energy Unitarity Bounds on the S Matrix*, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 1145.

- [14] M. Fierz and W. Pauli, *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A173** (1939) 211–232.
- [15] V. I. Ogievetsky and I. V. Polubarinov, *Interacting field of spin 2 and the einstein equations*, *Ann. Phys (NY)* **35** (1965) 167–207.
- [16] D. G. Boulware and S. Deser, *Classical General Relativity Derived from Quantum Gravity*, *Ann. Phys.* **89** (1975) 193.
- [17] N. Boulanger, T. Damour, L. Gualtieri and M. Henneaux, *Inconsistency of interacting, multigraviton theories*, *Nucl. Phys.* **B597** (2001) 127–171 [hep-th/0007220].
- [18] H. Weyl, *Electron and gravitation*, *Z. Phys.* **56** (1929) 330–352.
- [19] T. W. B. Kibble, *Lorentz invariance and the gravitational field*, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 212–221.
- [20] S. W. MacDowell and F. Mansouri, *Unified geometric theory of gravity and supergravity*, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 739.
- [21] K. S. Stelle and P. C. West, *Spontaneously broken de sitter symmetry and the gravitational holonomy group*, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 1466.
- [22] W. Rarita and J. Schwinger, *On a theory of particles with half integral spin*, *Phys. Rev.* **60** (1941) 61.
- [23] W. P. M. Fierz, *On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field*, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A173** (1939) 211.
- [24] P. Van Nieuwenhuizen, *Supergravity*, *Phys. Rept.* **68** (1981) 189–398.
- [25] S. R. Coleman and J. Mandula, *All possible symmetries of S matrix*, *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251–1256.
- [26] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, *All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix*, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.
- [27] C. Aragone and S. Deser, *Consistency Problems of Hypergravity*, *Phys. Lett.* **B86** (1979) 161.
- [28] F. A. Berends, J. W. van Holten, B. de Wit and P. van Nieuwenhuizen, *On spin 5/2 gauge fields*, *J. Phys.* **A13** (1980) 1643–1649.
- [29] A. K. H. Bengtsson, I. Bengtsson and L. Brink, *Cubic interaction terms for arbitrary spin*, *Nucl. Phys.* **B227** (1983) 31.
- [30] A. K. H. Bengtsson, I. Bengtsson and L. Brink, *Cubic interaction terms for arbitrarily extended Supermultiplets*, *Nucl. Phys.* **B227** (1983) 41.

- [31] F. A. Berends, G. J. H. Burgers and H. van Dam, *On the theoretical problems in constructing interactions involving higher spin massless particles*, *Nucl. Phys.* **B260** (1985) 295.
- [32] F. A. Berends, G. J. H. Burgers and H. Van Dam, *On spin three selfinteractions*, *Z. Phys.* **C24** (1984) 247–254.
- [33] E. S. Fradkin and R. R. Metsaev, *A Cubic interaction of totally symmetric massless representations of the Lorentz group in arbitrary dimensions*, *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) L89–L94.
- [34] R. R. Metsaev, *Poincare invariant dynamics of massless higher spins: Fourth order analysis on mass shell*, *Mod. Phys. Lett.* **A6** (1991) 359–367.
- [35] R. R. Metsaev, *Generating function for cubic interaction vertices of higher spin fields in any dimension*, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993) 2413–2426.
- [36] R. R. Metsaev, *S matrix approach to massless higher spins theory. 2: The Case of internal symmetry*, *Mod. Phys. Lett.* **A6** (1991) 2411–2421.
- [37] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, *On the Gravitational Interaction of Massless Higher Spin Fields*, *Phys. Lett.* **B189** (1987) 89–95.
- [38] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, *Cubic Interaction in Extended Theories of Massless Higher Spin Fields*, *Nucl. Phys.* **B291** (1987) 141.
- [39] N. Boulanger, S. Leclercq and P. Sundell, *On The Uniqueness of Minimal Coupling in Higher-Spin Gauge Theory*, *JHEP* **08** (2008) 056 [0805.2764].
- [40] M. A. Vasiliev, *'gauge' form of description of massless fields with arbitrary spin*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **32** (1980) 439.
- [41] M. A. Vasiliev, *Equations of motion of interacting massless fields of all spins as a free differential algebra*, *Phys. Lett.* **B209** (1988) 491–497.
- [42] M. A. Vasiliev, *Consistent equations for interacting massless fields of all spins in the first order in curvatures*, *Annals Phys.* **190** (1989) 59–106.
- [43] M. A. Vasiliev, *Unfolded representation for relativistic equations in (2+1) anti-de sitter space*, *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 649–664.
- [44] M. A. Vasiliev, *Dynamics of massless higher spins in the second order in curvatures*, *Phys. Lett.* **B238** (1990) 305–314.
- [45] M. A. Vasiliev, *Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions*, *Phys. Lett.* **B243** (1990) 378–382.
- [46] M. A. Vasiliev, *Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (a)ds(d)*, *Phys. Lett.* **B567** (2003) 139–151 [hep-th/0304049].

- [47] R. R. Metsaev, *Cubic interaction vertices of totally symmetric and mixed symmetry massless representations of the Poincare group in $D = 6$ space-time*, *Phys. Lett.* **B309** (1993) 39–44.
- [48] E. S. Fradkin and R. R. Metsaev, *Cubic scattering amplitudes for all massless representations of the Poincare group in any space-time dimension*, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 4660–4667.
- [49] R. R. Metsaev, *Cubic interaction vertices for higher spin fields*, [hep-th/9705048](#).
- [50] X. Bekaert, N. Boulanger and S. Cnockaert, *Spin three gauge theory revisited*, *JHEP* **01** (2006) 052 [[hep-th/0508048](#)].
- [51] N. Boulanger and S. Leclercq, *Consistent couplings between spin-2 and spin-3 massless fields*, *JHEP* **11** (2006) 034 [[hep-th/0609221](#)].
- [52] Z. Bern, J. J. Carrasco, D. Forde, H. Ita and H. Johansson, *Unexpected Cancellations in Gravity Theories*, *Phys. Rev.* **D77** (2008) 025010 [[0707.1035](#)].
- [53] Z. Bern, J. J. Carrasco, L. J. Dixon, H. Johansson and R. Roiban, *The Ultraviolet Behavior of $N=8$ Supergravity at Four Loops*, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 081301 [[0905.2326](#)].
- [54] A. Codello, R. Percacci and C. Rahmede, *Ultraviolet properties of $f(R)$ -gravity*, *Int. J. Mod. Phys.* **A23** (2008) 143–150 [[0705.1769](#)].
- [55] A. Codello, R. Percacci and C. Rahmede, *Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation*, *Annals Phys.* **324** (2009) 414–469 [[0805.2909](#)].
- [56] D. Benedetti, P. F. Machado and F. Saueressig, *Taming perturbative divergences in asymptotically safe gravity*, [0902.4630](#).
- [57] D. Benedetti, P. F. Machado and F. Saueressig, *Asymptotic safety in higher-derivative gravity*, [0901.2984](#).
- [58] D. Polyakov, *Interactions of Massless Higher Spin Fields From String Theory*, [0910.5338](#).
- [59] D. Francia and A. Sagnotti, *On the geometry of higher-spin gauge fields*, *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) S473–S486 [[hep-th/0212185](#)].
- [60] A. Sagnotti and M. Tsulaia, *On higher spins and the tensionless limit of string theory*, *Nucl. Phys.* **B682** (2004) 83–116 [[hep-th/0311257](#)].
- [61] G. Bonelli, *On the tensionless limit of bosonic strings, infinite symmetries and higher spins*, *Nucl. Phys.* **B669** (2003) 159–172 [[hep-th/0305155](#)].
- [62] D. Francia and A. Sagnotti, *Minimal local Lagrangians for higher-spin geometry*, *Phys. Lett.* **B624** (2005) 93–104 [[hep-th/0507144](#)].

- [63] D. Francia and A. Sagnotti, *Higher-spin geometry and string theory*, *J. Phys. Conf. Ser.* **33** (2006) 57 [[hep-th/0601199](#)].
- [64] D. J. Gross, *High-Energy Symmetries of String Theory*, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1229.
- [65] B. Sundborg, *Stringy gravity, interacting tensionless strings and massless higher spins*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **102** (2001) 113–119 [[hep-th/0103247](#)].
- [66] E. Sezgin and P. Sundell, *Doubletons and 5D higher spin gauge theory*, *JHEP* **09** (2001) 036 [[hep-th/0105001](#)].
- [67] I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, *AdS dual of the critical $O(N)$ vector model*, *Phys. Lett.* **B550** (2002) 213–219 [[hep-th/0210114](#)].
- [68] E. P. Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group*, *Annals Math.* **40** (1939) 149–204.
- [69] X. Bekaert and N. Boulanger, *Mixed symmetry gauge fields in a flat background*, [hep-th/0310209](#).
- [70] T. Curtright, *Counting symmetry patterns in the spectra of strings*, *Published in Paris-Meudon Colloq* (1986) 304–333.
- [71] A. Tirziu and A. A. Tseytlin, *Semiclassical rigid strings with two spins in AdS_5* , [0911.2417](#).
- [72] R. R. Metsaev, *Massless mixed symmetry bosonic free fields in d - dimensional anti-de Sitter space-time*, *Phys. Lett.* **B354** (1995) 78–84.
- [73] R. R. Metsaev, *Arbitrary spin massless bosonic fields in d -dimensional anti-de Sitter space*, [hep-th/9810231](#).
- [74] L. Brink, R. R. Metsaev and M. A. Vasiliev, *How massless are massless fields in $ads(d)$* , *Nucl. Phys.* **B586** (2000) 183–205 [[hep-th/0005136](#)].
- [75] S. Deser and R. I. Nepomechie, *Gauge invariance versus masslessness in de sitter space*, *Ann. Phys.* **154** (1984) 396.
- [76] S. Deser and R. I. Nepomechie, *Anomalous propagation of gauge fields in conformally flat spaces*, *Phys. Lett.* **B132** (1983) 321.
- [77] A. Higuchi, *Symmetric tensor spherical harmonics on the n sphere and their application to the de sitter group $so(n,1)$* , *J. Math. Phys.* **28** (1987) 1553.
- [78] A. Higuchi, *Forbidden mass range for spin-2 field theory in de sitter space-time*, *Nucl. Phys.* **B282** (1987) 397.
- [79] A. Higuchi, *Massive symmetric tensor field in space-times with a positive cosmological constant*, *Nucl. Phys.* **B325** (1989) 745–765.

- [80] S. Deser and A. Waldron, *Gauge invariances and phases of massive higher spins in (A)dS*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 031601 [[hep-th/0102166](#)].
- [81] S. Deser and A. Waldron, *Null propagation of partially massless higher spins in (a)ds and cosmological constant speculations*, *Phys. Lett.* **B513** (2001) 137–141 [[hep-th/0105181](#)].
- [82] S. Deser and A. Waldron, *Partial masslessness of higher spins in (a)ds*, *Nucl. Phys.* **B607** (2001) 577–604 [[hep-th/0103198](#)].
- [83] S. Deser and A. Waldron, *Arbitrary spin representations in de sitter from ds/cft with applications to ds supergravity*, *Nucl. Phys.* **B662** (2003) 379–392 [[hep-th/0301068](#)].
- [84] Y. M. Zinoviev, *On massive high spin particles in (a)ds*, [hep-th/0108192](#).
- [85] Y. M. Zinoviev, *Toward frame-like gauge invariant formulation for massive mixed symmetry bosonic fields*, *Nucl. Phys.* **B812** (2009) 46–63 [[0809.3287](#)].
- [86] N. Boulanger, C. Iazeolla and P. Sundell, *Unfolding Mixed-Symmetry Fields in AdS and the BMV Conjecture: I. General Formalism*, [0812.3615](#).
- [87] N. Boulanger, C. Iazeolla and P. Sundell, *Unfolding Mixed-Symmetry Fields in AdS and the BMV Conjecture: II. Oscillator Realization*, [0812.4438](#).
- [88] Y. M. Zinoviev, *Frame-like gauge invariant formulation for mixed symmetry fermionic fields*, [0904.0549](#).
- [89] T. Curtright, *Generalized gauge fields*, *Phys. Lett.* **B165** (1985) 304.
- [90] J. M. F. Labastida, *Massless particles in arbitrary representations of the lorentz group*, *Nucl. Phys.* **B322** (1989) 185.
- [91] Y. M. Zinoviev, *First order formalism for mixed symmetry tensor fields*, [hep-th/0304067](#).
- [92] Y. M. Zinoviev, *On massive mixed symmetry tensor fields in minkowski space and (a)ds*, [hep-th/0211233](#).
- [93] Y. M. Zinoviev, *First order formalism for massive mixed symmetry tensor fields in minkowski and (a)ds spaces*, [hep-th/0306292](#).
- [94] Y. M. Zinoviev, *On dual formulations of massive tensor fields*, *JHEP* **10** (2005) 075 [[hep-th/0504081](#)].
- [95] D. Francia and A. Sagnotti, *Free geometric equations for higher spins*, *Phys. Lett.* **B543** (2002) 303–310 [[hep-th/0207002](#)].
- [96] X. Bekaert and N. Boulanger, *Tensor gauge fields in arbitrary representations of $GL(D,R)$: Duality and Poincare lemma*, *Commun. Math. Phys.* **245** (2004) 27–67 [[hep-th/0208058](#)].

- [97] X. Bekaert and N. Boulanger, *On geometric equations and duality for free higher spins*, *Phys. Lett.* **B561** (2003) 183–190 [[hep-th/0301243](#)].
- [98] X. Bekaert and N. Boulanger, *Tensor gauge fields in arbitrary representations of $gl(d,r)$. ii: Quadratic actions*, *Commun. Math. Phys.* **271** (2007) 723–773 [[hep-th/0606198](#)].
- [99] A. Campoleoni, D. Francia, J. Mourad and A. Sagnotti, *Unconstrained Higher Spins of Mixed Symmetry. I. Bose Fields*, *Nucl. Phys.* **B815** (2009) 289–367 [[0810.4350](#)].
- [100] A. Campoleoni, D. Francia, J. Mourad and A. Sagnotti, *Unconstrained Higher Spins of Mixed Symmetry. II. Fermi Fields*, [0904.4447](#).
- [101] A. Campoleoni, *Lagrangian formulations for Bose and Fermi higher-spin fields of mixed symmetry*, [0905.1472](#).
- [102] C. Burdick, A. Pashnev and M. Tsulaia, *On the mixed symmetry irreducible representations of the Poincare group in the BRST approach*, *Mod. Phys. Lett.* **A16** (2001) 731–746 [[hep-th/0101201](#)].
- [103] C. Burdick, A. Pashnev and M. Tsulaia, *The Lagrangian description of representations of the Poincare group*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **102** (2001) 285–292 [[hep-th/0103143](#)].
- [104] I. L. Buchbinder, A. Pashnev and M. Tsulaia, *Lagrangian formulation of the massless higher integer spin fields in the AdS background*, *Phys. Lett.* **B523** (2001) 338–346 [[hep-th/0109067](#)].
- [105] I. L. Buchbinder, A. Pashnev and M. Tsulaia, *Massless higher spin fields in the AdS background and BRST constructions for nonlinear algebras*, [hep-th/0206026](#).
- [106] X. Bekaert, I. L. Buchbinder, A. Pashnev and M. Tsulaia, *On higher spin theory: Strings, BRST, dimensional reductions*, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) S1457–1464 [[hep-th/0312252](#)].
- [107] I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin and A. Pashnev, *BRST approach to Lagrangian construction for fermionic massless higher spin fields*, *Nucl. Phys.* **B711** (2005) 367–391 [[hep-th/0410215](#)].
- [108] I. L. Buchbinder and V. A. Krykhtin, *Gauge invariant Lagrangian construction for massive bosonic higher spin fields in D dimensions*, *Nucl. Phys.* **B727** (2005) 537–563 [[hep-th/0505092](#)].
- [109] I. L. Buchbinder and V. A. Krykhtin, *BRST approach to higher spin field theories*, [hep-th/0511276](#).
- [110] I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin, L. L. Ryskina and H. Takata, *Gauge invariant Lagrangian construction for massive higher spin fermionic fields*, *Phys. Lett.* **B641** (2006) 386–392 [[hep-th/0603212](#)].

- [111] I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin and P. M. Lavrov, *Gauge invariant Lagrangian formulation of higher spin massive bosonic field theory in AdS space*, *Nucl. Phys.* **B762** (2007) 344–376 [[hep-th/0608005](#)].
- [112] A. Fotopoulos, K. L. Panigrahi and M. Tsulaia, *Lagrangian formulation of higher spin theories on AdS space*, *Phys. Rev.* **D74** (2006) 085029 [[hep-th/0607248](#)].
- [113] I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin and A. A. Reshetnyak, *BRST approach to Lagrangian construction for fermionic higher spin fields in AdS space*, *Nucl. Phys.* **B787** (2007) 211–240 [[hep-th/0703049](#)].
- [114] I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin and H. Takata, *Gauge invariant Lagrangian construction for massive bosonic mixed symmetry higher spin fields*, *Phys. Lett.* **B656** (2007) 253–264 [[0707.2181](#)].
- [115] I. L. Buchbinder and V. A. Krykhtin, *Progress in Gauge Invariant Lagrangian Construction for Massive Higher Spin Fields*, [0710.5715](#).
- [116] P. Y. Moshin and A. A. Reshetnyak, *BRST approach to Lagrangian formulation for mixed-symmetry fermionic higher-spin fields*, *JHEP* **10** (2007) 040 [[0707.0386](#)].
- [117] A. A. Reshetnyak, *On Lagrangian formulations for mixed-symmetry HS fields on AdS spaces within BFV-BRST approach*, [0809.4815](#).
- [118] I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin and L. L. Ryskina, *BRST approach to Lagrangian formulation of bosonic totally antisymmetric tensor fields in curved space*, *Mod. Phys. Lett.* **A24** (2009) 401–414 [[0810.3467](#)].
- [119] A. A. Reshetnyak, *Nonlinear Operator Superalgebras and BFV-BRST Operators for Lagrangian Description of Mixed-symmetry HS Fields in AdS Spaces*, [0812.2329](#).
- [120] I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin and L. L. Ryskina, *Lagrangian formulation of massive fermionic totally antisymmetric tensor field theory in AdS space*, [0902.1471](#).
- [121] I. L. Buchbinder, A. Fotopoulos, A. C. Petkou and M. Tsulaia, *Constructing the cubic interaction vertex of higher spin gauge fields*, *Phys. Rev.* **D74** (2006) 105018 [[hep-th/0609082](#)].
- [122] A. Fotopoulos and M. Tsulaia, *Interacting Higher Spins and the High Energy Limit of the Bosonic String*, *Phys. Rev.* **D76** (2007) 025014 [[0705.2939](#)].
- [123] A. Fotopoulos, N. Irges, A. C. Petkou and M. Tsulaia, *Higher-Spin Gauge Fields Interacting with Scalars: The Lagrangian Cubic Vertex*, *JHEP* **10** (2007) 021 [[0708.1399](#)].
- [124] A. Fotopoulos and M. Tsulaia, *Gauge Invariant Lagrangians for Free and Interacting Higher Spin Fields. A Review of the BRST formulation*, *Int. J. Mod. Phys.* **A24** (2009) 1–60 [[0805.1346](#)].

- [125] R. R. Metsaev, *Cubic interaction vertices for massive and massless higher spin fields*, *Nucl. Phys.* **B759** (2006) 147–201 [[hep-th/0512342](#)].
- [126] N. Boulanger and S. Cnockaert, *Consistent deformations of (p,p) -type gauge field theories*, *JHEP* **03** (2004) 031 [[hep-th/0402180](#)].
- [127] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, *Publ. Math. IHES* **47** (1977) 269–331.
- [128] P. van Nieuwenhuizen, *Free graded differential superalgebras*, . Invited talk given at 11th Int. Colloq. on Group Theoretical Methods in Physics, Istanbul, Turkey, Aug 23- 28, 1982.
- [129] R. D’Auria, P. Fre, P. K. Townsend and P. van Nieuwenhuizen, *Invariance of actions, rheonomy and the new minimal $n=1$ supergravity in the group manifold approach*, *Ann. Phys.* **155** (1984) 423.
- [130] R. D’Auria and P. Fre, *Geometric supergravity in $d = 11$ and its hidden supergroup*, *Nucl. Phys.* **B201** (1982) 101–140.
- [131] M. A. Vasiliev, *Actions, charges and off-shell fields in the unfolded dynamics approach*, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **3** (2006) 37–80 [[hep-th/0504090](#)].
- [132] M. A. Vasiliev, *Free massless fields of arbitrary spin in the de sitter space and initial data for a higher spin superalgebra*, *Fortsch. Phys.* **35** (1987) 741–770.
- [133] M. A. Vasiliev, *Equations of motion for $d = 3$ massless fields interacting through chern-simons higher spin gauge fields*, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 3689–3702.
- [134] M. A. Vasiliev, *Higher-spin gauge interactions for matter fields in two dimensions*, *Phys. Lett.* **B363** (1995) 51–57 [[hep-th/9511063](#)].
- [135] M. A. Vasiliev, *Higher-spin-matter interactions in $2+1$ dimensions*, [hep-th/9607135](#).
- [136] M. A. Vasiliev, *Higher-spin gauge theories in four, three and two dimensions*, *Int. J. Mod. Phys.* **D5** (1996) 763–797 [[hep-th/9611024](#)].
- [137] I. V. Tyutin and M. A. Vasiliev, *Lagrangian formulation of irreducible massive fields of arbitrary spin in $(2+1)$ dimensions*, *Teor. Mat,Fiz.* **113N1** (1997) 45–57 [[hep-th/9704132](#)].
- [138] M. A. Vasiliev, *Deformed oscillator algebras and higher-spin gauge interactions of matter fields in $2+1$ dimensions*, [hep-th/9712246](#).
- [139] S. F. Prokushkin and M. A. Vasiliev, *Higher-spin gauge interactions for massive matter fields in $3d$ ads space-time*, *Nucl. Phys.* **B545** (1999) 385 [[hep-th/9806236](#)].

- [140] S. Prokushkin and M. A. Vasiliev, *3d higher-spin gauge theories with matter*, hep-th/9812242.
- [141] M. A. Vasiliev, *Higher-spin-matter gauge interactions in 2+1 dimensions*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **56B** (1997) 241–252.
- [142] S. F. Prokushkin and M. A. Vasiliev, *Currents of arbitrary spin in ads(3)*, Phys. Lett. **B464** (1999) 53–61 [hep-th/9906149].
- [143] S. F. Prokushkin and M. A. Vasiliev, *Cohomology of arbitrary spin currents in ads(3)*, Theor. Math. Phys. **123** (2000) 415–435 [hep-th/9907020].
- [144] S. F. Prokushkin, A. Y. Segal and M. A. Vasiliev, *Coordinate-free action for ads(3) higher-spin-matter systems*, Phys. Lett. **B478** (2000) 333–342 [hep-th/9912280].
- [145] K. I. Bolotin and M. A. Vasiliev, *Star-product and massless free field dynamics in ads(4)*, Phys. Lett. **B479** (2000) 421–428 [hep-th/0001031].
- [146] M. A. Vasiliev, *Cubic interactions of bosonic higher spin gauge fields in ads(5)*, Nucl. Phys. **B616** (2001) 106–162 [hep-th/0106200].
- [147] V. E. Lopatin and M. A. Vasiliev, *Free massless bosonic fields of arbitrary spin in d-dimensional de sitter space*, Mod. Phys. Lett. **A3** (1988) 257.
- [148] M. A. Vasiliev, *Free massless fermionic fields of arbitrary spin in d-dimensional de sitter space*, Nucl. Phys. **B301** (1988) 26.
- [149] M. A. Vasiliev, *Higher spin superalgebras in any dimension and their representations*, JHEP **12** (2004) 046 [hep-th/0404124].
- [150] K. B. Alkalaev, *Two-column higher spin massless fields in ads(d)*, Theor. Math. Phys. **140** (2004) 1253–1263 [hep-th/0311212].
- [151] K. B. Alkalaev, *Mixed-symmetry massless gauge fields in ads(5)*, Theor. Math. Phys. **149** (2006) 1338–1348.
- [152] K. B. Alkalaev, O. V. Shaynkman and M. A. Vasiliev, *On the frame-like formulation of mixed-symmetry massless fields in (a)ds(d)*, Nucl. Phys. **B692** (2004) 363–393 [hep-th/0311164].
- [153] Y. M. Zinoviev, *Towards frame-like gauge invariant formulation for massive mixed symmetry bosonic fields. II. General Young tableau with two rows*, Nucl. Phys. **B826** (2010) 490–510 [0907.2140].
- [154] X. Bekaert and J. Mourad, *The continuous spin limit of higher spin field equations*, JHEP **01** (2006) 115 [hep-th/0509092].
- [155] Harish-Chandra, *Representations of semisimple lie groups, iv, v, vi.*, Am. J. Math. **77,78** (1955, 56) 743–777, 1–41, 546–628.

- [156] M. Gunaydin and C. Saclioglu, *Oscillator like unitary representations of noncompact groups with a jordan structure and the noncompact groups of supergravity*, *Commun. Math. Phys.* **87** (1982) 159.
- [157] I. Bars and M. Gunaydin, *Unitary representations of noncompact supergroups*, *Commun. Math. Phys.* **91** (1983) 31.
- [158] O. V. Shaynkman, I. Y. Tipunin and M. A. Vasiliev, *Unfolded form of conformal equations in m dimensions and $o(m+2)$ -modules*, *Rev. Math. Phys.* **18** (2006) 823–886 [hep-th/0401086].
- [159] A. Beilinson and J. Bernstein, *Representations of Real Reductive Lie Groups*, *Advances in Soviet Mathematics* **16** (1993) 1–50.
- [160] D. Vogan, *Representations of Real Reductive Lie Groups*, *Progress in Mathematics* **15** (1981).
- [161] V. Bargmann and E. P. Wigner, *Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations*, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **34** (1948) 211.
- [162] I. Gelfand and A. Yaglom, *General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the lorentz group*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **18** (1948) 703–733.
- [163] X. Bekaert, N. Boulanger and M. Henneaux, *Consistent deformations of dual formulations of linearized gravity: A no-go result*, *Phys. Rev.* **D67** (2003) 044010 [hep-th/0210278].
- [164] S. Deser, P. K. Townsend and W. Siegel, *Higher rank representations of lower spin*, *Nucl. Phys.* **B184** (1981) 333.
- [165] P. K. Townsend, *Classical properties of antisymmetric tensor gauge fields*, .
Lecture given at 18th Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, Poland, Feb 18 - Mar 3, 1981.
- [166] P. K. Townsend, *Gauge invariance for spin 1/2*, *Phys. Lett.* **B90** (1980) 275.
- [167] R. R. Metsaev, *Shadows, currents and AdS*, 0805.3472.
- [168] A. Einstein, *Do Gravitational Fields Play an Essential Role in the Structure of the Elementary Particles of Matter?*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1919) 349–356.
- [169] E. Alvarez, D. Blas, J. Garriga and E. Verdaguer, *Transverse Fierz-Pauli symmetry*, *Nucl. Phys.* **B756** (2006) 148–170 [hep-th/0606019].
- [170] D. Blas, *Gauge symmetry and consistent spin-two theories*, *J. Phys.* **A40** (2007) 6965–6972 [hep-th/0701049].
- [171] C. Fronsdal, *Massless fields with integer spin*, *Phys. Rev.* **D18** (1978) 3624.

- [172] C. S. Aulakh, I. G. Koh and S. Ouvry, *Higher spin fields with mixed symmetry*, *Phys. Lett.* **B173** (1986) 284.
- [173] J. Fang and C. Fronsdal, *Massless Fields with Half Integral Spin*, *Phys. Rev.* **D18** (1978) 3630.
- [174] J. M. F. Labastida, *Massless bosonic free fields*, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 531.
- [175] J. M. F. Labastida and T. R. Morris, *Massless mixed symmetry bosonic free fields*, *Phys. Lett.* **B180** (1986) 101.
- [176] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, *Candidate to the role of higher spin symmetry*, *Ann. Phys.* **177** (1987) 63.
- [177] S. E. Konstein and M. A. Vasiliev, *Massless representations and admissibility condition for higher spin superalgebras*, *Nucl. Phys.* **B312** (1989) 402.
- [178] S. E. Konstein and M. A. Vasiliev, *Extended higher spin superalgebras and their massless representations*, *Nucl. Phys.* **B331** (1990) 475–499.
- [179] L. P. S. Singh and C. R. Hagen, *Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. the boson case*, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 898–909.
- [180] L. P. S. Singh and C. R. Hagen, *Lagrangian formulation for arbitrary spin. 2. the fermion case*, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 910–920.
- [181] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and space-time. 1. Two spinor calculus and relativistic fields*, . Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1984) 458 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).
- [182] X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla and M. A. Vasiliev, *Nonlinear higher spin theories in various dimensions*, [hep-th/0503128](#).
- [183] M. A. Vasiliev, *On conformal, $sl(4,r)$ and $sp(8,r)$ symmetries of 4d massless fields*, [arXiv:0707.1085 \[hep-th\]](#).
- [184] O. A. Gelfond and M. A. Vasiliev, *Higher rank conformal fields in the $sp(2m)$ symmetric generalized space-time*, *Theor. Math. Phys.* **145** (2005) 1400–1424 [[hep-th/0304020](#)].
- [185] M. A. Vasiliev, *Relativity, causality, locality, quantization and duality in the $sp(2m)$ invariant generalized space-time*, [hep-th/0111119](#).
- [186] M. A. Vasiliev, *Higher-spin theories and $sp(2m)$ invariant space-time*, [hep-th/0301235](#).
- [187] V. E. Didenko, A. S. Matveev and M. A. Vasiliev, *Unfolded Dynamics and Parameter Flow of Generic $AdS(4)$ Black Hole*, [0901.2172](#).
- [188] V. E. Didenko, A. S. Matveev and M. A. Vasiliev, *Unfolded Description of AdS_4 Kerr Black Hole*, *Phys. Lett.* **B665** (2008) 284–293 [[0801.2213](#)].

- [189] V. E. Didenko and M. A. Vasiliev, *Schwarzschild black hole in 4d higher-spin gauge theory*, 0906.3898.
- [190] O. V. Shaynkman and M. A. Vasiliev, *Scalar field in any dimension from the higher spin gauge theory perspective*, *Theor. Math. Phys.* **123** (2000) 683–700 [hep-th/0003123].
- [191] O. V. Shaynkman and M. A. Vasiliev, *Higher spin conformal symmetry for matter fields in 2+1 dimensions*, *Theor. Math. Phys.* **128** (2001) 1155–1168 [hep-th/0103208].
- [192] T. Curtright, *Massless field supermultiplets with arbitrary spin*, *Phys. Lett.* **B85** (1979) 219.
- [193] A. S. Matveev and M. A. Vasiliev, *On dual formulation for higher spin gauge fields in (a)ds(d)*, *Phys. Lett.* **B609** (2005) 157–166 [hep-th/0410249].
- [194] K. B. Alkalaev, M. Grigoriev and I. Y. Tipunin, *Massless Poincare modules and gauge invariant equations*, 0811.3999.
- [195] P. de Medeiros and C. Hull, *Geometric second order field equations for general tensor gauge fields*, *JHEP* **05** (2003) 019 [hep-th/0303036].
- [196] W. Siegel, *Hidden Ghosts*, *Phys. Lett.* **B93** (1980) 170.
- [197] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *General quadratic gauge theory: Constraint structure, symmetries, and physical functions*, *J. Phys.* **A38** (2005) 5581 [hep-th/0409206].
- [198] S. Deser and A. Waldron, *Conformal invariance of partially massless higher spins*, *PHys. Lett.* **B603** (2004) 30 [hep-th/0408155].
- [199] P. A. M. Dirac, *Relativistic wave equations*, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **155A** (1936) 447–459.
- [200] Y. M. Zinoviev, *Frame-like gauge invariant formulation for massive high spin particles*, *Nucl. Phys.* **B808** (2009) 185–204 [0808.1778].
- [201] D. S. Ponomarev and M. A. Vasiliev, *Frame-Like Action and Unfolded Formulation for Massive Higher-Spin Fields*, 1001.0062.
- [202] S. Kumar, *Kac-moody Groups, Their Flag Varieties And Representation Theory*. Springer Verlag, 2001.
- [203] J. Hong and S.-J. Kang, *Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases*. Amer. Math. Soc., 2002.
- [204] K. B. Alkalaev, O. V. Shaynkman and M. A. Vasiliev, *Lagrangian formulation for free mixed-symmetry bosonic gauge fields in (a)ds(d)*, *JHEP* **08** (2005) 069 [hep-th/0501108].

- [205] K. B. Alkalaev, O. V. Shaynkman and M. A. Vasiliev, *Frame-like formulation for free mixed-symmetry bosonic massless higher-spin fields in $ads(d)$* , hep-th/0601225.
- [206] R. R. Metsaev, *Conformal self-dual fields*, 0812.2861.
- [207] M. Hamermesh, *Group theory and its application to physical problems*. Dover, New York, NY, 1989.
- [208] A. O. Barut and R. Raczka, *Theory of group representations and applications*, . Singapore, Singapore: World Scientific (1986) 717p.
- [209] D. E. Littlewood, *On invariant theory under restricted groups*, *Phil. Trans. Royal Soc. London, Ser. A.* **239** (1944), no. 809 387–417.
- [210] R. E. Howe, E. C. Tan and J. F. Willenbring, *Stable branching rules for classical symmetric pairs*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2003), no. 4 1601–1626 [math/0311159].